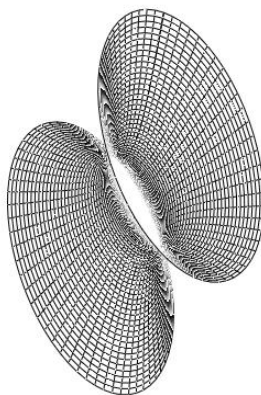


С.Ф. Ледяев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА



Севастополь - 2012

Ледяев С.Ф. Высшая математика. Лекции в первом семестре/ С.Ф. Ледяев. – Севастополь, 2012 г. -128 с.

Данное пособие основано на конспекте лекций, читаемых автором в первом учебном семестре студентам дневной формы обучения ряда специальностей Севастопольского национального технического университета.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ	4
1.1 Определители 2 и 3 порядков, вычисление, свойства.....	4
1.2 Правило Крамера.....	6
1.3 Минор, алгебраическое дополнение, разложение определителя по элементам ряда	8
2 ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ.....	9
2.1 Векторы, коллинеарность, компланарность, равенство векторов.....	9
2.2 Умножение вектора на число, сложение векторов.....	9
2.3 Разложение вектора по базису.....	11
2.4 Системы координат на плоскости.....	13
2.5 Преобразование декартовых координат при параллельном переносе и вращении.....	14
3 ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ.....	16
3.1 Скалярное произведение векторов.....	16
3.2 Векторное произведение векторов.....	17
3.3 Смешанное произведение векторов.....	19
4 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.....	22
4.1 Уравнения прямой линии на плоскости.....	22
4.2 Кривые второго порядка.....	26
5 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.....	33
5.1 Уравнения плоскости в пространстве.....	33
5.2 Уравнения прямой линии в пространстве.....	36
5.3 Поверхности в пространстве.....	40
6 МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ.....	49
6.1 Матрицы, частные виды матриц.....	49
6.2 Операции с матрицами.....	50
6.3 Обратная матрица, её вычисление.....	52
6.4 Матричный метод решения систем уравнений.....	54
7 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.....	56
7.1 Основные понятия о комплексных числах.....	56
7.2 Алгебраические действия с комплексными числами.....	58
7.3 Комплексные корни квадратного алгебраического уравнения.....	60

8	ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.....	61
8.1	Понятие линейного векторного пространства. Аксиомы линейных пространств.....	61
8.2	Примеры линейных пространств.....	62
8.3	Арифметический вектор. Линейное пространство арифметических векторов.....	64
8.4	Линейная зависимость. Базис.....	65
8.5	Евклидово пространство. Норма. Ортогональность.....	67
9	СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	70
9.1	Метод Гаусса и Жордана – Гаусса.....	70
9.2	Ранг матрицы и его вычисление.....	72
9.3	Теорема Кронекера – Капелли.....	75
9.4	Теорема о сумме решений однородной системы.....	78
9.5	Понятие укороченной системы, свободные и базисные неизвестные, общее решение однородной системы.....	79
9.6	Теорема о линейно независимых решениях однородной системы.....	82
9.7	Неоднородные системы линейных уравнений.....	85
10	ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ.....	89
10.1	Предел бесконечной числовой последовательности.....	89
10.2	Предел функции при $x \rightarrow a$	91
10.3	Предел функции при $x \rightarrow \infty$	93
10.4	Свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин.....	93
10.5	Свойства пределов.....	95
10.6	Два замечательных предела.....	97
10.7	Сравнение бесконечно малых функций.....	100
10.8	Эквивалентные бесконечно малые величины.....	102
10.9	Непрерывность функции.....	104
10.10	Точки разрыва непрерывности функции.....	105
11	ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	107
11.1	Понятие производной.....	107
11.2	Теорема о непрерывности дифференцируемой функции.....	108
11.3	Правила дифференцирования.....	109
11.4	Производные обратных тригонометрических функций.....	111
11.5	Таблица производных и примеры дифференцирования.....	113
11.6	Дифференцирование неявно заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование параметрически заданных функций.....	115
11.7	Производные высших порядков.....	117
11.8	Дифференциал функции и его свойства.....	118
11.9	Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей.....	120
11.10	Применение производной для исследования функций.....	122
11.11	Общий план исследования функции и построение графиков.....	125
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	128

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1 Определители 2 и 3 порядков, вычисление, свойства

Квадратная таблица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, составленная из четырёх элементов,

называется квадратной матрицей 2-го порядка. Определителем 2-го порядка, соответствующим матрице A , называется выражение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.1)$$

Аналогично, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица 3-го порядка, то соответствующим ей определителем 3-го порядка называется выражение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (1.2)$$

Например,

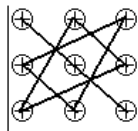
$$\text{а) } \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 17;$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 \cdot 2 = 11.$$

Числа $a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{33}$ называют элементами определителя; первая цифра индекса указывает номер строки, в которой стоит элемент, вторая цифра индекса указывает номер столбца. Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} составляют главную диагональ определителя; элементы a_{31}, a_{22}, a_{13} - вспомогательную диагональ.

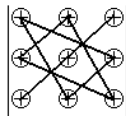
При вычислении определителя третьего порядка первые три слагаемые суммы снабжены знаком плюс и получены перемножением элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах треугольников, обозначенных на схеме 1.

Схема 1



Слагаемые определителя, снабженные знаком минус, вычисляются перемножением элементов, стоящих на вспомогательной диагонали и в вершинах треугольников со стороны, параллельной вспомогательной диагонали (схема 2).

Схема 2



Определитель третьего порядка можно вычислить, если дописать к нему справа два его первых столбца, а затем перемножить элементы и сложить со знаками плюс или минус, как показано на схеме 3.

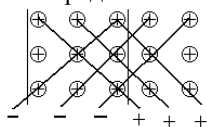


Схема 3

Свойства определителей (в справедливости указанных свойств определителей можно убедиться проверкой).

1. Определитель равен нулю, если:
 - а) строка или столбец состоят из нулей;
 - б) имеется два одинаковых ряда (две строки или два столбца);
 - в) элементы параллельных рядов пропорциональны.

Например, пусть задан определитель с двумя одинаковыми столбцами:

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0. \text{ Свойство справедливо.}$$

2. При умножении определителя на некоторое число k элементы одного ряда нужно умножить на это число: $k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$

$$= ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель не изменится, если:
 - а) параллельные ряды поменять местами чётное число раз;
 - б) строки сделать столбцами, а столбцы — строками (такая операция называется транспонированием определителя);
 - в) к элементам одного ряда прибавить элементы другого ряда, умноженные на одно и то же число. Последнее свойство широко применяется при преобразованиях определителей с целью «обнуления» его элементов.

Например, задан определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}$.

Умножим первую строку на (-2) и прибавим её ко второй строке. Затем умножим первую строку на (-3) и прибавим её к третьей строке. В результате:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4-4 & -2-2 & 5-6 \\ 6-6 & 3-3 & 7-9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

1.2 Правило Крамера

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

В левой части каждого уравнения стоит линейная комбинация неизвестных x, y , умноженных на коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 . В правой части уравнений – свободные члены c_1, c_2 . Такая система уравнений называется *линейной*.

