

УДК 621.396.674

Л.М. Лобкова, д-р техн. наук, професор,**В.В. Головин, канд. техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, 99053**E-mail: v_golovin@mail.ru***АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОЙ ШИРИНЫ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ
АНТЕНН КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СВЯЗИ**

Выведены формулы для интегрального закона распределения нормированных значений квадрата огибающей и определена эффективная ширина диаграммы направленности с учетом допустимой неравномерности и требуемой вероятности.

Ключевые слова: статистическая теория антенн, диаграмма направленности.

Развитие современных систем радиосвязи, работающих на наземных и космических линиях, привело к необходимости использовать антенны с большими апертурами. Однако, реализовать их ожидаемые характеристики не удастся из-за существенного влияния условий распространения радиоволн в атмосфере, так как диаграмма направленности (ДН) антенны и ее ширина $\Delta\theta$ будут изменяться случайным образом как в пространстве, так и во времени. Данному вопросу посвящено большое число монографий и статей [1–3]. В его решении существенную роль сыграли работы Я.С. Шифрина, в том числе [4], посвященные экспериментальному исследованию «мгновенных» ДН, которые показали степень изменения реальных ДН.

До настоящего времени $\Delta\theta$ вычислялась на основании средней ДН по мощности, а затем графическим путем определялась $\Delta\theta$. Полученное таким образом значение $\Delta\theta$ не будет отражать флуктуирующего характера реальной ДН, и, следовательно, его нельзя использовать для достоверной оценки $\Delta\theta$.

Целью данной работы является разработка метода определения эффективной ширины ДН, $\Delta\theta_{\text{эф}}$, на основании угловой корреляционной функции квадрата огибающей ДН, характеризующей усредненную картину огибающей диаграммы направленности.

При этом под $\Delta\theta_{\text{эф}}$ понимается значение, при котором угловой коэффициент корреляции принимает заранее заданное значение. Однако указанный подход не лишен того же недостатка, что и графическое определение $\Delta\theta$, а именно: коэффициент корреляции огибающей также не позволяет судить о возможных изменениях огибающей ДН. Указанный недостаток в определении $\Delta\theta$ можно устранить, если учесть временные изменения огибающей с некоторой вероятностью (с учетом быстрых и медленных замираний сигнала).

Будет справедливым следующее определение $\Delta\theta_{\text{эф}}$. Эффективная ширина ДН $\Delta\theta_{\text{эф}}$ определяется тем значением $\Delta\theta$, при котором коэффициент угловой корреляции огибающей ДН с заданной вероятностью обеспечивает допустимую неравномерность огибающей ДН.

Задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть в плоскости $z=0$ расположена круглая апертура передающей антенны с радиусом a_0 и с заданным амплитудно-фазовым распределением поля $E(x, y)$. Требуется найти напряженность электромагнитного поля в любой точке M в плоскости $z=L$. Основные обозначения показаны на рисунке 1.

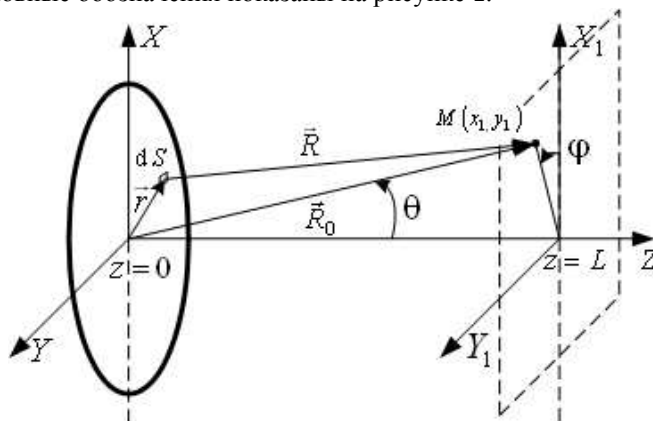


Рисунок 1 — К определению поля в месте приема

Используя приближение Френелевской дифракции, поле излучения $E_M(x_1, y_1)$ можно записать в виде

$$E_M(x_1, y_1) = \frac{j}{\lambda} (1 + \cos \theta) \iint_S E_S(x, y) \frac{\exp(-jkR)}{R} \exp(j\Psi(R, t)) dS, \quad (1)$$

