

УДК 621.3.014.4:621.313.33

И.П. Стадник, профессор, д-р техн. наук,**Д.М. Филиппов, ассистент***Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского**пр. Вернадского, 4, г. Симферополь, АР Крым, Украина, 95007**E-mail: Dmitriy.Filippov@tnu.edu.ua***АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЛИНЕЙНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ МЕТОДОМ СЛАУ**

Предложен эффективный численный метод, с помощью которого получены распределения вихревых токов во вторичном элементе линейного асинхронного двигателя и магнитной индукции в воздушном зазоре. Произведена проверка результатов расчета путем их сопоставления с решением, полученным методом конечных элементов, реализованным в программе COMSOL Multiphysics 3.5a.

Ключевые слова: линейный асинхронный двигатель, вихревые токи.

Существующие методики теоретического исследования электромагнитных процессов в линейных асинхронных двигателях (ЛАД) основаны на двух различных подходах к анализу этих процессов. К первому подходу относятся методики, основанные на теории цепей, в частности, метод детализированных схем замещения. Ко второму подходу относятся методики, основанные на теории поля, в частности, метод конечных элементов (МКЭ), комбинированный метод конечных и граничных элементов, метод интегральных уравнений, аналитический метод.

В работе [1] задача расчета электромагнитного поля в ЛАД решена методом интегральных уравнений. Как показано в [2], при численном решении интегрального уравнения относительно плотности токов найденное распределение токов в ряде случаев (в особенности в задачах со сложной геометрией ферромагнетиков) плохо удовлетворяет закону полного тока, что негативно отражается на точности решения задачи в целом. Для устранения этого недостатка в данной работе задача расчета электромагнитного поля сведена к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) путем применения закона полного тока в интегральной форме.

Целью статьи является применение метода СЛАУ [2] к расчету электромагнитного поля ЛАД и сопоставление полученных результатов расчета с МКЭ, который реализован в программе COMSOL Multiphysics 3.5a.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На рисунке 1 представлена модель ЛАД с двусторонним индуктором. Трехфазная обмотка индуктора состоит из двенадцати катушек, по четыре катушки в каждой фазе. Каждая катушка содержит $w_k = 70$ витков. В виду того, что размер двигателя в направлении оси x значительно превышает его размер в направлении оси y , на рисунке 1 было допущено нарушение масштаба путем увеличения размера в направлении оси y для упрощения восприятия.

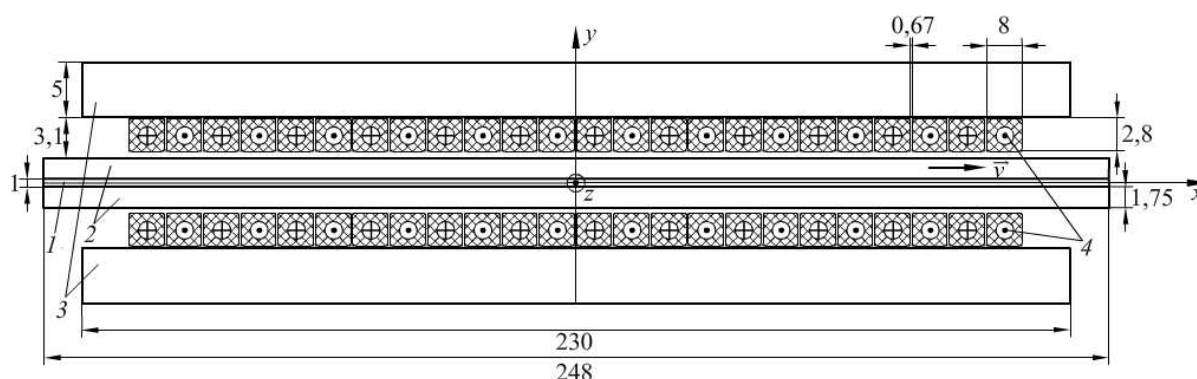


Рисунок 1 — Модель линейного асинхронного двигателя:

1 — стальной слой вторичного элемента; 2 — алюминиевые слои вторичного элемента;
3 — индуктор; 4 — трехфазная обмотка индуктора