Решим систему методом исключения неизвестных. Исключим неизвестную y , для чего умножим первое уравнение на b_2 , второе уравнение на $\begin{pmatrix} b_1 \end{pmatrix}$ и сложим уравнения. Получим $\begin{pmatrix} b_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}x = c_1b_2 - c_2b_1$. Затем исключим неизвестную x , для чего первое уравнение умножим на $\begin{pmatrix} a_2 \end{pmatrix}$, второе уравнение на a_1 и сложим уравнения. Получим $\begin{pmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}y = c_2a_1 - c_1a_2$. Выразим теперь неизвестные, используя понятие определителя второго порядка. Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$,

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (1.3)$$

Определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы уравнений*, определители

$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ называются вспомогательными.

Так мы получили правило Крамера для системы двух уравнений:

- 1) если определитель системы не равен нулю, система имеет единственное решение;
- 2) само решение системы определяется по формулам (1.3).

Правило Крамера позволяет решить систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Приведем формулы применительно к системе трёх уравнений с тремя неизвестными. Систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1.4)$$

где x_1, x_2, x_3 - неизвестные; $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ - коэффициенты, b_1, b_2, b_3 - свободные члены, можно решить по правилу Крамера, которое заключается в следующем:

- 1) система (1.4) имеет единственное решение, если определитель системы $\Delta \neq 0$;
- 2) само решение определяется по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (1.5)$$

Определитель Δ составляется из коэффициентов при неизвестных, вспомогательные определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ получаются из определителя Δ путём замены первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \quad (1.6)$$

Пример 1.1 Дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Доказать единственность её решения и найти это решение по формулам Крамера.

Решение

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -30,$$

$$\Delta = -30.$$

Так как $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение. Для нахождения этого решения по формулам Крамера вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -9 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -30, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 60, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -60.$$

Подставляя значения полученных определителей в формулы (1.5), получаем решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-30}{-30} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{60}{-30} = -2, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-60}{-30} = 2.$$

1.3 Минор, алгебраическое дополнение, разложение определителя по элементам ряда

Минором M_{ij} элемента a_{ij} данного определителя называется определитель, полученный из данного путём вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} . Здесь i - номер строки, j - номер столбца.

Например, для элемента a_{13} определителя Δ из (1.6) минор имеет вид:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$ в степени, равной сумме номеров строки и столбца:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (1.7)$$

Каждый определитель может быть вычислен как сумма произведений элементов какого-либо ряда на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}. \quad (1.8)$$

Здесь приведено вычисление определителя в двух вариантах: по элементам первой строки и по элементам второго столбца.

Формула (1.8) называется разложением определителя по элементам ряда.

Примечание – сумма произведений элементов одного ряда на алгебраические дополнения параллельного ряда всегда равна нулю. В этом легко убедиться на примере определителя второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Для него $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$.

Тогда $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} = a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21} = 0$.

2. ВЕКТОРЫ, ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ

2.1 Векторы, коллинеарность, компланарность, равенство векторов

Вектором называется направленный отрезок или упорядоченная пара точек. Обозначается $\vec{a}$, $\vec{b}$ или $\overline{AB}$.

Два вектора называются *коллинеарными*, если существует прямая линия, которой они параллельны.

Три вектора называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарные, одинаковой длины и направлены в одну сторону. Основываясь на этом определении, у вектора можно менять точку начала. Такие вектора называются *свободными*, перемещение векторов ничем не ограничено. При этом три компланарных вектора будут лежать в одной плоскости.

Иногда свобода перемещения вектора ограничивается. Например, вектор угловой скорости при вращательном движении, который располагается по оси вращения. Такой вектор называется *связанным*.

Длина вектора (модуль вектора) обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

2.2 Умножение вектора на число, сложение векторов

Умножение вектора на число и сложение векторов относятся к линейным операциям с векторами.

Умножение вектора на число

Результатом умножения вектора $\vec{a}$ на число k является вектор $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$. При этом векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарные и сонаправленные при $k > 0$ и направлены в разные стороны при $k < 0$. Длина полученного вектора $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$. Если $k = 0$, получается нулевой вектор (нуль-вектор $\vec{0}$), направление которого не определено. Если $k = -1$, то векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ называются противоположными.

Свойства операции умножения вектора на число:

- 1) для любых чисел $k, t \in R$ и вектора $\vec{a}$ справедливо равенство

$$k(\vec{a}) = (kt)\vec{a};$$

- 2) если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то для любого коллинеарного ему вектора $\vec{b}$ существует только одно число k , такое, что $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

Сложение векторов

Сложение двух векторов можно провести методом параллелограмма. При этом точки начала векторов совмещаются, на векторах достраивается параллелограмм. Диагональ параллелограмма – сумма векторов (рисунок 2.1).

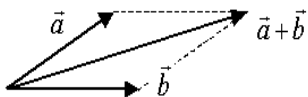


Рисунок 2.1 – Сумма векторов

При другом методе сложения двух векторов точка начала второго вектора помещается в конец первого вектора. Замыкающий вектор является суммой (рисунок 2.2а). При сложении нескольких векторов строится векторный многоугольник, в котором замыкающий вектор является суммой (рисунок 2.3).

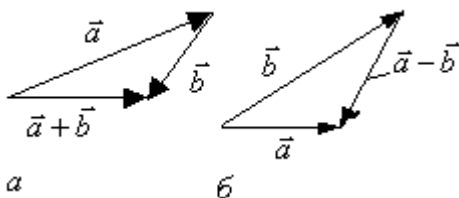


Рисунок 2.2 – Сложение (а) и вычитание (б) двух векторов

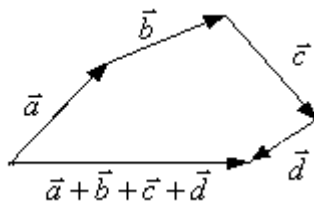


Рисунок 2.3 - Сложение нескольких векторов

Вычитание векторов

Вычесть какой-либо вектор – означает прибавить противоположный. Векторы называются противоположными, если они коллинеарные, равны по длине и направлены в разные стороны. Геометрически правило вычитания векторов показано на рисунке 2.2б.

Свойства операции сложения векторов:

- 1) операция обладает свойством коммутативности $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2) сложение векторов ассоциативно $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
- 3) сложение дистрибутивно по отношению к умножению на число

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b};$$

- 4) для любых чисел $k, t \in R$ и вектора $\vec{a}$ выполняется равенство

$$(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}.$$

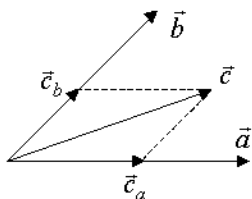
2.3 Разложение вектора по базису

Задача разложения вектора по заданным направлениям возможна и имеет единственное решение для векторов на плоскости и для векторов в пространстве.