где $R = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + L^2} \approx L - \frac{xx_1 + yy_1}{L} + \frac{x^2 + y^2}{2L}$; S — площадь апертуры; $E_S(x, y) = A_S \exp(j\varphi_S)$;

$A_S = \text{const}$; $\varphi_S = \text{const}$; $\Psi(R, t) = \varphi(R, t) - j \ln \frac{A(R, t)}{A_0}$ — комплексная фаза луча, прошедшего расстояние R через турбулентную атмосферу, и детально исследованная С.М. Рытовым и В.И. Татарским [5, 6]; $\varphi(R, t)$ и $\chi(R, t) = \ln \frac{A(R, t)}{A_0}$ — случайные функции, которые подчиняются нормальному закону распределения.

На основании формулы (1) можно установить, что при $2a_0 \ll l_0$, т.е. когда размер апертуры $2a_0$ много меньше внутреннего масштаба турбулентности l_0 , случайные комплексные фазы всех лучей, достигающих точки x_1, y_1 , будут полностью коррелированы. Следовательно, экспоненциальный множитель $\exp[j\Psi(R, t)]$ можно вынести за знак интеграла и тогда при нормальном законе распределения $\Psi(R, t)$ поле $E(x_1, y_1)$ будет подчиняться нормально-логарифмическому закону распределения.

В том случае, когда размер апертуры $2a_0 \gg l_0$, указанное преобразование неприменимо. Таким образом, для малых апертур мгновенное значение ДН антенны можно представить в виде

$$f(\theta, t) = \exp(j\Psi(R, t)) f_0(\theta), \quad (2)$$

где $f_0(\theta)$ — ДН по полю в отсутствие турбулентных неоднородностей.

Далее необходимо использовать методику исследования статистических характеристик огибающей, фазы и частоты сигнала на линиях дальнего тропосферного распространения (ДТР) [4].

Поскольку огибающая сигнала определяется статистическими характеристиками ДН по полю и по мощности, то необходимо также рассмотреть и статистические характеристики огибающей диаграммы направленности. Представим огибающую ДН по полю в виде функции $\xi(\theta, t)$, которая определяется в виде

$$\xi(\theta, t) = |f(\theta, t)| = \left| \exp \left[j\Psi(R, t) + \ln \frac{A(R, t)}{A_0} \right] \right| \cdot |f_0(\theta)|. \quad (3)$$

По аналогии введем огибающую ДН по мощности

$$\rho(\theta, t) = |f(\theta, t)|^2 = \xi^2(\theta, t). \quad (4)$$

На основании (3) после преобразования (4) получим соотношение для $\rho(\theta, t)$ в виде

$$\rho(\theta, t) = \exp \left[\ln \frac{A^2(R, t)}{A_0^2} \right] \cdot |f_0(\theta)|^2. \quad (5)$$

При дальнейшем анализе будем записывать $\rho(\theta, t) = \rho$. Важный результат содержит формула (5): статистика квадрата огибающей ДН полностью определяется статистикой амплитудных флуктуаций поля электромагнитной волны $E_M(x_1, y_1)$, которые подробно рассмотрены в монографиях [5, 6], что позволяет использовать эти результаты при анализе ρ .

Таким образом, квадрат огибающей ρ подчинен нормально-логарифмическому закону распределения, для которого плотность вероятности имеет вид

$$W(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\rho}} \exp \left[-\frac{(\ln \rho - a)}{2\sigma^2} \right], \quad (6)$$

где $\rho \geq 0$; $a = \overline{\ln \rho}$; $\sigma^2 = \overline{\ln^2 \rho} - \overline{\ln \rho}^2$.

