

УДК 62-507

А.Т. Барабанов, профессор, д-р техн. наук,**А.Н. Балабанов, асс. кафедры ТК***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: tk@sevgtu.sebastopol.ua***ФАКТОРИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА
МАТРИЦЫ ГАМИЛЬТОНА В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ
ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

Предлагается подход решения задачи факторизации характеристического многочлена матрицы Гамильтона, который позволяет определить коэффициенты гурвицева многочлена факторизации как решение системы линейных алгебраических уравнений, заданных совокупностью интегральных квадратических функционалов (ИКФ) простой структуры, определяемых характеристическим многочленом матрицы Гамильтона.

Ключевые слова: линейно-квадратическая оптимизация, алгебраическое уравнение Риккати, уравнение Басса, факторизация, интегрально-квадратические функционалы.

1. Постановка и актуальность задачи. В задаче оптимального управления системой

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m \quad (1)$$

с интегрально-квадратическим функционалом (ИКФ) качества

$$J(u) = \int_0^{\infty} [x^T(t)Px(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

где $A, B, P = P^T \geq 0$, $R = R^T > 0$ – заданные матрицы соответствующих размерностей, важную роль играет стабилизирующее решение (СР) K алгебраического уравнения Риккати (АУР)

$$A^TK + KA + P - KBR^{-1}B^TK = 0. \quad (3)$$

Термин СР подразумевает гурвицевость матрицы $(A - BR^{-1}B^TK)$, а закон управления может быть реализован в форме обратной связи

$$u(t) = Gx(t), \quad G = -R^{-1}B^TK. \quad (4)$$

В задаче построения СР АУР, см. [1] с дальнейшими ссылками, вводится в рассмотрение матрица Гамильтона

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -P & -A^T \end{bmatrix}, \quad H \in R^{2n \times 2n}. \quad (5)$$

Пусть матрица H не имеет собственных чисел, принадлежащих мнимой оси. Тогда характеристический многочлен матрицы Гамильтона

$$\Delta(s) = \det(sI_{2n} - H), \quad (6)$$

допускает факторизацию

$$\Delta(s) = (-1)^n q(s)q(-s), \quad (7)$$

где $q(s) = \sum_{k=0}^n q_k s^k$ – гурвицев многочлен. В силу свойства четности многочлен $\Delta(s)$ содержит только степени переменной s^2 .

В результате факторизации СР АУР может быть найдено из линейного матричного уравнения Басса [1]

$$q(H) \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} = 0, \quad q(H) \in R^{2n \times 2n}. \quad (8)$$

В (8) I – $n \times n$ единичная матрица, а

$$q(H) = H^n + q_{n-1}H^{n-1} + \dots + q_1H + q_0I. \quad (9)$$

Кроме задачи (1)–(9), факторизация (7) может быть использована в решении более общих задач факторизации полиномиальных пара-эрмитовых матриц [3], при выполнении факторизации дробно-рациональной функции спектральной плотности в построении передаточной функции формирующего фильтра и в других задачах.

Обычно факторизация (7) проводится с вычислением и сепарацией корней многочлена $\Delta(s)$. В [4] предложен итерационный подход факторизации по коэффициентам многочлена $\Delta(s)$. Однако не преодолены проблемы, связанные с устойчивостью итерационной процедуры и с выбором начального приближения. Поэтому задача факторизации (7) остается актуальной.

В настоящей работе рассматривается новый подход к выполнению факторизации многочлена $\Delta(s)$. Ставится задача вычисления коэффициентов многочлена $q(s)$ по ИКФ простой структуры, найденным по многочлену $\Delta(s)$.