Векторы на плоскости

Два неколлинеарных упорядоченных вектора на плоскости образуют базис. Они линейно независимы, то есть ни один из них не может быть выражен через другой вектор. Любой третий вектор на плоскости единственным образом может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса. Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}$ - неколлинеарные. Третий вектор на плоскости - $\vec{c}$. Совместим начала всех векторов в одной точке. Из конца вектора $\vec{c}$ проведем линии, параллельные направлениям векторов $\vec{a}, \vec{b}$.

В точках пересечения этих линий с векторами $\vec{a}, \vec{b}$ укажем концы вспомогательных векторов $\vec{c}_a, \vec{c}_b$. Вектор $\vec{c}$ - сумма вспомогательных векторов, так как он является диагональю параллелограмма: $\vec{c} = \vec{c}_a + \vec{c}_b$ (рисунок 2.4). Векторы $\vec{a}, \vec{c}_a$ - коллинеарные, следовательно, существует единственное число k , такое, что $\vec{c}_a = k \cdot \vec{a}$. Векторы $\vec{b}, \vec{c}_b$ -



коллинеарные, существует единственное число t , такое что $\vec{c}_b = t \cdot \vec{b}$. Из равенства $\vec{c} = \vec{c}_a + \vec{c}_b$ получим $\vec{c} = k\vec{a} + t\vec{b}$. Числа k, t называются координатами вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}$.

Рисунок 2.4 – Базис на плоскости

Векторы в пространстве

Базисом в пространстве называются три любых некопланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, взятых в определённом порядке.

Любой четвёртый вектор $\vec{a}$ можно представить единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 \quad (2.1)$$

где α, β, γ называются координатами вектора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Вектор базиса нельзя выразить через другие векторы базиса в виде линейной их комбинации. Говорят, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно независимы. Добавление любого четвёртого вектора $\vec{a}$ к базисным приводит к выполнению равенства (2.1); говорят, что система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{a}$ линейно зависима.

Частным случаем базиса в пространстве является тройка ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - векторов единичной длины, взаимно перпендикулярных друг другу. В пространстве орты, выходящие из одной точки, могут быть расположены относительно друг друга только двумя способами. На рисунке 2.5 показаны эти два возможных случая – правая (а) и левая (б) тройки ортов.

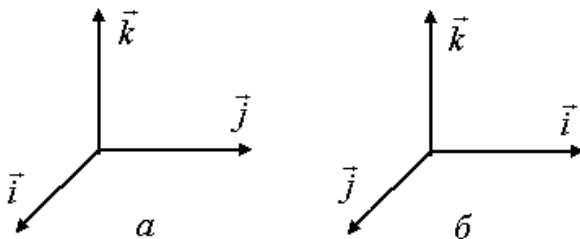


Рисунок 2.5 – Правая (а) и левая (б) система ортов

Совокупность правой тройки ортов и выбранной точки O , из которой выходят орты – основа прямоугольных декартовых координат с осями Ox (ось абсцисс), Oy (ось ординат), Oz (ось аппликат), (см. рисунок 2.6).

Каждый вектор можно спроектировать на оси координат. Разложение

вектора по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет вид:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Здесь a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\vec{a}$ на соответствующие оси координат (координаты вектора).

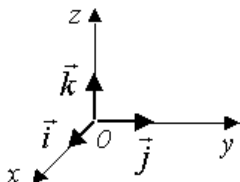


Рисунок 2.6 – Оси координат

Если вектор задаётся двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то проекции вектора $\vec{AB}$ определяются разностями координат конечной и начальной точек: $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$.

Длина вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$ и вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.2)$$

Если вектор задан своими координатами, то при умножении вектора на число каждая координата умножается на это число:

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot a_x \cdot \vec{i} + k \cdot a_y \cdot \vec{j} + k \cdot a_z \cdot \vec{k}. \quad (2.3)$$

При сложении двух векторов складываются их координаты:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}. \quad (2.4)$$

Из свойства 2 операции умножения вектора на число и из формулы (2.3) следует условие коллинеарности векторов. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если пропорциональны их координаты:

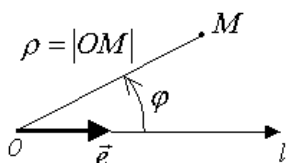
$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (2.5)$$

2.4 Системы координат на плоскости

Положение точки на плоскости можно задать, если на плоскости задана система координат.

Прямоугольная декартова система координат основана на базисе ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и выбранной точке 0, которая является началом координат. Это частный случай пространственной декартовой системы координат (см. рисунок 2.6).

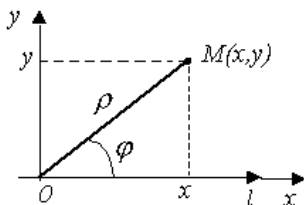
Полярная система координат определяет положение точки на плоскости двумя числами: *полярным расстоянием* и *полярным углом*. Началом полярных координат является выбранная точка 0, называемая *полюсом*. Из точки 0 выходит луч l , направление которому задаёт единичный вектор $\vec{e}$. Луч l вместе с введенным на нем направлением называют *полярной осью*. Положение точки M (рисунок 2.7) на плоскости полностью определяется полярным расстоянием $\rho = |OM|$ и углом φ между полярной осью и отрезком



OM , отсчитываемым против часовой стрелки. Обычно угол φ измеряется в радианах.

Рисунок 2.7 – Полярная система координат

Если на плоскости ввести систему декартовых координат, начало которой совпадает с полюсом, а положительная часть оси x совпадает с полярной осью, то декартовы координаты $\llcorner, y \rceil$ точки



M выражаются через полярные координаты $\llcorner, \varphi \rceil$ этой же точки по формулам (см. рисунок 2.8):

$$x = \rho \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi. \quad (2.6)$$

Рисунок 2.8- Пересчет координат

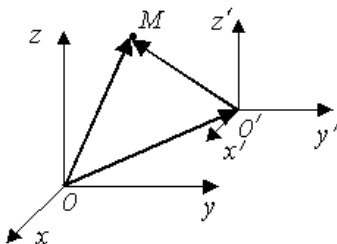
Тогда, если $0 \leq \varphi < 2\pi$, то

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2.7)$$

2.5 Преобразование декартовых координат при параллельном переносе и вращении

Преобразование при параллельном переносе

Пусть в системе декартовых координат $Oxyz$ выбрано начало новых декартовых координат $O'x'y'z'$ в точке $\llcorner_0, y_0, z_0 \rceil$. Орты новой системы



$\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ коллинеарны ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ системы $Oxyz$. Тогда можно сказать, что система декартовых координат $O'x'y'z'$ получена параллельным переносом из декартовой системы $Oxyz$.

Рисунок 2.9 – Параллельный перенос координат

Пусть точка M - произвольная точка, имеющая координаты $\llcorner, y, z \rceil$ в системе координат $Oxyz$ и $\llcorner, y', z' \rceil$ в системе координат $O'x'y'z'$. Согласно рисунку 2.9 $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$, $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{OO'} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, $\vec{O'M} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$. При сложении векторов суммируются одноименные координаты, следовательно,

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0. \quad (2.8)$$

Формулы (2.8) связывают между собой декартовы координаты произвольной точки M в системах координат, полученных друг из друга параллельным переносом.