В расчетах приближенно можно полагать, что ток каждой катушки протекает по ее средней линии. Токи в фазах заданы выражениями:

$$i_A(t) = I_m \sin \omega t, \quad i_B(t) = I_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \quad i_C(t) = I_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Вторичный элемент состоит из трех жестко соединенных проводников. Наружные проводники изготовлены из алюминия, внутренний проводник — из электротехнической стали. Толщины слоев вторичного элемента оптимальны с точки зрения создаваемого усилия (при уменьшении или увеличении толщин слоев вторичного элемента усилие становится меньше данного). Вторичный элемент совершает прямолинейное и равномерное движение со скоростью V в направлении оси x . Размер ЛАД в направлении оси z существенно больше других размеров. Магнитная проницаемость и удельная проводимость каждого ферромагнитного проводника считаются постоянными.

Площадь сечения стального слоя вторичного элемента обозначим через S_1 , а удельную электрическую проводимость и магнитную проницаемость соответственно через γ_1 и μ_1 . Аналогичные обозначения введем для остальных проводников электромагнитной системы ЛАД: для алюминиевых слоев S_2 , γ_2 , $\mu_2 = \mu_0$ (для нижнего слоя) и $S_3 = S_2$, $\gamma_3 = \gamma_2$, $\mu_3 = \mu_0$ (для верхнего слоя); для индуктора S_4 , γ_4 , μ_4 (для нижнего сердечника индуктора) и $S_5 = S_4$, $\gamma_5 = \gamma_4$, $\mu_5 = \mu_4$ (для верхнего сердечника индуктора).

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОТНОСТИ ТОКОВ ПРОВОДИМОСТИ И ЛИНЕЙНОЙ ПЛОТНОСТИ МИКРОТОКОВ

Для определенности, примем нумерацию ферромагнитных проводников электромагнитной системы ЛАД в соответствии с индексами их удельных проводимостей γ_r ($r = 1, 2, \dots, 5$), магнитных проницаемостей μ_r ($r = 1, 2, \dots, 5$) и поперечных сечений S_r ($r = 1, 2, \dots, 5$). Также будем использовать обозначение:

$$v_r = \begin{cases} v, & \text{если } r = 1, 2, 3; \\ 0, & \text{если } r = 4, 5. \end{cases}$$

В [1] из закона Ома получено интегральное уравнение относительно комплексных амплитуд проекций на ось z плотности токов проводимости и линейной плотности микротоков. Это уравнение имеет вид:

$$\dot{\delta}_r(M) = \frac{\gamma_r}{2\pi} \sum_{k=1}^5 \mu_k \int_{S_k} \dot{\delta}_k(N) F(M, N) dS_N + \frac{\gamma_r \mu_0}{2\pi} \int_L \dot{j}(N) F(M, N) dL_N + \dot{G}(M). \quad (1)$$

В формуле (1): $F(M, N) = K f_r$; $\dot{G}(M) = K \dot{g}_r$; $K \dot{\phi} = \dot{\phi} - \frac{1}{S_k} \int_{S_k} \dot{\phi} dS$; ($\dot{\phi}$ — некоторая комплекснозначная функция); $f_r = -i\omega \ln \frac{1}{r_{MN}} + v_r \frac{(\vec{r}_{NM}, \vec{e}_x)}{r_{NM}^2}$; $\dot{g}_r = -i\omega \gamma_r \dot{A}_0(M) - \gamma_r v_r \frac{\partial \dot{A}_0}{\partial x}(M)$; $r = 1, 2, \dots, 5$; $\dot{A}_0(M)$ — комплексная амплитуда проекции на ось z векторного потенциала первичного магнитного поля; r_{MN} — расстояние между точками M и N ; $\dot{\delta}_r(M)$ — комплексная амплитуда проекции на ось z плотности токов проводимости (вихревых токов) на сечении r -го проводника S_r ; $\dot{j}(N)$ — комплексная амплитуда проекции на ось z линейной плотности микротоков на границе L между ферромагнетиками.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЛАУ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ ТОКА $\dot{j}$

Границу L электромагнитной системы ЛАД разобьем на малые отрезки $L = \bigcup_{i=1}^{N^{(L)}} \Delta L_i$. Каждый такой отрезок охватим замкнутым контуром и запишем для него закон полного тока в интегральной форме. Будем полагать, что искомая функция $\dot{j}(Q)$ ($Q \in L$) в пределах каждого отрезка разбиения принимает постоянное значение: $\dot{j}(Q) = \dot{j}_i$, $i = 1, 2, \dots, N^{(L)}$.

