

УДК 621.3.011.71

В.В. Костюков, ст. преподаватель

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

СВЯЗЬ ПОСТОЯННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРИ АНАЛИЗЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Рассматривается метод, позволяющий получить обобщенную аналитическую связь между постоянными интегрирования и независимыми начальными условиями при анализе переходных процессов в линейных электрических цепях.

Переходные процессы, имеющие большое значение в электрических цепях, являются следствием перераспределения энергии, запасенной индуктивностями и емкостями при переходе от одного установившегося режима к другому. В ходе переходных процессов могут возникать большие перенапряжения и сверхтоки, чреватые аварийными ситуациями. Очевидно, анализ переходных процессов, позволяющий предвидеть такие ситуации, представляет как научный, так и практический интерес.

Анализ переходных процессов в линейных электрических цепях осуществляется в основном тремя методами: классическим, операторным и методом переменных состояния. Каждый из методов имеет достоинства и

коэффициентов k_{ij} с одинаковыми первыми индексами будет одинакова.

Эти коэффициенты отличаются только корнями характеристического уравнения. Второй индекс коэффициентов k_{ij} совпадает с номером корня характеристического уравнения.

Систему (5) можно решить относительно неизвестных постоянных интегрирования A_{1ij} , например, по правилу Крамера

$$A_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad A_{12} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \dots \quad A_{1n} = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (6)$$

где определитель запишется в виде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Определители числителей в (6) получаются заменой соответствующего столбца в определителе (7) столбцом свободных членов из (5). Например, определитель Δ_1 будет иметь вид:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \Delta y_1(0) & 1 & \dots & 1 \\ \Delta y_2(0) & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta y_n(0) & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Из выражения (6) видно, что постоянные интегрирования A_{ij} зависят от избытка или недостатка энергии реактивных элементов.

Выражения (6)–(8) дают обобщенную аналитическую связь между начальными условиями в виде величин, связанных с избытком или недостатком энергии и постоянными интегрирования. Это позволяет выявлять закономерности протекания переходных процессов.

Анализ выражений (6)–(8) позволяет сделать важный вывод. Если электрические цепи имеют одинаковые характеристические уравнения, то для всех этих цепей вид постоянных интегрирования A_{ij} будет одинаковым, т.е. коэффициенты A_{ij} описывают все возможные переходные процессы. Конкретный вид переходного процесса определяется величинами $\Delta y_i(0)$.

В качестве примера рассмотрим последовательный RLC-контур. Дифференциальное уравнение, описывающее ток в таком контуре, имеет вид

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0.$$

Корни характеристического уравнения имеют вид:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

В таком контуре две переменные состояния: ток в индуктивности и напряжение на емкости. Для этих переменных можно записать выражения, описывающие переходный процесс

$$\begin{cases} i_L(t) = i_{L\text{пр}}(t) + A_{11}e^{\alpha_1 t} + A_{12}e^{\alpha_2 t} \\ U_C(t) = U_{C\text{пр}}(t) + A_{21}e^{\alpha_1 t} + A_{22}e^{\alpha_2 t}. \end{cases}$$

Для начального момента времени последняя система записывается в виде:

$$\begin{cases} A_{11} + A_{12} = i_L(0^-) - i_{L\text{пр}}(0^+) = \Delta i_L(0), \\ A_{21} + A_{22} = U_C(0^-) - U_{C\text{пр}}(0^+) = \Delta U_C(0). \end{cases}$$

Выразим коэффициенты A_{21} и A_{22} через A_{11} и A_{12} , воспользовавшись связью между напряжением и током на емкости:

$$U_C(t) = \frac{1}{c} \int i dt = \frac{1}{c} \int (i_{L\text{пр}} + A_{11}e^{\alpha_1 t} + A_{12}e^{\alpha_2 t}) dt = U_{C\text{пр}}(t) + \frac{A_{11}}{c\alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{A_{12}}{c\alpha_2} e^{\alpha_2 t}.$$

Подставив в последнее выражение начальный момент времени, системе (9) можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c\alpha_1} & \frac{1}{c\alpha_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta i_L(0) \\ \Delta U_C(0) \end{pmatrix}.$$