Преобразование декартовых координат на плоскости при повороте осей координат

Пусть Oxy и $Ox'y'$ - две системы декартовых координат на плоскости с общим началом O . Система координат $Ox'y'$ повернута против часовой стрелки на угол α относительно системы Oxy . Введем на плоскости две полярные системы координат с полюсом в точке O , полярные оси которых совпадают с положительными полуосьми x и x' .

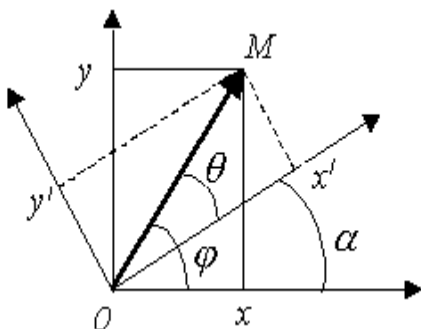


Рисунок 2.10 – Поворот координат

Пусть M - произвольная точка плоскости. Обозначим координаты точки в каждой системе координат:

Oxy : $M(x, y)$; первая полярная система $M(\rho, \varphi)$;

тогда $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$;

$Ox'y'$: $M(x', y')$; вторая полярная система $M(\rho, \theta)$;

тогда $x' = \rho \cos \theta$, $y' = \rho \sin \theta$.

В зависимости от величины угла α справедливо соотношение $\varphi + 2k\pi = \alpha + \theta$, где $k=0$ или $k=1$.

Используем полученные зависимости:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi = \rho \cos (\theta + \alpha) = \rho \cos \theta \cos \alpha - \rho \sin \theta \sin \alpha = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \\ y &= \rho \sin \varphi = \rho \sin (\theta + \alpha) = \rho \sin \theta \cos \alpha + \rho \cos \theta \sin \alpha = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

Получили формулы преобразования декартовых координат при повороте вокруг начала:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \quad (2.9)$$

3. ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

3.1 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}). \quad (3.1)$$

Свойства скалярного произведения

1. При перестановке сомножителей произведение не изменится: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Это объясняется тем, что при перестановке скалярных множителей произведение не меняется $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}|$, а также тем, что косинус – функция чётная: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{b}, \vec{a})$.

2. Скалярный множитель (число m) можно вынести за знак произведения:

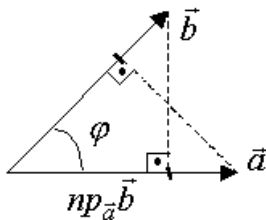
$$(m \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = m (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Это свойство – следствие свойства операции умножения вектора на число.

3. Скалярное произведение равно нулю, если хотя бы один из векторов нулевой или векторы перпендикулярны (так как $\cos 90^\circ = \cos 270^\circ = 0$).

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ (следует из того, что $\cos 0 = 1$).

5. Скалярное произведение векторов равно произведению длины одного из перемножаемых векторов на проекцию другого вектора на направление первого:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Здесь $np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$, $np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$ (см. рисунок 3.1).

Рисунок 3.1 – Свойство 5 скалярного произведения

6. Скалярное произведение обладает распределительным свойством:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. В силу свойств 2, 3, 4, 6 произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ можно вычислить как произведение многочлена на многочлен. Учитываем, что $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$. Тогда:

Скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \quad (3.2)$$

Из свойства 3 и формулы (3.2) следует условие перпендикулярности двух векторов:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (3.3)$$

Из формулы (3.1) следует формула для определения угла между векторами (с учетом формул (3.2) и (2.2)):

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (3.4)$$

Физическое приложение скалярного произведения. Если материальная точка, на которую действует сила $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$ движется по вектору $\vec{AB} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, то работа A силы $\vec{F}$ по перемещению точки по направленному отрезку $\vec{AB}$ равна скалярному произведению

$$A = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F_x \cdot a_x + F_y \cdot a_y + F_z \cdot a_z. \quad (3.5)$$

Пример 3.1 Вычислить работу силы $\vec{F} \llbracket 3, 5 \rrbracket$ при перемещении материальной точки из положения $A(-2, 0, -3)$ в положение $B(1, 4, -2)$. (Предполагаются согласованные единицы силы и перемещения).

Решение

Найдём координаты вектора $\vec{AB}$ как разность координат точки конца вектора и точки начала:

$$\vec{AB} = \llbracket -(-2) \rrbracket + \llbracket -0 \rrbracket + \llbracket 2 - (-3) \rrbracket, \quad \vec{AB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}.$$

Работу вычисляем по формуле (3.5): $A = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 23$.

Ответ: $A=23$ (единиц работы).

3.2 Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, обладающий следующими свойствами:

- 1) длина вектора равна $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$; (3.6)
- 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ (следовательно, перпендикулярен плоскости этих векторов);
- 3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая.

Три некопланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ составляют правую тройку, если поворот первого вектора $\vec{a}$ до совмещения со вторым вектором $\vec{b}$ по кратчайшему пути виден из конца третьего вектора $\vec{c}$ происходящим против часовой стрелки. Если кратчайший поворот виден происходящим по часовой стрелке, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ составляют левую тройку. К примеру, на рисунке 2.6 векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ составляют правую тройку векторов.

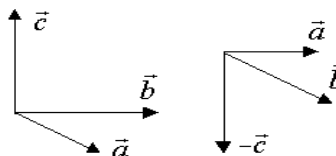
Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей знак векторного произведения меняется на противоположный. Допустим, поменяем сомножители $\vec{a}$ и $\vec{b}$ местами. Чтобы тройка векторов $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ составляла правую тройку, необходимо изменить направление вектора $\vec{c}$ на противоположное (рисунок 3.2).

2. Скалярный множитель выносится за знак векторного произведения:

$$k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times k\vec{b}.$$

3. Векторное произведение равно нулевому вектору, если один из векторов нулевой или векторы коллинеарные. Угол между коллинеарными векторами равен 0 или π , $\sin 0 = \sin \pi = 0$.



Если перемножать векторы, заданные своими координатами $\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$, то с учетом свойств

Рисунок 3.2 – Свойство 1

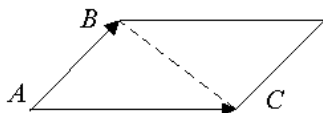
векторного произведения, в частности того, что $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, и т.д. можно убедиться, что векторное произведение вычисляется по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

Из формулы (3.6) следует, что модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах, как на сторонах (рисунок 3.3):

$$S_{\text{параллелограмма}} = |\vec{AB} \times \vec{AC}|. \quad (3.8)$$

Площадь треугольника $\triangle ABC$, построенного на этих векторах, равна половине площади параллелограмма:



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|. \quad (3.9)$$

Рисунок 3.3 – Площадь параллелограмма

Пример 3.2 Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(2,2,2)$, $B(4,0,3)$, $C(0,1,0)$.