Сечение всех проводников $S = \bigcup_{r=1}^5 S_r$ разобьем на малые прямоугольные площадки $S = \bigcup_{i=1}^{N^{(S)}} \Delta S_i$, в пределах каждой из которых будем считать, что функция $\dot{\delta}_r(M)$ принимает постоянное значение $\dot{\delta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N^{(S)}$). Если число отрезков разбиения равно $N^{(L)}$, а число площадок разбиения равно $N^{(S)}$, то

мы будем иметь $N^{(L)}$ линейных алгебраических уравнений относительно $N^{(S)} + N^{(L)}$ комплексных неизвестных.

Чтобы замкнуть систему уравнений, получим недостающие $N^{(S)}$ уравнений из интегрального уравнения (1). Для этого образуем систему точек $\{M_i\}$, центральных для площадок разбиения ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, N^{(S)}$). В каждой точке набора $\{M_i\}$ запишем интегральное уравнение (1), полагая, что в его правой части функция $\dot{j}(N)$, равно как и функция $\dot{\delta}(M)$ является ступенчатой, то есть $\dot{j}(N) = \dot{j}_l$, если $N \in \Delta L_l$ ($l = 1, 2, \dots, N^{(L)}$) и $\dot{\delta}(M) = \dot{\delta}_i$, если $N \in \Delta S_i$ ($i = 1, 2, \dots, N^{(S)}$).

Таким образом, получаем следующую СЛАУ:

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{N^{(S)}} a_{il} \dot{\delta}_l + \sum_{l=1}^{N^{(L)}} \tilde{a}_{il} \dot{j}_l = \dot{d}_i, & i = 1, 2, \dots, N^{(S)}, \\ \sum_{l=1}^{N^{(S)}} A_{il} \dot{\delta}_l + \sum_{l=1}^{N^{(L)}} \tilde{A}_{il} \dot{j}_l = \dot{D}_i, & i = 1, 2, \dots, N^{(L)}, \end{cases} \quad (2)$$

где $a_{il} = -\frac{\tilde{\gamma}_i \tilde{\mu}_l}{2\pi} \int_{\Delta S_i} F(M_i, N) dS_N$ (при $l \neq i$), $a_{ii} = 1$, $\tilde{a}_{il} = -\frac{\tilde{\gamma}_i \mu_0}{2\pi} \int_{\Delta L_l} F(M_i, N) dL_N$, $\dot{d}_i = \dot{G}(M_i)$,
 $A_{il} = -\frac{2\lambda(Q_i)}{\mu_0 \Delta L_i} \frac{\tilde{\mu}_l}{\mu_0} \int_{\Delta L_i} \tilde{\tau}_Q \int_{\Delta S_l} \frac{[\vec{e}_z, \vec{r}_{NQ}]}{r_{NQ}^2} dS_N dL_Q$, $\tilde{A}_{il} = -\frac{2\lambda(Q_i)}{\mu_0 \Delta L_i} \int_{\Delta L_i} \tilde{\tau}_Q \int_{\Delta L_l} \frac{[\vec{e}_z, \vec{r}_{PQ}]}{r_{PQ}^2} dL_P dL_Q$ (при $l \neq i$), $\tilde{A}_{ii} = 1$,
 $\dot{D}_i = \frac{2\lambda(Q_i)}{\mu_0 \Delta L_i} \int_{\Delta L_i} \vec{B}_0(Q) \tilde{\tau}_Q dL_Q$ ($\tilde{\tau}_Q$ — единичный касательный вектор в точке Q).