Функция ρ является функцией переменных θ и t . Рассмотрим нормированное значение квадрата огибающей относительно $\theta = 0^\circ$. В этом случае значение ρ при отклонении от $\theta = 0^\circ$ обозначим $\rho_1(\Delta\theta, t)$, а значение ρ при $\theta = 0^\circ$ — $\rho_2(0, t)$.

Обозначим нормированное значение квадрата огибающей как $k_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, где ρ_1 и ρ_2 — случайные функции, закон распределения которых определяется формулой (6). Для исследования частного двух случайных величин ρ_1 и ρ_2 воспользуемся двумерным законом распределения $W(\rho_1, \rho_2)$, который можно записать в виде

$$W(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\rho_1\rho_2\sqrt{1-\gamma^2(\Delta\theta)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\gamma^2(\Delta\theta))}\left[\frac{(\ln\rho_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\gamma(\Delta\theta)\frac{(\ln\rho_1-a_1)(\ln\rho_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\ln\rho_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}, \quad (7)$$

где $\gamma(\Delta\theta) = \frac{\ln\rho_1\ln\rho_2}{\sigma_1\sigma_2}$.

В соотношении (7) согласно правилу замены переменных [3] перейдем от переменных ρ_1 и ρ_2 к новым переменным ρ_2 и $k_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$. Якобиан преобразования в этом случае равен ρ_2 , а закон распределения $W(\rho_1, \rho_2)$ можно записать в виде $W(k_2\rho_2, \rho_2)$. После интегрирования $W(k_2\rho_2, \rho_2)$ по $d\rho_2$ находим одномерный закон распределения

$$W(k_2) = \int_0^\infty W(k_2\rho_2, \rho_2)\rho_2 d\rho_2. \quad (8)$$

Подставляя $W(k_2\rho_2, \rho_2)$ в (8) и преобразуя, получаем

$$W(k_2) = A \int_0^\infty \exp\left[-\frac{B}{\sigma_1^2}(\ln\rho_2-a_{11})^2 + D(\ln\rho_2-a_2)(\ln\rho_2-a_{11}) - \frac{B}{\sigma_2^2}(\ln\rho_2-a_2)^2\right] \frac{d\rho_2}{\rho_2}, \quad (9)$$

где $A = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 k_2}$; $B = \frac{1}{2(1-\gamma^2(\Delta\theta))}$; $a_{11} = a_1 - \ln k_2$.

Для интегрирования (9) перейдем к новой переменной:

$$x = \ln\rho_2, \quad dx = \frac{d\rho_2}{\rho_2},$$

тогда

$$W(k_2) = A \int_{-\infty}^\infty \exp\left[-\frac{B}{\sigma_1^2}(x-a_{11})^2 + D(x-a_2)(x-a_{11}) - \frac{B}{\sigma_2^2}(x-a_2)^2\right] dx. \quad (10)$$

Результат интегрирования (10) принимает вид

$$W(k_2) = A \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} \exp(-p) \exp\left(\frac{m^2}{4n}\right), \quad (11)$$

где $p = \frac{Ba_{11}^2}{\sigma_1^2} + \frac{Ba_2^2}{\sigma_2^2} - Da_{11}a_2$; $n = B\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)$; $m = \frac{2Ba_{11}}{\sigma_1^2} + \frac{2Ba_2}{\sigma_2^2} - D(a_{11} + a_2)$.