Решение

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, равна половине модуля их векторного произведения

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Находим векторы $\vec{AB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{AC} = -2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

Находим векторное произведение по формуле (3.7):

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Модуль вектора определяем по формуле (2.2):

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{65}.$$

Ответ: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{65}$ (кв. ед.).

3.3 Смешанное произведение трёх векторов

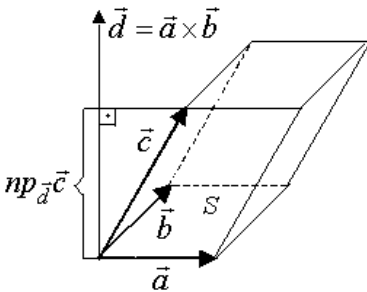
Смешанным произведением трёх векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется произведение вида $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$, где два первых вектора перемножаются по векторному произведению, а их произведение умножается скалярно на третий вектор.

Результат смешанного произведения – число.

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ составляют правую тройку векторов. Обозначим $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$. Вектор $\vec{d}$ расположен перпендикулярно плоскости векторов $\vec{a}, \vec{b}$ (см. рисунок 3.4). Скалярное произведение $\vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c}$. Построим на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ параллелепипед.

Его объём $V = h \cdot S_{\text{осн}}$, где h – высота, $S_{\text{осн}}$ – площадь основания. Из рисунка 3.4 видно, что $h = \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c}$, $S_{\text{осн}} = |\vec{d}|$. Следовательно, смешанное

произведение трёх векторов численно равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах, как на ребрах из одной вершины (если векторы составляют правую тройку): $V_{\vec{a}\vec{b}\vec{c}} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$. Если же векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$



составляют левую тройку (при этом вектор $\vec{c}$ меняет направление на противоположное), то $V_{\vec{a}\vec{b}\vec{c}} = -\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$. В этом состоит геометрический смысл смешанного произведения трёх векторов.

Рисунок 3.4 – Геометрический смысл смешанного произведения

Свойства смешанного произведения

1. При круговой перестановке сомножителей произведение не изменяется: $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a} \cdot \vec{b}$. При такой перестановке вначале плоскостью основания становится плоскость векторов $\vec{b}, \vec{c}$, затем плоскостью основания становится плоскость векторов $\vec{c}, \vec{a}$. Так как взаимная ориентация векторов не изменяется, то не изменяется объём параллелепипеда.
2. Смешанное произведение не изменится, если поменять местами знаки векторного и скалярного произведений: $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$. Действительно, скалярное произведение векторов не меняется от перемены мест сомножителей. Из свойства 1 $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} \times \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$.

Это позволяет записывать смешанное произведение векторов вообще без знаков умножения: $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \vec{c}$. В дальнейшем смешанное произведение трёх векторов будет записываться без знаков умножения.

3. При перестановке двух сомножителей знак произведения меняется на противоположный. Это следует из свойства векторного произведения.
4. Смешанное произведение равно нулю, если:
 - а) один из векторов нулевой (нулевая сторона параллелепипеда);
 - б) два вектора коллинеарные (площадь параллелограмма равна нулю);
 - в) три вектора компланарные (высота параллелепипеда равна нулю).

Выведем формулу вычисления смешанного произведения.

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \left(c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \right) = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Поменяем в последнем определителе строки и окончательно получим:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Из геометрического смысла смешанного произведения следует, что его модуль равен объёму V параллелепипеда, построенного на векторах, как на рёбрах

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \quad (3.11)$$

При этом, если тройка векторов правая, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, если тройка векторов левая, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$.

Если на тех же векторах строить не параллелепипед, а треугольную пирамиду – тетраэдр, то его объём V_T вычисляется по формуле

$$V_T = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \quad (3.12)$$

На свойстве 4 смешанного произведения и формуле (3.10) основано *условие компланарности трёх векторов*:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (3.13)$$

Пример 3.3 Вычислить объём треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$, $D(3,7,2)$.

Решение

Найдём векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, совпадающие с рёбрами пирамиды и выходящие из точки A . $\vec{AB} = \langle 2, 3, 4 \rangle$, $\vec{AC} = \langle 6, 2, 2 \rangle$, $\vec{AD} = \langle 3, 7, 1 \rangle$.

В скобках записаны координаты векторов. Обозначим $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, $\vec{AD} = \vec{c}$. Применяем формулу (3.10), затем (3.12).

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 120. \quad V_T = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20 \text{ (куб. ед.)}$$

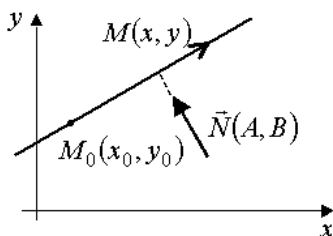
4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

4.1 Уравнения прямой линии на плоскости

Уравнения прямой линии на плоскости можно получить как из условия перпендикулярности векторов, так и из условия коллинеарности векторов.

Общее уравнение прямой линии и его следствия

Положение прямой на плоскости однозначно определяет точка $M_0(x_0, y_0)$,



принадлежащая прямой линии и вектор $\vec{N}(A, B)$, перпендикулярный прямой (см. рисунок 4.1). Векторы $\vec{N}(A, B)$ и $\vec{M_0M}$ перпендикулярны (точка $M(x, y)$ – переменная точка прямой). Запишем условие перпендикулярности векторов, которое выражается в равенстве нулю их скалярного произведения:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (4.1)$$

Рисунок 4.1 – Прямая на плоскости

Полученное уравнение (4.1) называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору*. Если в этом уравнении раскрыть скобки и постоянное слагаемое обозначить $C = -Ax_0 - By_0$, то получим уравнение

$$Ax + By + C = 0, \quad (4.2)$$

которое называется *общим уравнением прямой на плоскости*. Важно, что в общем уравнении прямой коэффициенты при переменных x, y являются координатами нормального (перпендикулярного прямой) вектора. Например, если задано уравнение прямой $4x - 3y + 7 = 0$, то ей перпендикулярен вектор $\vec{N}(4, -3)$.

Если в общем уравнении прямой выразить y через x , то получим уравнение вида $A \neq 0; k = -A/B; b = -C/B$

$$y = kx + b, \quad (4.3)$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. В этом уравнении угловой коэффициент k равен тангенсу угла, который составляет прямая с положительным направлением оси Ox : $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Если в общем уравнении прямой $B=0$, $A \neq 0$, то получим уравнение прямой, проходящей перпендикулярно оси Ox (обозначим $a = -C/A$):

$$x = a. \quad (4.4)$$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $\langle x_0, y_0 \rangle$ с угловым коэффициентом:

$$y = y_0 + k(x - x_0). \quad (4.5)$$

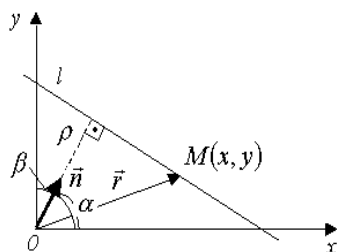
Уравнение прямой в отрезках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (4.6)$$

Здесь a, b -- отрезки, отсечённые прямой на осях Ox , Oy .

