

УДК 004.942

В.Ю. Карлусов, доцент, канд. техн. наук*Севастопольский национальный технический университет,**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ЭКСПРЕСС-МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА**

Предложен метод вычисления круговой частоты гармонического сигнала по нескольким его отсчётам, с использованием процедур численного дифференцирования и извлечения квадратного корня. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующих применение метода на практике.

Ключевые слова: гармонический сигнал, круговая частота, метод расчёта.

Целью написания настоящей статьи является разработка и исследования процедуры расчёта круговой частоты гармонического сигнала по нескольким его отсчётам.

Вычисление частоты гармонического сигнала, в простейшем случае, может быть основано на подсчёте числа его нулевых значений (пересечений с линией нулевого уровня) на интервале наблюдений, определении среднего периода, на его основании которого рассчитывается оценка частоты

$$\tilde{f} = \frac{n_0}{T}, \quad (1)$$

где $\tilde{f}$ — оценка частоты; n_0 — число пересечений с линией нулевого уровня; T — интервал, на котором производится измерение.

Отметим, что точность нахождения частоты будут определять время наблюдения и погрешность нахождения нуля. Отсюда очевидно, что процедура (1) будет иметь продолжительность, напрямую зависящую от частоты измеряемой гармоник: для малых значений частот (нужно выждать хотя бы период) время определения затягивается, а по мере возрастания — пропорционально уменьшаться.

При использовании цифровой вычислительной техники возможен другой подход, основанный на понятии структуры измеряемого процесса [1]. Под структурой или структурной связью сигнала понимается его модель вида

$$\xi(t) = \Phi[s_1(t), s_2(t)],$$

в которой $s_1(t)$, $s_2(t)$ — так называемые контурные модели сигнала, получаемые как линейными, так и нелинейными преобразованиями исходного сигнала, включая и сам сигнал; $\Phi[\dots]$ — оператор структурной связи, по существу является математической или алгоритмической процедурой, объединяющей контурные модели.

Рассмотрим структурную связь вида

$$\kappa(t) = \frac{\ddot{s}(t)}{s(t)}, \quad (2)$$

где $s(t)$ — исходный процесс; $\ddot{s}(t)$ — вторая производная по времени, а в качестве $\Phi[\dots]$ выступает операция деления. Величина (2) может трактоваться как “консервант” энергии. Для процессов постоянных или линейно возрастающих эта величина равна нулю. Полагая $s(t) = \sin \omega t$ или

$$s(t) = \cos \omega t = \sin\left[\omega t + \frac{\pi}{2}\right], \text{ придём к тождеству } \kappa(t) = \kappa = -\omega^2.$$

Таким образом, показатель (2) представляет инвариантную характеристику гармонического процесса, теоретически не зависящую ни от амплитуды, ни от времени, ни от сдвига фазы: энергия гармоники консервативна и с течением времени не изменяется.

Исходя из изложенных выше соображений, может быть предложена схема быстрого расчёта круговой частоты, состоящая из операций двукратного дифференцирования, деления согласно (2) и процедур нахождения модуля и извлечения квадратного корня.

Операцию численного дифференцирования сигнала можно выполнять по правилу, предложенному Л. Эйлером:

$$\tilde{y}'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{T_0}, \quad (3)$$

где y_n — отсчёты сигнала; $n=0, 1, \dots$; T_0 — шаг временной дискретизации; $\tilde{y}'_n$ — оценка второй производной сигнала, представленного отсчётами.

При таком подходе формулами (2) и (3) можно будет пользоваться, начиная с третьего отсчёта гармонического процесса, а точность расчёта производных будет определяться величиной T_0 .

С целью обеспечения общности расчётов, представим гармонический сигнал в безразмерном или нормированном времени, по отношению к его периоду, то есть

$$\sin \omega t = \sin 2\pi f t = \sin 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow \sin 2\pi x,$$

где $x = \frac{t}{T}$.