На основании (11) рассмотрим частный случай, когда флуктуации квадрата огибающей однородны, т.е. $a_1 = a_2 = a$ и $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Тогда (11) можно представить в виде

$$W(k_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma\sqrt{1-\gamma^2(\Delta\theta)}k_2} \exp\left(-\frac{(1+\gamma(\Delta\theta))\ln^2 k_2}{(1-\gamma^2(\Delta\theta))4\sigma^2}\right). \quad (12)$$

Формула (12) позволяет найти интегральный закон распределения $F(k_2 \leq K)$, где K определяется как уровень неравномерности $\gamma^2(\Delta\theta)$ и меняется от 0 до 1. Для интегрального закона распределения получим следующее выражение

$$F(k_2 \leq K) = \int_0^K W(k_2) dk_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma\sqrt{1-\gamma^2(\Delta\theta)}} \int_0^{K'} \exp\left(-\frac{(1+\gamma(\Delta\theta))\ln^2 k_2}{(1-\gamma^2(\Delta\theta))4\sigma^2}\right) \frac{dk_2}{k_2}. \quad (13)$$

После интегрирования (13) выражение для интегрального закона распределения примет вид

$$F(k_2 \leq K) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{\ln K}{2\sigma\sqrt{1-\gamma^2(\Delta\theta)}}\right) \right], \quad (14)$$

где $\Phi\left(\frac{\ln K}{2\sigma\sqrt{1-\gamma^2(\Delta\theta)}}\right)$ — функция Крампа.

Полученная формула (14) определяет вероятность того, что при данном значении $\Delta\theta$ величина нормированного значения $k_2 \leq K$. Поскольку $F(k_2 \leq K) = F\left(k_2 \geq \frac{1}{K}\right)$, то вероятность того, что $\frac{1}{K} \leq k_2 \leq K$ будет определяться соотношением

$$F\left(\frac{1}{K} \leq k_2 \leq K\right) = 1 + \Phi\left(\frac{\ln K}{2\sigma\sqrt{1-\gamma^2(\Delta\theta)}}\right), \quad (15)$$

где σ и $\gamma(\Delta\theta)$ определяются с использованием вышеприведенных соотношений.

Формула (15) наглядна и удобна для численных оценок. Однако для их проведения необходимо выразить σ и $\gamma(\Delta\theta)$ через статистические характеристики огибающей диаграммы направленности, а не ее логарифма.

Анализ σ и $\gamma(\Delta\theta)$ проведем следующим образом. На основании формулы (6) нетрудно получить соотношение для моментов квадрата огибающей ρ произвольного порядка

$$\overline{\rho^n} = \exp\left(na + \frac{n^2\sigma^2}{2}\right), \quad (16)$$

где $\sigma^2 = \overline{\ln \rho^2} - \overline{\ln \rho}^2$; $a = \overline{\ln \rho}$.

Таким образом, среднее значение квадрата огибающего будет равно

$$\bar{\rho} = \exp\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad (17)$$

а дисперсия квадрата огибающей σ_ρ^2 будет определяться соотношением

$$\sigma_\rho^2 = \overline{\rho^2} - \bar{\rho}^2 \quad \text{или} \quad \sigma_\rho^2 = \bar{\rho}^2 (\exp(\sigma^2) - 1).$$

Откуда

$$\exp(\sigma^2) = \frac{\sigma_\rho^2}{\bar{\rho}^2} + 1; \quad \sigma^2 = \ln\left(\frac{\sigma_\rho^2}{\bar{\rho}^2} + 1\right). \quad (18)$$

Полученное соотношение (18) позволяет выразить дисперсию логарифма квадрата огибающей σ^2 через дисперсию квадрата самой огибающей σ_ρ^2 и ее среднее значение $\bar{\rho}$, которые могут быть определены экспериментально путем измерения мгновенных диаграмм направленности.