Нормальное уравнение прямой линии на плоскости

Положение прямой на плоскости однозначно определяет вектор нормали к прямой линии и расстояние от начала координат до прямой линии. Пусть радиус-вектор $\vec{n}$, длина которого равна единице, $|\vec{n}|=1$, образует с осями



координат углы, равные α, β (см. рисунок 4.2). Прямая линия l перпендикулярна единичному вектору $\vec{n}$ и расположена на расстоянии ρ от начала координат. Пусть точка $M(x, y)$ с переменными координатами лежит на прямой линии. Проведем в эту точку радиус-вектор $\vec{r}$.

Рисунок 4.2- Нормальное уравнение прямой

Его координаты совпадают с координатами точки $M(x, y)$, так как начало вектора лежит в начале координат, $\vec{r}(x, y)$. Координаты вектора $\vec{n}$ определяются по формулам $n_x = |\vec{n}| \cos \alpha$, $n_y = |\vec{n}| \sin \alpha = |\vec{n}| \cos \beta$. Найдём скалярное произведение векторов $\vec{n} \cdot \vec{r} = |\vec{n}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos \theta$. Но из рисунка видно, что $|\vec{r}| \cos \theta = \rho$ для любой точки, принадлежащей прямой линии. Следовательно, $\vec{n} \cdot \vec{r} = \rho$, или $\vec{n} \cdot \vec{r} - \rho = 0$. Запишем скалярное произведение суммой произведений одноименных координат, тогда получим уравнение

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta - \rho = 0. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) называется *нормальным уравнением прямой на плоскости*.

Общее уравнение прямой (4.2) и нормальное уравнение (4.7) одинаковы в том, что коэффициенты при переменных x, y в обоих уравнениях – координаты перпендикулярных им векторов. Разница в том, что в общем уравнении (4.2) длина вектора нормали – произвольная, равная $\sqrt{A^2 + B^2}$, а в нормальном уравнении длина вектора – единичная. Поэтому легко перейти от общего уравнения к нормальному, если сделать длину вектора $\vec{n}(A, B)$ равной единице. Для этого достаточно разделить общее уравнение на длину вектора $\vec{n}(A, B)$. При этом нужно учесть, что в уравнении (4.7) $\rho > 0$ (расстояние – величина положительная).

Для перевода общего уравнения в нормальное его нужно умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \frac{-\operatorname{sgn} C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (4.8)$$

где $\operatorname{sgn} C$ – функция знака; её значения: $\operatorname{sgn} C = 1$, если $C > 0$, $\operatorname{sgn} C = -1$, если $C < 0$, $\operatorname{sgn} C = 0$, если $C = 0$.

Пример 4.1 Найти расстояние от начало координат до прямой

$$\text{а) } x - 3y + 6 = 0, \quad \text{б) } 3x - 4y - 5 = 0.$$

Решение

а) Нормирующий множитель $\mu = \frac{-\operatorname{sgn} C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-\operatorname{sgn} 6}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$. Тогда

$$(x - 3y + 6 = 0) \cdot \frac{-1}{\sqrt{10}}. \text{ Получим нормальное уравнение: } \frac{-x}{\sqrt{10}} + \frac{3y}{\sqrt{10}} - \frac{6}{\sqrt{10}} = 0.$$

Расстояние прямой от начало координат $\rho = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

б) Нормирующий множитель $\mu = \frac{-\operatorname{sgn} C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-\operatorname{sgn} (-5)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5}$. Умножим общее

уравнение на множитель: $(3x - 4y - 5 = 0) \cdot \frac{1}{5}$. Получим нормальное уравнение

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0. \text{ Расстояние прямой от начала координат } \rho = 1.$$

Каноническое уравнение прямой

Положение прямой на плоскости однозначно определяет точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащая прямой линии и вектор $\vec{S}(l, m)$, параллельный прямой.

Вектор $\vec{S}(n, m)$ называется направляющим вектором (см. рисунок 4.3).
Запишем условие коллинеарности векторов $M_0\vec{M}$ и $\vec{S}(n, m)$.

Условие коллинеарности векторов заключается в том, что их одноименные координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) называется каноническим.

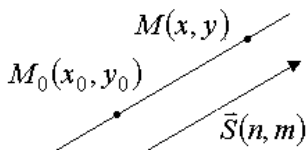


Рисунок 4.3 – Прямая на плоскости

Если в качестве направляющего вектора выбрать две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, принадлежащие прямой, то из (4.9) получим *уравнение прямой, проходящей через две точки*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (4.10)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости

Пусть заданы две прямые линии на плоскости уравнениями

$$\begin{aligned} y &= k_1x + b_1 & \text{или} & & A_1x + B_1y + C_1 &= 0; \\ y &= k_2x + b_2 & \text{или} & & A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Условия параллельности прямых:

$$k_1 = k_2 \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (4.11)$$

Условия перпендикулярности прямых:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad \text{или} \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \quad (4.12)$$

Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (4.13)$$

Пример 4.2 Задана прямая L уравнением $-2x + y - 1 = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$. Требуется:

- вычислить расстояние от точки до прямой;
- написать уравнение прямой L_1 , проходящей через точку M_0 перпендикулярно прямой L ;
- написать уравнение прямой L_2 , проходящей через точку M_0 параллельно прямой L .

Решение

а) Расстояние от точки M_0 до L найдём по формуле (4.13):

$$\rho = \frac{|-2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

б) Приведём заданное общее уравнение прямой к виду (4.3):

$$y = 2x + 1.$$

Угловой коэффициент $k=2$. Так как прямая L_1 перпендикулярна L , то по условию (4.12) её угловой коэффициент $k = -\frac{1}{2}$.

Используя уравнение (4.5) и координаты заданной точки, получаем уравнение L_1 :

$$y = 2 - \frac{1}{2}x - 1$$

Преобразуя, получаем:

$$L_1: x + 2y - 3 = 0.$$

в) Так как прямые L_2 и L параллельны, то используем условие (4.11). Можно воспользоваться уравнением (4.1) или (4.5). Принимая $A_2 = A$, $B_2 = B$, получаем:

$$-2(-1) - (-1) - (-2) = 0, \quad L_2: -2x + y - 4 = 0.$$

4.2 Кривые второго порядка

Эллипс, гипербола и парабола относятся к кривым второго порядка, расположенным на плоскости xOy . Общее уравнение алгебраической кривой второго порядка имеет вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

где x, y - переменные, A, B, C, D, E, F - коэффициенты. В зависимости от величины и знака коэффициентов общее уравнение описывает или один из трёх типов кривых, которые рассмотрим ниже, или пару прямых на плоскости или уравнение не имеет графического образа.

Канонические (наиболее простые) уравнения кривых соответствуют определённому положению их относительно осей координат.