Отсюда найдем определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{c\alpha_1} & \frac{1}{c\alpha_2} \\ \frac{1}{c\alpha_1} & \frac{1}{c\alpha_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{c\alpha_2} - \frac{1}{c\alpha_1} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{c\alpha_1\alpha_2};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \Delta i_L(0) & 1 \\ \Delta U_C(0) & \frac{1}{c\alpha_2} \end{vmatrix} = \frac{\Delta i_L(0)}{c\alpha_2} - \Delta U_C(0) = \frac{\Delta i_L(0) - c\alpha_2 \Delta U_C(0)}{c\alpha_2};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \Delta i_L(0) \\ \frac{1}{c\alpha_1} & \Delta U_C(0) \end{vmatrix} = \Delta U_C(0) - \frac{\Delta i_L(0)}{c\alpha_1} = \frac{c\alpha_1 \Delta U_C(0) - \Delta i_L(0)}{c\alpha_1}.$$

Следовательно, выражение, описывающее ток в индуктивности переходного процесса во всех линейных цепях с аналогичным характеристическим уравнением, будет иметь вид:

$$i_L(t) = i_{L\text{пр}}(t) + \frac{\alpha_1 \Delta i_L(0) - c\alpha_1\alpha_2 \Delta U_C(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} + \frac{c\alpha_1\alpha_2 \Delta U_C(0) - \alpha_2 \Delta i_L(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t}. \quad (10)$$

В цепях с аналогичным характеристическим уравнением возможны только следующие восемь видов переходных процессов:

- | | |
|--|--|
| 1) $\Delta i_L(0) > 0, \Delta U_C(0) = 0;$ | 5) $\Delta i_L(0) > 0, \Delta U_C(0) > 0;$ |
| 2) $\Delta i_L(0) < 0, \Delta U_C(0) = 0;$ | 6) $\Delta i_L(0) > 0, \Delta U_C(0) < 0;$ |
| 3) $\Delta i_L(0) = 0, \Delta U_C(0) < 0;$ | 7) $\Delta i_L(0) < 0, \Delta U_C(0) > 0;$ |
| 4) $\Delta i_L(0) = 0, \Delta U_C(0) > 0;$ | 8) $\Delta i_L(0) < 0, \Delta U_C(0) < 0.$ |

Проанализируем величины, входящие в выражение (10):

$$\alpha_1 < 0; \quad \alpha_2 < 0; \quad |\alpha_1| < |\alpha_2|; \quad \tau_1 = 1/|\alpha_1|; \quad \tau_2 = 1/|\alpha_2|; \quad \tau_1 > \tau_2;$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\sqrt{(r/2L)^2 - 1/LC} > 0.$$

Рассмотрим конкретные виды переходных процессов, считая α_1, α_2 вещественными и различными.

- 1) $\Delta i_L(0) > 0; \Delta U_C(0) = 0.$

Этой ситуации соответствует схема, изображенная на рисунке 1.

В этом случае формула, описывающая ток в индуктивности в течение переходного процесса, имеет вид:

$$i_L(t) = \frac{\alpha_1 J}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_2 J}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t}.$$

График зависимости тока в индуктивности от времени, соответствующий спаду тока в индуктивности, показан на рисунке 2.

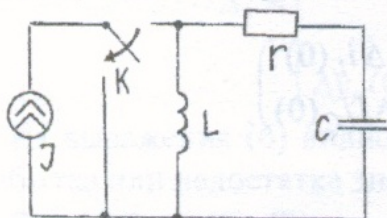


Рисунок 1 – Схема, соответствующая переходному процессу спада тока в индуктивности: $J = \text{const};$
 $\Delta i_L(0) = i_L(0^-) - i_{L\text{нр}}(0^+) = J > 0;$
 $\Delta U_C(0) = U_C(0^-) - U_{C\text{нр}}(0^+) = 0$

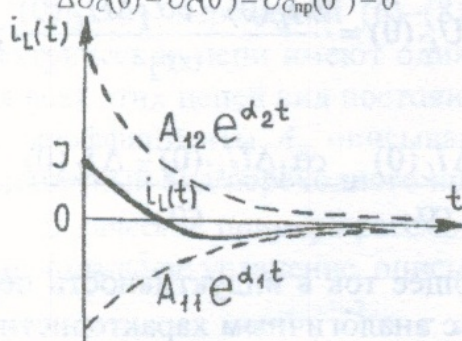


Рисунок 2 – График зависимости тока в индуктивности от времени, соответствующий спаду тока в индуктивности:

$$A_{11} = \frac{\alpha_1 \Delta i_L(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} < 0; \quad A_{12} = -\frac{\alpha_2 \Delta i_L(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} > 0;$$

$$|A_{11}| < |A_{12}|$$

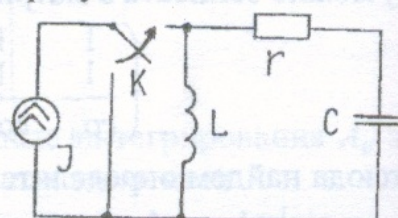


Рисунок 3 – Схема, соответствующая переходному процессу установления тока в индуктивности: $J = \text{const};$
 $\Delta i_L(0) = i_L(0^-) - i_{L\text{нр}}(0^+) = -J < 0;$
 $\Delta U_C(0) = U_C(0^-) - U_{C\text{нр}}(0^+) = 0$