2. Некоторые соотношения метода резольвенты [1], [2]. В [2] составной частью метода построения СР АУР, является вычисление ИКФ простой структуры (по [1] – «квадратических чисел»)

$$\gamma_r = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{s^{2r}}{\Delta(s)} ds, \quad r = 0, 1, \dots, n-1, \quad (11)$$

где C – контур, охватывающий все корни λ многочлена $\Delta(s)$, расположенные строго в правой комплексной полуплоскости, как на рисунке 1. Функционалы (11) определены на множестве характеристических многочленов (6). От ИКФ общего вида с числителем s^{2r} , где $s(x)$ – заданный многочлен, функционалы (11) отличаются простой структурой этого многочлена без параметров.

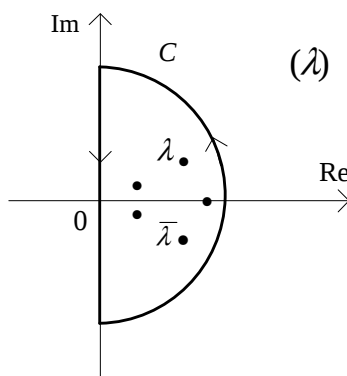


Рисунок 1 – Контур C

В [2] также рассмотрены подходы к вычислению ИКФ (11), в частности с помощью представления

$$\gamma_r = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^r}{\delta(x)} d\omega, \quad x = -\omega^2, \quad r = 0, 1, \dots, n-1, \quad (12)$$

где $\delta(x) = \Delta(s)|_{s^2=x}$ – многочлен степени n ,

и решением уравнения

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}\mathbf{e}, \quad \gamma_0 = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_{2i}}{q_0} \gamma_i, \quad q_k = 0, \quad k > n. \quad (13)$$

В (13) $\mathbf{Q}$ – неполная матрица Гурвица (без последних столбца и строки) размерности $(n-1) \times (n-1)$ для многочлена $\chi(z) = q_0 z^n + q_1 z^{n-1} + \dots + q_{n-1} z + 1$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_3 & q_5 & \dots & \dots & \dots \\ q_0 & q_2 & q_4 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & q_1 & q_3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & q_{n-2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & q_{n-3} & q_{n-1} \end{bmatrix};$$

$$\gamma = (\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_n)^T;$$

$e = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^T$ – вектор правых частей.

3. Подход к выполнению факторизации. ИКФ (11) в соответствии с (12) могут быть найдены численными методами интегрирования, а уравнения (13) позволяют решить обратную задачу – вычисления коэффициентов многочлена факторизации $q(s)$ через известные ИКФ (11). Для этого необходимо выполнить перестроение уравнений (13) в уравнения для коэффициентов многочлена $q(s)$.

Запишем уравнения (13) в виде

$$W \hat{\gamma} = I, \quad (14)$$

где $W \in R^{n \times n}$, $\hat{\gamma}, I \in R^n$;

элементы $w_{k,i}$ матрицы W равны коэффициентам q_{2i-k} многочлена $q(s)$, причём принимается $q_j = 0$ при

$$j < 0 \text{ и } j > n; \quad (15)$$

$$I = (l_0 \ l_1 \ \dots \ l_{n-1})^T \text{ – вектор с элементами } l_i = \begin{cases} 0, & i \neq n-1, \\ 0,5, & i = n-1; \end{cases}$$

$$\hat{\gamma} = (\gamma_0 \ \gamma_1 \ \dots \ \gamma_{n-1})^T.$$

В скалярном виде система (14) представима n уравнениями

$$\sum_{i=0}^{n-1} q_{2i-k} \gamma_i = l_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (16)$$

Рассмотрим два случая: n – чётно и n – нечётно.