Коэффициенты $\tilde{\gamma}_i$ и $\tilde{\mu}_l$ — это, соответственно, удельная проводимость i -й площадки разбиения, равная удельной проводимости того проводника, сечению которого принадлежит данная площадка, и магнитная проницаемость l -й площадки разбиения, равная магнитной проницаемости того ферромагнетика, сечению которого принадлежит данная площадка. Параметр $\lambda(Q_i)$, входящий в

выражения для коэффициентов СЛАУ (2) определяется следующим образом: $\lambda(Q_i) = \frac{\mu^-(Q_i) - \mu^+(Q_i)}{\mu^-(Q_i) + \mu^+(Q_i)}$, где

$\mu^-(Q_i)$ и $\mu^+(Q_i)$ — магнитные проницаемости областей, являющихся соответственно внешней и внутренней по отношению к точке Q_i .

Отметим, что в данной задаче все интегралы, входящие в выражения коэффициентов СЛАУ (2) вычисляются по аналитическим формулам.

4. ПРИМЕР РАСЧЕТА

В целях проверки результатов расчета электромагнитного поля ЛАД поставленная задача была решена методом конечных элементов с помощью программы *COMSOL Multiphysics 3.5a*.

На рисунке 2 приведен фрагмент сетки разбиения, построенной в программе *COMSOL Multiphysics 3.5a*.

Были приняты следующие значения параметров тока обмотки индуктора: $I_m = 140$ (А), $\omega = 100 \pi$, $\tau = 26$ (мм).

На рисунке 3 приведена картина поля, построенная в программе *COMSOL Multiphysics 3.5a*.

Для сопоставления решений, полученных методом СЛАУ (2) и МКЭ, был произведен расчет индукции магнитного поля в воздушном зазоре ЛАД. Полученные зависимости представлены на рисунке 4.

Как видно из рисунка 4, основная погрешность между сравниваемыми решениями достигается при расчете поля в области выхода вторичного элемента за пределы индуктора двигателя. В остальной части выделенной области определения поля наблюдается хорошее совпадение результатов расчета. Среднеквадратичное отклонение, указанное на рисунке 4 рассчитывалось по формуле:

$$\frac{\|B_1 - B_2\|}{\|B_1\|} \cdot 100\%.$$

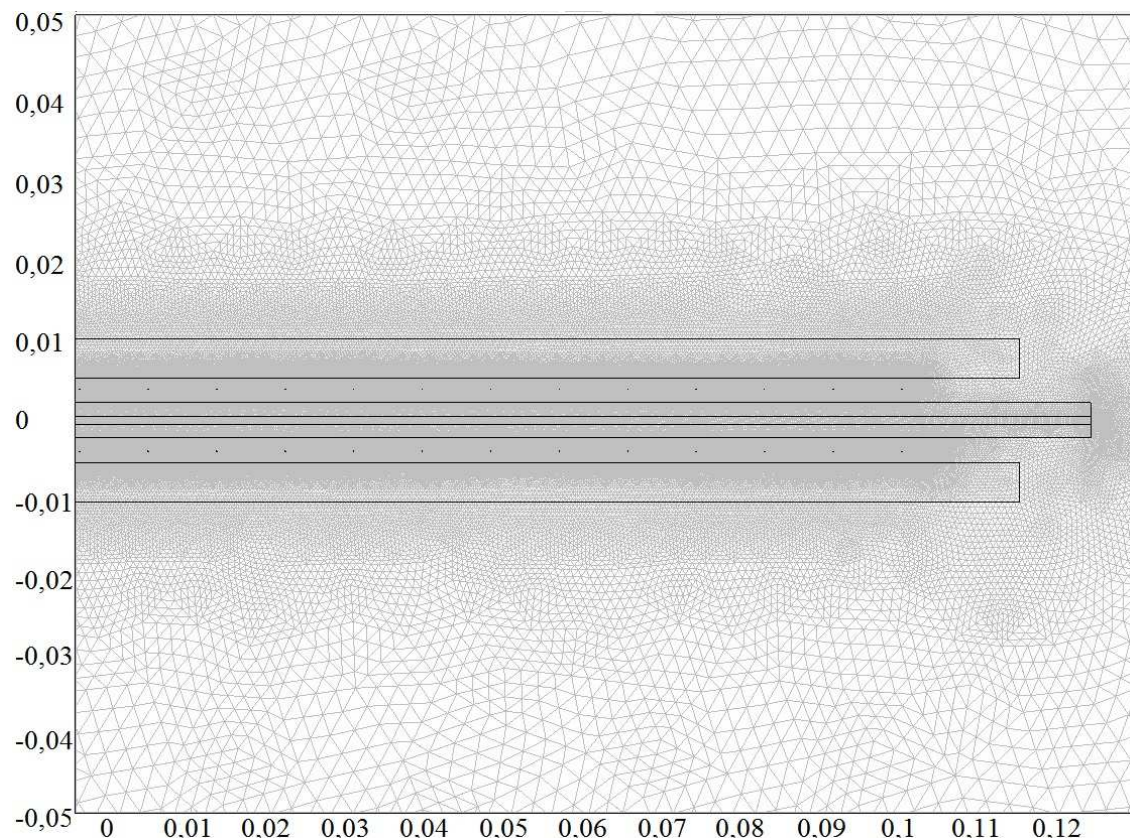


Рисунок 2 — Фрагмент сетки разбиения расчетной области, построенной в программе *COMSOL Multiphysics 3.5a* (размеры указаны в метрах)

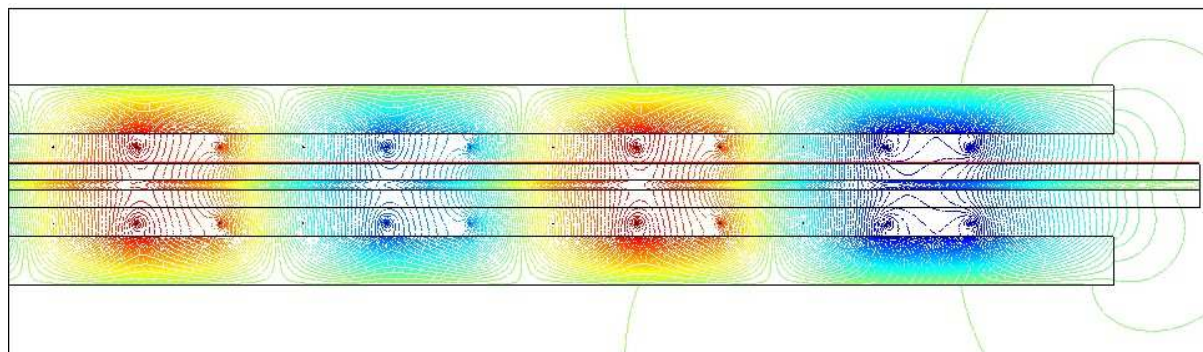


Рисунок 3 — Картина поля, построенная в программе *COMSOL Multiphysics 3.5a*

В таблице 1 приведены данные, характеризующие ресурсоемкость сравниваемых методов. В виду того, что число элементов разбиения не является вполне объективным критерием оценки ресурсоемкости метода, так как в сравниваемых методах структуры матриц линейных систем различны, был также приведен более объективный критерий — максимальный, использованный в процессе расчета, объем памяти.

Таблица 1 — Сравнение ресурсоемкости методов решения задачи

Метод	Число элементов сетки	Число граничных элементов	Объем использованной памяти
МКЭ	39814	2805	373 Мб
Метод СЛАУ	992	1406	59 Мб

ВЫВОДЫ

Предложенный в данной статье метод расчета электромагнитного поля ЛАД позволяет эффективно, с точки зрения использования вычислительных ресурсов, решать поставленную задачу.