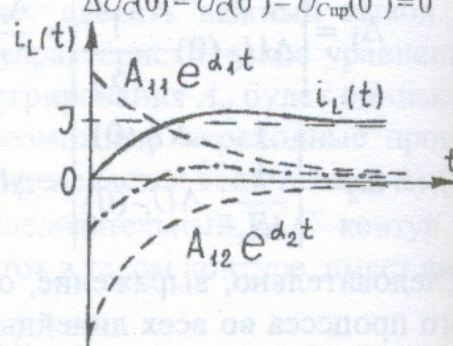


Рисунок 4 – График зависимости тока в индуктивности от времени, соответствующий установлению тока в индуктивности:

$$A_{11} = \frac{\alpha_1 \Delta i_L(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} > 0; \quad A_{12} = -\frac{\alpha_2 \Delta i_L(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} < 0;$$

$$|A_{11}| < |A_{12}|$$

2) $\Delta i_L(0) < 0$; $\Delta U_C(0) = 0$. Этой ситуации соответствует схема, изображенная на рисунке 3.

В этом случае формула, описывающая ток в индуктивности в течение переходного процесса, имеет вид:

$$i_L(t) = J + \frac{\alpha_1 J}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_2 J}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t}.$$

График зависимости тока в индуктивности от времени, соответствующий установлению тока в индуктивности, показан на рисунке 4.

3) $\Delta i_L(0) = 0$; $\Delta U_C(0) < 0$. Этой ситуации соответствует схема, изображенная на рисунке 5.

В этом случае формула, описывающая ток в индуктивности в течение переходного процесса, имеет вид

$$i_L(t) = -\frac{c\alpha_1\alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} + \frac{c\alpha_1\alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t}.$$

График зависимости тока в индуктивности от времени, соответствующий заряду емкости, показан на рисунке 6.

Аналогичным образом можно рассмотреть другие конкретные виды переходных процессов. Зная одну из переменных состояния, применив связь между напряжением и током на элементах и законы Кирхгофа, можно найти все необходимые токи и напряжения. Можно также за базисную взять другую переменную состояния.

Определенную сложность в данном подходе к анализу переходных процессов представляет поиск коэффициентов k_{ij} матрицы связи переменных состояния в (5). Эта задача требует более подробного рассмотрения и может быть решена или с помощью законов Кирхгофа, или с помощью аналогов операторных сопротивлений.

Библиографический список

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи / Л.А. Бессонов. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1984. — 559 с.
2. Попов В.П. Основы теории цепей / В.П. Попов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1998. — 575 с.

Поступила в редакцию 18.06.2002 г.

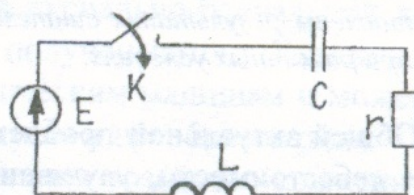


Рисунок 5 – Схема, соответствующая переходному процессу заряда емкости: $E = \text{const}$; $\Delta U_C(0) = U_C(0^-) - U_{C\text{нр}}(0^+) = -E < 0$; $\Delta i_L(0) = i_L(0^-) - i_{L\text{нр}}(0^+) = 0$

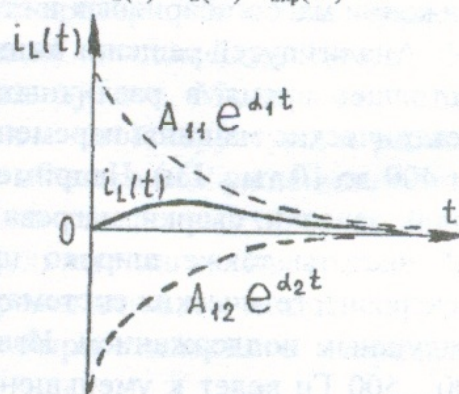


Рисунок 6 – График зависимости тока в индуктивности от времени, соответствующий переходному процессу заряда

емкости: $A_{11} = -\frac{c\alpha_1\alpha_2\Delta U_C(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} > 0$;
 $A_{12} = -A_{11}$