При этом шаг временной дискретизации составит $\delta = \frac{T_0}{T}$, а значение характеристики (2) — $\kappa = -4\pi^2$.

Рассмотрим поведение функции (2) в окрестностях перехода сигнала через нулевое значение при использовании аппроксимации (3). Для заданного приращения δ по нормированной переменной x , оценка самого консерванта (2) определится в виде

$$\tilde{\kappa}(x, \delta) = \frac{\sin 2\pi(x + 2\delta) - 2\sin 2\pi(x + \delta) + \sin 2\pi x}{\delta^2 \sin 2\pi x}. \quad (4)$$

Используя известные тригонометрические преобразования, преобразуем (4) к виду

$$\tilde{\kappa}(x, \delta) = \frac{2}{\delta^2} (\cos 2\pi\delta - 1)(\cos 2\pi\delta - \sin 2\pi\delta + \operatorname{ctg} 2\pi x).$$

Из последнего выражения видно, что функция котангенса, присутствующая в этом выражении, определяет наличие особенностей в поведении зависимости $\tilde{\kappa}(x, \delta)$ в окрестности нуля, где существует разрыв 2-го рода. Это означает, что по обе стороны от нулевых значений исследуемого сигнала, вычисления будут выполняться с большой погрешностью. При этом

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \tilde{\kappa}(x, \delta) = -4\pi^2,$$

что не противоречит здравому смыслу и ранее сделанным выкладкам.

Вычислительный эксперимент был организован следующим образом:

- 1) осуществлялась генерация гармонического сигнала с заданными частотой и фазой;
- 2) двукратным применением (3), были получены первая и вторая производные сигнала;
- 3) выполнялась операция деления (2);
- 4) определялся модуль результата и извлекался корень по численному алгоритму.

Для извлечения корня была использована известная рекуррентная формула

$$\sqrt{z} \cong x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{z}{x_n} \right),$$

обеспечивающая хорошую сходимость и не критичная к начальному приближению, в которой x_n — текущее приближение, а z — подкоренное значение.

Применение Matlab Simulinc позволяет построить имитационную модель, приведённую на рисунке 1, реализующую алгоритм расчёта оценок частоты.

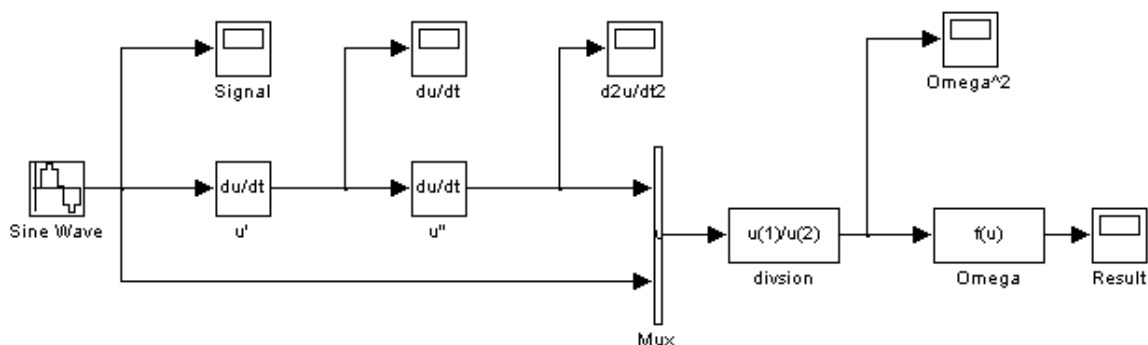


Рисунок 1 — Имитационная модель процедуры расчёта круговой частоты

Для расчётов оценок погрешностей моделирования была использована формула

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{|k|} - 2\pi}{2\pi}, \quad (5)$$

в которой величина k определяется согласно (2).

С использованием имитационной модели выполнялись эксперименты при вариации различных параметров гармонического сигнала: амплитуд, частот и фаз. Результаты подтвердили ранее высказанные предположения об инвариантности характеристики (2) по отношению к параметрам гармонического сигнала: его амплитуде и сдвиге фаз.