На основании (17) и (18) получим формулу для среднего значения логарифма квадрата огибающей ДН

$$a = \ln(\bar{\rho}) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sigma_\rho^2}{\bar{\rho}^2}\right). \quad (19)$$

Для определения $\gamma(\Delta\theta)$ рассмотрим функцию угловой корреляции квадрата огибающей $R_\rho(\Delta\theta)$, используя для этого соотношение

$$R_p(\Delta\theta) = \int_0^\infty \int_0^\infty \rho_1 \rho_2 W(\rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2. \quad (20)$$

Не приводя громоздких вычислений (20), запишем результаты интегрирования в виде

$$R_p(\Delta\theta) = \overline{\rho_1 \rho_2} = \exp[2a + \sigma^2(1 + \gamma(\Delta\theta))]. \quad (21)$$

Решая уравнение (21), находим

$$\gamma(\Delta\theta) = \frac{\ln R_p(\Delta\theta) - 2a - \sigma^2}{\sigma^2}. \quad (22)$$

Подставив (18) и (19) в формулу (22) получим

$$\gamma(\Delta\theta) = \frac{\ln R_p(\Delta\theta) + \overline{\ln \rho^2} - 2\overline{\ln \rho} - \overline{\ln^2 \rho}}{\overline{\ln^2 \rho} - \overline{\ln \rho}^2}. \quad (23)$$

Формула (23) позволяет определить $\gamma(\Delta\theta)$ на основании результатов измерения мгновенных ДН антенны. Для получения численных оценок $\gamma(\Delta\theta)$ воспользуемся соотношением (5). Тогда, учитывая, что $|f(\Delta\theta)| = 1$, получим

$$\rho_1 = \exp\left[\ln \frac{A_1^2(\Delta\theta)}{A_0^2}\right] |f_0(\Delta\theta)|, \quad \rho_2 = \exp\left[\ln \frac{A_2^2(0)}{A_0^2}\right].$$

Подставляя найденные значения ρ_1 и ρ_2 в (21), находим

$$R_p(\Delta\theta) = \exp\left[\ln \frac{A_1^2(\Delta\theta)}{A_0^2} + \ln \frac{A_2^2(0)}{A_0^2}\right] |f_0(\Delta\theta)|^2. \quad (24)$$

После статистического усреднения первого сомножителя в (24) получим

$$\overline{\exp\left[\ln \frac{A_1^2(\Delta\theta)}{A_0^2} + \ln \frac{A_2^2(0)}{A_0^2}\right]} = \exp[2\sigma_A^2(1 + R_A(\Delta\theta))], \quad (25)$$

где σ_A^2 — дисперсия логарифма амплитуды волны; $R_A(\Delta\theta)$ — угловой коэффициент корреляции между флуктуациями логарифма амплитуды поля волны.

После подстановки (25) в (24) получим соотношение для $R_p(\Delta\theta)$ в виде

$$R_p(\Delta\theta) = \exp[2\sigma_A^2(1 + R_A(\Delta\theta))] |f_0(\Delta\theta)|^2. \quad (26)$$

При этом нормированное значение $R_{p \text{ норм}}(\Delta\theta)$ определяется соотношением

$$R_{p \text{ норм}}(\Delta\theta) = \frac{R_p(\Delta\theta)}{R_p(0)} = \exp[-2\sigma_A^2(1 - R_A(\Delta\theta))] |f_0(\Delta\theta)|^2. \quad (27)$$

Формула (27) для случая однородной атмосферы при $\sigma_A^2 = 0$ принимает вид

$$R_{p \text{ норм}}(\Delta\theta) = |\Lambda_1(ka_0\Delta\theta)|^2.$$

Таким образом, пространственный коэффициент корреляции $R_{p \text{ норм}}(\Delta\theta)$ совпадает с диаграммой направленности по мощности.

Возвращаясь к определению $\gamma(\Delta\theta)$, после несложных преобразований получим:

$$\gamma(\Delta\theta) = R_A(\Delta\theta); \quad \sigma^2 = \sigma_A^2. \quad (28)$$

На основании (28) можем записать формулу (15) в виде

$$F\left(\frac{1}{K} \leq k_2 \leq K\right) = 1 + \Phi\left(\frac{\ln K}{2\sigma_A \sqrt{1 - R_A(\Delta\theta)}}\right). \quad (29)$$