Пусть n чётно. Из (16) выпишем уравнения, имеющие чётные номера $k = 0, 2, \dots, n-2$. При обозначении $j = k/2$, $p = n/2$ будем иметь

$$\sum_{i=0}^{n-1} q_{2(i-j)} \gamma_i = l_{2j}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1. \quad (17)$$

При учёте только ненулевых членов суммы (17) (согласно (15) $2(i-j) \geq 0$ и $2(i-j) \leq n$) получим

$$\sum_{i=j}^{p+j} q_{2(i-j)} \gamma_i = l_{2j}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

Обозначая $m = i - j$ и учитывая, что $l_{2j} = 0$ для $j = 0, 1, \dots, p-1$, запишем

$$\sum_{m=0}^p q_{2m} \gamma_{m+j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, p-1. \quad (18)$$

Так как коэффициент многочлена $\Delta(s)$ $\Delta_{2n} = 1$, то $q_n = 1$. С учётом этого перепишем (18) в виде

$$\sum_{m=0}^{p-1} q_{2m} \gamma_{m+j} = -\gamma_{p+j}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1. \quad (19)$$

Запишем теперь уравнения (19) относительно неизвестных q_{2m} , $m = 0, 1, \dots, p-1$ в матричном виде

$$F x = a, \quad (20)$$

где $F \in R^{p \times p}$ – матрица коэффициентов системы, $x, a \in R^p$ – вектор неизвестных и вектор правых частей соответственно. Элементы матрицы F и векторов x, a уравнения (20) определены согласно (19) как

$$f_{j+1,m+1} = \gamma_{m+j}, \quad x_{j+1} = q_{2j}, \quad a_{j+1} = -\gamma_{p+j}, \quad j, m = 0, 1, \dots, p-1.$$

Выпишем теперь из (16) уравнения с нечётными индексами $k = 1, 3, \dots, n-1$. При обозначении $j = \frac{k-1}{2}$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n-1} q_{2(i-j)-1} \gamma_i = l_{2j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

Аналогично предыдущему при учёте только ненулевых членов суммы получим

$$\sum_{i=j+1}^{p+j} q_{2(i-j)-1} \gamma_i = l_{2j+1}, \quad j=0, 1, \dots, p-1.$$

Обозначая $m = i - j - 1$, запишем

$$\sum_{m=0}^{p-1} q_{2m+1} \gamma_{m+j+1} = l_{2j+1}, \quad j=0, 1, \dots, p-1, \quad (21)$$

или в матричном виде

$$\mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad (22)$$

где $\mathbf{G} \in R^{p \times p}$, $\mathbf{y}, \mathbf{b} \in R^p$ с элементами согласно (21)

$$g_{j+1,m+1} = \gamma_{m+j+1}, \quad y_{j+1} = q_{2j+1}, \quad b_{j+1} = l_{2j+1}, \quad j, m=0, 1, \dots, p-1.$$

Таким образом, при чётном n уравнения (20) и (22) размерности $n/2$ определяют коэффициенты характеристического многочлена $q(s)$ с чётными и нечётными индексами соответственно.

Пусть n нечётно. При выполнении подобных построений в этом случае получаем уравнения вида (20) и (22) размерности $(n+1)/2$ и $(n-1)/2$ соответственно с элементами матриц и векторов

$$f_{j+1,m+1} = \gamma_{m+j}, \quad x_{j+1} = q_{2j}, \quad a_{j+1} = l_{2j+1}, \quad j, m=0, 1, \dots, \frac{n+1}{2}-1$$

и

$$g_{j+1,m+1} = \gamma_{m+j+1}, \quad y_{j+1} = q_{2j+1}, \quad b_{j+1} = -\gamma_{(n+1)/2+j}, \quad j, m=0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}-1.$$

4. Пример. Пусть матрицы системы (1) и критерия (2) имеют значения

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 540 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 735 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = 1.$$

Модифицированным алгоритмом Фаддеева-Левеверье [2] найден характеристический многочлен матрицы $\mathbf{H}$

$$\Delta(s) = s^8 - 30s^6 + 273s^4 - 820s^2 + 576, \quad (23)$$

которому соответствуют ИКФ (12)

$$\gamma_0 = -4,9603 \times 10^{-4}, \quad \gamma_1 = 3,9682 \times 10^{-4}, \quad \gamma_2 = -1,9841 \times 10^{-3}, \quad \gamma_3 = 5,9920 \times 10^{-2}$$