Эллипс

Эллипсом называют совокупность всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух выбранных точек плоскости, называемых фокусами – величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

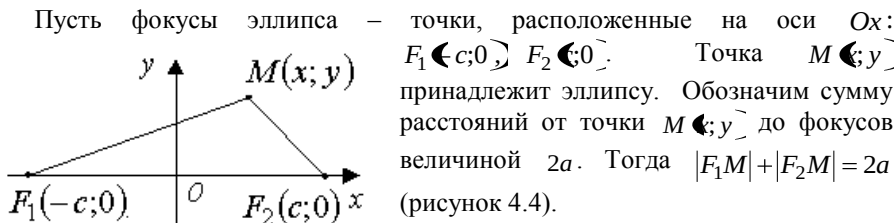


Рисунок 4.4 – К определению эллипса

Используя формулу для расстояния между точками, запишем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \text{ Далее:}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \text{ возводим в квадрат:}$$

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx, \quad a^2\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \\ x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Величина $a^2 - c^2 > 0$, обозначим $a^2 - c^2 = b^2$. Тогда $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ разделим на a^2b^2 . Получим уравнение, которое называется *каноническим уравнением эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.14)$$

Анализируя уравнение (4.14), изучим свойства эллипса:

- 1) так как $\left| \frac{x^2}{a^2} \right| \leq 1$, $\left| \frac{y^2}{b^2} \right| \leq 1$, то $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ (кривая лежит внутри прямоугольника);
- 2) оси координат служат осями симметрии эллипса, так как переменные x, y входят в уравнение (4.14) во второй степени.

Таким образом, чтобы построить кривую, достаточно построить её в 1-й четверти, а затем отобразить относительно осей координат. Эллипс показан на рисунке 4.5.

Точки $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $C(0, -b)$, $D(0, b)$ называются вершинами эллипса, т. O – центр эллипса. Ось $AB = 2a$ называется большой осью эллипса, ось $CD = 2b$ называется малой осью эллипса.

Отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (4.15)$$

называется *эксцентриситетом*. Эксцентриситет - величина безразмерная, $0 < \varepsilon < 1$, характеризует форму эллипса.

В предельном случае, если $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow a = b$, получим уравнение окружности: $x^2 + y^2 = a^2$. Наоборот, если $\varepsilon \rightarrow 1 \Leftrightarrow b \rightarrow 0$, то эллипс вырождается в отрезок. Зависимость формы эллипса от величины эксцентриситета при неизменной большой оси показана на рисунке 4.6.

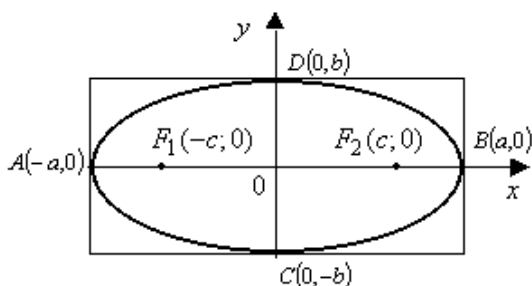
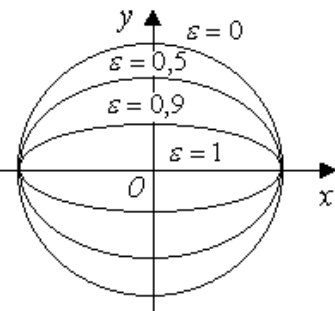


Рисунок 4.5 – Эллипс

Рисунок 4.6 – Зависимость формы эллипса от ε

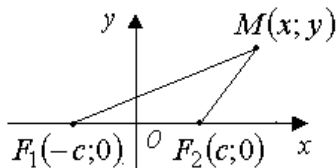
Если параллельным переносом эллипс передвинут так, что его центр лежит в точке с координатами (x_0, y_0) , то уравнение эллипса со смещенным центром имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (4.16)$$

Гипербола

Гиперболой называется совокупность всех точек плоскости, разность расстояний каждой из которой до двух выбранных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

Пусть фокусы гиперболы – точки, расположенные на оси Ox : $F_1(x_1; 0)$, $F_2(x_2; 0)$ (рисунок 4.7). Точка



$M(x; y)$ принадлежит гиперболе. Обозначим разность расстояний от точки $M(x; y)$ до фокусов величиной $2a$ (точка $M(x; y)$ может лежать и левее фокуса F_1).

Тогда $|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a$.

Рисунок 4.7 – Фокусы гиперболы

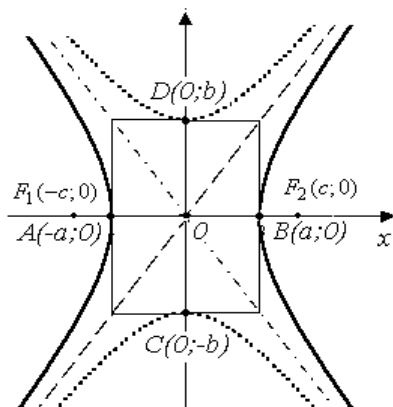
Используя формулу для расстояния между точками, запишем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Далее проводим такие же преобразования, как для эллипса. Величина $c^2 - a^2 > 0$, обозначим $b^2 = c^2 - a^2$. Получим уравнение, которое называется *каноническим уравнением гиперболы*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.17)$$

Гипербола симметрична относительно осей координат и лежит вне прямоугольника $|x| < a$; $|y| < b$ внутри двух углов, образованных его диагоналями (рисунок 4.8). Точки $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$ называются вершинами гиперболы, отрезок OB -- действительная полуось, OD -- мнимая полуось.



Если из уравнения (4.17) выразить $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, видно, что при $x \rightarrow \infty$ величиной a можно пренебречь. Гипербола бесконечно близко приближается к прямым, уравнения которых $y = \pm \frac{b}{a} x$. Эти прямые, проходящие по диагоналям осевого прямоугольника, называются *асимптотами гиперболы*.

В том же осевом прямоугольнике можно построить гиперболу, вершины которой - $C(0, -b)$, $D(0, b)$.

Рисунок 4.8 - Гипербола и сопряжённая гипербола

Такую гиперболу называют *сопряжённой* гиперболе (4.17). На рисунке 4.8 точечной линией показана сопряжённая гипербола, уравнение которой:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \quad (4.18)$$

Если гипербола смещена параллельным переносом так, что центр осевого прямоугольника гиперболы лежит в точке с координатами (x_0, y_0) , то уравнение кривой преобразуется к виду:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (4.19)$$

Отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (4.20)$$

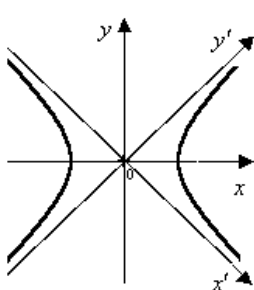
называется *эксцентриситетом гиперболы*. Величина эксцентриситета $\varepsilon > 1$.

Гипербола называется *равнобочной*, если $a = b$. В этом случае асимптоты гиперболы перпендикулярны между собой, как диагонали квадрата. Если повернуть оси координат на угол -45° , то новые оси координат совпадут с асимптотами равнобочной гиперболы (рисунок 4.9). Воспользуемся формулами (2.9) перехода к новым координатам при повороте осей:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

У нас $\alpha = -45^\circ$, $\cos(-45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin(-45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}$.