Для выполнения расчетов по формуле (29) воспользуемся формулами для σ_A^2 и $R_A(\Delta\theta)$, приведенными В.И. Татарским в [5]:

$$\sigma_A^2 = 0,0707 C_\epsilon^2 k^{\frac{7}{6}} L^{\frac{11}{6}}; \quad (30)$$

$$R_A(\Delta\theta) = \operatorname{Re}_1 F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, \frac{jk\Delta\theta^2 L}{4}\right) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \operatorname{Im}_1 F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, \frac{jk\Delta\theta^2 L}{4}\right) - \frac{1}{\frac{6}{11} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \sin \frac{\pi}{12}} \left(\frac{k\Delta\theta^2 L}{4}\right)^{\frac{5}{6}}, \quad (31)$$

где ${}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, \frac{jk\Delta\theta^2 L}{4}\right)$ — гипергеометрическая функция, C_ϵ^2 — структурная постоянная диэлектрической проницаемости атмосферы.

На основании (29), (30) и (31) проведены расчеты вероятности $F(k_2 \leq K)$ для случая непревышения заданного уровня K при $\sigma_A^2 = 10^{-2} \dots 10^{-1}$ (слабые флуктуации амплитуды) и для $\sigma_A^2 = 1$ (сильные флуктуации амплитуды), при $R_A(\Delta\theta) = 0,1 \dots 1$. Результаты расчетов $F(k_2 \leq K)$ показаны на рисунке 2. На основании полученных результатов можно установить, что с увеличением длины трассы L увеличивается σ_A^2 , что приводит к увеличению глубины флуктуаций огибающей, т.е. проявляются уровни K , смещенные в область малых значений. При этом вероятность появления малых значений K увеличивается с уменьшением угловой корреляции огибающей.