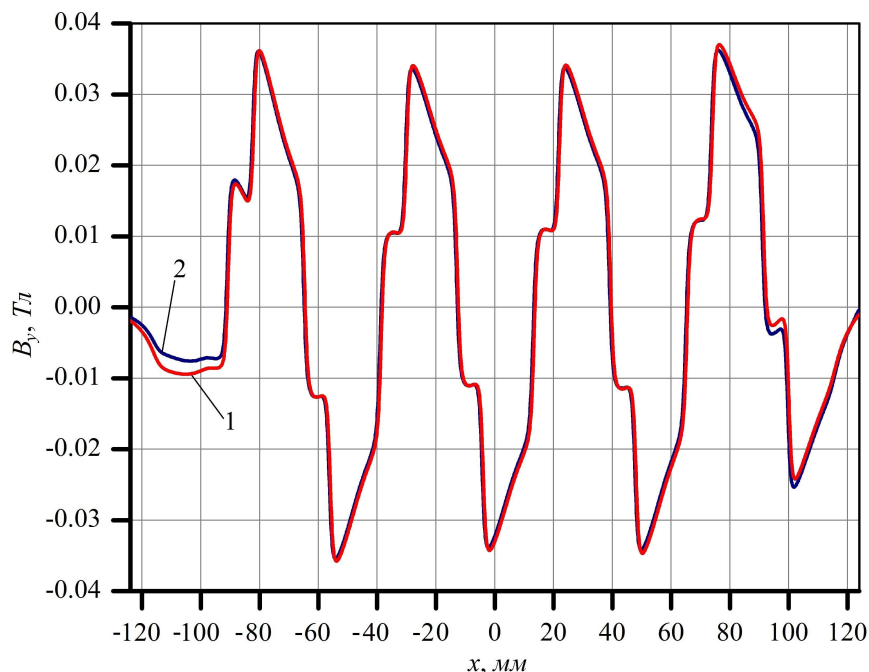


Рисунок 4 — Распределение у-компоненты индукции магнитного поля в воздушном зазоре двигателя (координата $y = 2,4$ (мм)): 1 — МКЭ; 2 — метод СЛАУ (2). Среднеквадратичное отклонение 8,56 %

Преимущество метода СЛАУ над МКЭ проявляется благодаря тому, что сетка разбиения строится только в области наведения вторичных токов. В данной задаче области, в которых токи не индуцируются (немагнитный и непроводящий зазор ЛАД, шихтованный индуктор и окружающее пространство), значительно больше, чем области, в которых токи индуцируются.

В дальнейшем планируется применить разработанную методику к расчету электромагнитного поля ЛАД с учетом нелинейных свойств ферромагнетиков.

Бibliографический список использованной литературы

1. Стадник И.П. Метод интегральных уравнений расчета вихревых токов в движущихся протяженных ферромагнитных проводниках с иллюстрацией на линейном асинхронном электродвигателе / И.П. Стадник, Д.М. Филиппов // *Техническая электродинамика*. — 2010. — № 3. — С. 14–20.
2. Стадник И.П. Метод СЛАУ расчета статических плоскопараллельных полей в кусочно-однородных средах (вторичные источники: простой слой токов; кусочно-линейная аппроксимация) / И.П. Стадник, Д.М. Филиппов // *Техническая электродинамика*. — 2008. — № 5. — С. 18–25.

Поступила в редакцию 24.10.2011 г.

Стадник І.П., Філіппов Д.М. Аналіз електромагнітного поля лінійного асинхронного двигуна методом СЛАУ

Запропоновано ефективний чисельний метод, за допомогою якого отримано розподіл вихрових струмів у вторинному елементі лінійного асинхронного двигуна і магнітної індукції в повітряній щілині. Виконана перевірка результатів розрахунку шляхом їх зіставлення з рішенням, отриманим методом кінцевих елементів, реалізованим у програмі COMSOL Multiphysics 3.5a.

Ключові слова: лінійний асинхронний двигун, вихрові струми.

Stadnik I.P., Filippov D.M. The analysis of the electromagnetic field by a linear induction motor with a Method of SLAE

An effective numerical method by which obtained the distribution of eddy currents in the secondary element of the linear induction motor and magnetic flux density in air gap is offered. Results of calculations are checked by comparing them with the solution that obtained by finite element method implemented in the program COMSOL Multiphysics 3.5a.

Keywords: linear induction motor, eddy currents.