найденные численными методами интегрирования. Согласно выражениям (20) и (22) для коэффициентов q_i , $i=0, 1, 2, 3$ полинома $q(s)$ находим уравнения

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_2 \\ -\gamma_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

и соответственно их решения

$$q_0 = \frac{-\gamma_2^2 + \gamma_1 \gamma_3}{\gamma_0 \gamma_2 - \gamma_1^2}; \quad q_1 = \frac{-0,5 \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2}; \quad q_2 = \frac{-\gamma_0 \gamma_3 + \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_0 \gamma_2 - \gamma_1^2}; \quad q_3 = \frac{0,5 \gamma_1}{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2}.$$

Проверка по соотношению (7) для полученного полинома факторизации $q(s) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$ даёт исходный многочлен (23)

$$(-1)^4 q(s)q(-s) = s^8 - 30s^6 + 273s^4 - 820s^2 + 576.$$

Решением уравнения (8) получено СР АУР

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1170 & 870 & 270 & 30 \\ 870 & 1505 & 495 & 55 \\ 270 & 495 & 270 & 30 \\ 30 & 55 & 30 & 5 \end{bmatrix}$$

и матрица обратных связей (4)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 30 & 55 & 30 & 5 \end{bmatrix}.$$

Заклучение. В работе рассмотрен новый подход к факторизации характеристического многочлена матрицы Гамильтона по ИКФ (11), (12) в задаче ЛКО. Достоинством рассмотренного подхода является его независимость от процедур вычисления корней многочленов. Представляют интерес анализ уравнений (20), (22), обобщения предложенного подхода и его применения в других практических задачах.

Библиографический список использованной литературы

1. Барабанов А.Т. Стабилизирующее решение алгебраического уравнения Риккати. Метод резольвенты / А.Т. Барабанов // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 3. — С. 20–31.
2. Барабанов А.Т. Алгоритмы построения стабилизирующего решения алгебраического уравнения Риккати на основе его линейной редукции в задачах аналитического конструирования регуляторов / А.Т. Барабанов // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 5. — С. 53–68.
3. Kwakernaak H. Polynomial J-Spectral Factorization / Huibert Kwakernaak, Michael Sebek // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1994. — Vol. 39. — № 2. — P. 315–328.
4. Eḡecioḡlu Ö. Stable Factorization of Strictly Hurwitz Polynomials / Ö. Eḡecioḡlu, B.S. Yarman // Int. J. of Computers, Communications & Control. — 2010. — Vol. V. — № 5. — P. 701–709.

Поступила в редакцию 18.07.2011 г.

Барабанов О.Т., Балабанов О.М. Факторизация характеристического многочлена матрицы Гамильтона в разв'язанні задачі лінійно-квадратичної оптимізації

Пропонується підхід розв'язання задачі факторизації характеристичного багаточлена матриці Гамільтона, що дозволяє визначити коефіцієнти гурвіцева багаточлена факторизації як рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь, заданих сукупністю інтегральних квадратичних функціоналів простої структури, обумовлених характеристичним багаточленом матриці Гамільтона.

Ключові слова: лінійно-квадратична оптимізація, алгебраїчне рівняння Ріккати, рівняння Басса, факторизація, інтегрально-квадратичні функціонали.

Barabanov A.T., Balabanov A.N., Factorization of the Hamilton matrix's characteristic polynomial in the problem of linearly-quadratic optimization

The approach of the Hamilton matrix's characteristic polynomial factorization problem is offered. The factorization allows for defining the Hurwitz polynomial coefficient by solving linear algebraic equations. The equations are built by some simple structure integral quadratic functionals.

Keywords: linearly-quadratic optimization, algebraic Riccati equations, Bass's equation, a factorization, integral quadratic functionals.