На рисунке 2 представлены кривые зависимостей (5) в нормированном времени x . Указанные зависимости получены для гармонического сигнала с единичной амплитудой и нулевым сдвигом фаз. Вычисления осуществлялись с различными величинами шага δ по безразмерной переменной x (абсцисса), конкретные значения которых указаны в заголовках рисунков 2, а – 2, г.

Из приведённых зависимостей можно сделать следующие выводы.

1. Метод работоспособен и будет особенно эффективен для гармонических сигналов низких и инфранизких частот.

2. Точность проведения расчётов напрямую зависит от отношения времени между отсчётами гармонического сигнала к его периоду.

3. Вычислительная процедура неустойчива в окрестностях перехода значений сигнала через нуль. Достоверные вычисления могут быть обеспечены в пределах интервала $\pm 0,2 T$.

4. Аналоговая реализация операций дифференцирования с последующим аналого-цифровым преобразованием результатов, в состоянии существенно повысить эффективность метода.

В перспективе полученные результаты предполагается использовать в приложении к определению частот составляющих полигармонических процессов.

Бibliографический список использованной литературы

1. Заездный А.М. Основы разделения и измерения сигналов по структурным свойствам / А.М. Заездный, Е.И. Плоткин, Ю.А. Черкасский. — Л.: ЛЭИС им. Бонч-Бруевича, 1971. — 124 с.

Поступила в редакцию 30.01.2012 г.

Карлусов В.Ю. Экспрес-метод обчислення частоти гармонічного сигналу

Запропонований метод обчислення кругової частоти гармонічного сигналу по декількох його відліках з використанням процедур чисельного диференціювання та витягання квадратного кореня. Наводяться результати обчислювальних експериментів, що демонструють застосування методу на практиці.

Ключові слова: гармонічний сигнал, кругова частота, метод розрахунку.

Karlusov V.Yu. Express - method of calculation of frequency of harmonic signal

The method of calculation of circular frequency of harmonic signals on a few his counting out is offered, with the use of procedures of numeral differentiation and extraction of square root. It is brought results over of calculable experiments representing application of method in practice.

Keywords: harmonic signal, circular frequency, method of calculation.

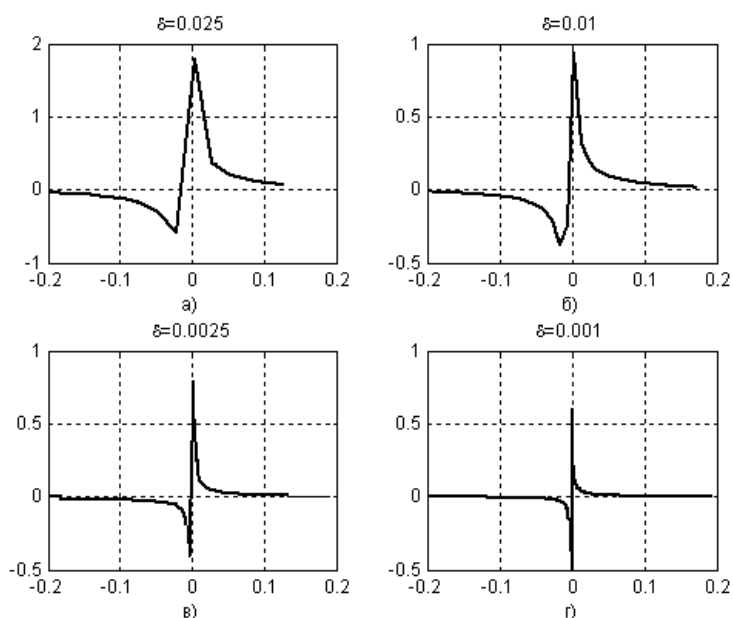


Рисунок 2 — Относительные погрешности расчётов круговой частоты