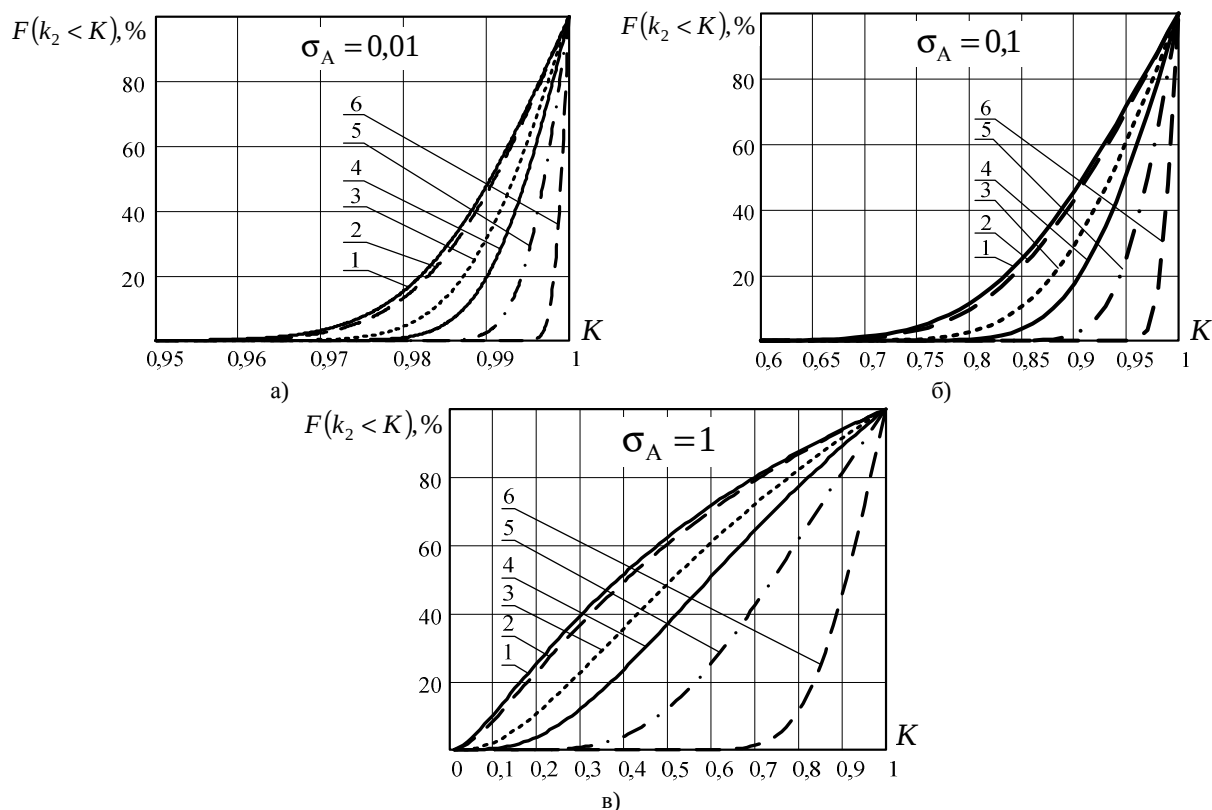


Рисунок 2 — Интегральные законы распределения нормальных значений квадрата огибающей диаграммы направленности для случаев:

- 1) $R_A(\Delta\theta) = 0$; 2) $R_A(\Delta\theta) = 0,1$; 3) $R_A(\Delta\theta) = 0,5$; 4) $R_A(\Delta\theta) = 0,7$; 5) $R_A(\Delta\theta) = 0,9$; 6) $R_A(\Delta\theta) = 0,99$

На основании проведенного исследования установлено, что при слабых флуктуациях амплитуды огибающей диаграммы направленности эффективная ширина ДН антенны, определяемая по формуле (27), будет совпадать с ДН для однородной атмосферы. При этом вероятность $F(k_2 \leq K)$ будет уменьшаться с увеличением $R_A(\Delta\theta)$. При сильных флуктуациях амплитуды огибающей ДН антенны (см. рисунок 2, в) увеличивается вероятность расширения $\Delta\theta_{\text{эфф}}$, вплоть до нарушения направленных

свойств антенны. Таким образом, в работе представлена вероятностная модель оценки эффективной ширины диаграммы направленности антенны. Дальнейшие исследования связаны с расчетами параметров антенн для использования их на космических линиях связи.

Библиографический список использованной литературы

1. Шифрин Я.С. Вопросы статистической теории антенн / Я.С. Шифрин. — М.: Советское радио, 1970. — 384 с.
2. Лобкова Л.М. Статистическая теория антенн сверхвысоких и оптических частот / Л.М. Лобкова. — М.: Связь, 1975. — 176 с.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. — М.: Советское радио, 1968. — Кн. 1. — 298 с.
4. Введенский Б.А. Дальнее тропосферное распространение ультракоротких радиоволн / Б.А. Введенский, Я.С. Шифрин. — М.: Советское радио, 1965. — 414 с.
5. Татарский В.И. Распространение радиоволн в турбулентной атмосфере / В.И. Татарский. — М.: Наука, 1967. — 548 с.
6. Рытов С.М. Введение в статистическую радиотехнику / С.М. Рытов. — М.: Наука, 1966. — 436 с.

Поступила в редакцию 17.11.2011 г.

Лобкова Л.М., Головин В.В. Аналіз ефективної ширини діаграми спрямованості антен космічних систем зв'язку

Виведено формули для інтегрального закону розподілу нормованих значень квадрату обвідної та визначена ефективна ширина діаграми спрямованості з урахуванням припустимої нерівномірності та потрібної імовірності.

Ключові слова: статистична теорія антен, діаграма спрямованості.

Lobkova L.M., Golovin V.V. The analysis of effective width of radiation pattern of the space communication systems antennas

Formulas for an integrated distribution law of the normalized values of a square of envelope of the radiation patterns are obtained and the effective width of the radiation pattern taking into account admissible irregularity and required probability is determined.

Keywords: the statistical theory of antennas, radiation pattern.