Подставим значения x, y в уравнение равнобочной гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$:



$$\frac{(x' + y')^2}{2a^2} - \frac{(-x' + y')^2}{2a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x'y'}{a^2} = 1.$$

Последнее

уравнение перепишем в виде $y' = \frac{a^2}{2x'}$. Это

уравнение гиперболы рассматривается в школьном курсе математики.

Рисунок 4.9 – Поворот осей для равнобочной гиперболы

Парабола

Параболой называют совокупность точек плоскости, расстояния каждой из которых до выбранной точки, называемой фокусом, и до прямой, называемой директрисой, равны.

Пусть фокус параболы – точка $F(0; 2/p)$, директриса параболы имеет уравнение $x = -p/2$ (рисунок 4.10). Точка $M(x; y)$ – точка параболы. Тогда,

согласно определению, $|\vec{BM}| = |\vec{FM}|$, или $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$. Возведём

последнее уравнение в квадрат: $x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$.

Окончательно, каноническое уравнение параболы имеет вид (p – параметр параболы):

$$y^2 = 2px. \quad (4.21)$$

Форма кривой зависит от знака и абсолютной величины параметра p (см. рисунок 4.11).

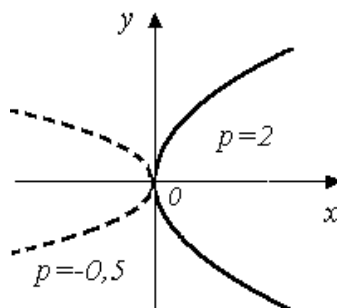
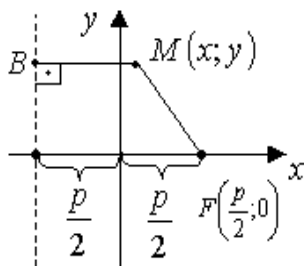


Рисунок 4.10 – К определению параболы Рисунок 4.11 – Парабола $y^2 = 2px$

Если фокус параболы располагается на оси Oy , директриса перпендикулярна оси Oy (рисунок 4.12), то каноническое уравнение параболы

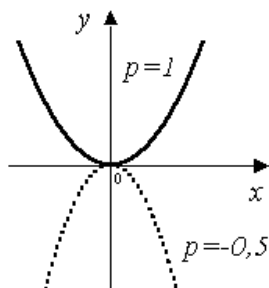
$$x^2 = 2py. \quad (4.22)$$

Начало координат является вершиной парабол. Если параметр $p > 0$, ветви парабол направлены в сторону положительного направления оси, если $p < 0$ - в обратную сторону (рисунки 4.11, 4.12).

Если при параллельном перемещении параболы вершина параболы перемещена в точку с координатами (x_0, y_0) , то уравнение параболы имеет вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), \quad (4.23)$$

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \quad (4.24)$$



Если раскрыть скобки в уравнении (4.24) и

обозначить $A = \frac{1}{2p}$, $B = -\frac{x_0}{p}$, $C = \frac{x_0^2}{2p}$, то

получим уравнение квадратичной функции $y = Ax^2 + Bx + C$, изучаемой в курсе средней школы.

Рисунок 4.12 - Парабола $x^2 = 2py$

Зеркальное свойство параболы

Закон зеркального отражения в оптике гласит: угол падения равен углу отражения. Если луч отражается от кривой линии, то отражение происходит по тому же закону, как отражение от касательной в той же точке.

В каждой точке параболы фокальный радиус-вектор и луч, параллельный оси параболы образуют равные углы с касательной к кривой. Отсюда следует, что *лучи, исходящие из фокуса, зеркально отражаясь от параболы, распространяются параллельно оси параболы* (рисунок 4.13). Это свойство параболы широко используется в технике при изготовлении отражателей света (фары). Обратно, если на параболу падают лучи, идущие параллельно оси параболы, то они, отражаясь от параболы, собираются в её фокусе (свойство используется при изготовлении телескопов).

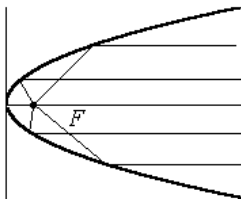


Рисунок 4.13 – Зеркальное свойство параболы

Пример 4.3 Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и определить тип кривой

$$2y^2 - 12y - x + 14 = 0.$$

Решение. Выделим полный квадрат относительно переменной y :

$$2(y^2 - 6y + 9 - 9) - x + 14 = 0, \quad 2(y^2 - 6y + 9) - x + 14 - 18 = 0,$$

$$2(y - 3)^2 = x + 4, \quad (y - 3)^2 = \frac{1}{2}(x + 4).$$

Ответ: парабола типа (4.23) с вершиной в точке $(-4, 3)$, параметр $p = 1/4$.

5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.1 Уравнения плоскости в пространстве

В пространстве с заданной декартовой системой координат однозначное расположение плоскости можно задать различными способами, существуют различные уравнения плоскости в пространстве.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой. Тогда через них можно провести плоскость, причем только одну. Пусть в этой же плоскости лежит точка $M(x, y, z)$ с текущими координатами. Тогда три вектора $\vec{AM}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ лежат в одной плоскости, следовательно, они компланарные.

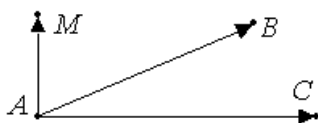


Рисунок 5.1 – Три компланарные вектора

Условие компланарности трёх векторов заключается в том, что их смешанное произведение равно нулю: $\vec{AM} \vec{AB} \vec{AC} = 0$. Вычисляя смешанное произведение как определитель (формула 3.13), получим:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.1)$$

Это и есть уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Пример 5.1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 0, 1)$, $B(-2, 5, 3)$, $C(1, -3, 6)$.

Решение

Считая точку A - первой, точку B - второй, точку C - третьей точкой, подставим координаты точек в уравнение (5.1).

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 3-1 & -2-2 & 5 \\ -1 & -3-2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & -5 & 6 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & -5 & 6 \end{vmatrix} + z \cdot (-14) = 0, \quad x - 17y - 14z + 33 = 0.$$

После вычисления определителя получили уравнение плоскости, линейное относительно переменных x, y, z .

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{N}(A, B, C)$

Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Пусть точка $M(x, y, z)$ лежит в плоскости.

Прямая линия M_0M и вектор $\vec{N}$ перпендикулярны друг другу. Тогда и $\vec{M_0M} \perp \vec{N}$. Запишем условие перпендикулярности векторов $\vec{M_0M} \perp \vec{N}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (5.2)$$

Общее уравнение плоскости

Если в уравнении (5.2) раскрыть скобки и обозначить свободный член через D , получим *общее уравнение плоскости*:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (5.3)$$

Таким образом, в примере 5.1 после преобразований получено общее уравнение плоскости.

Если в общем уравнении (5.3) один из коэффициентов A, B, C равен нулю, то плоскость проходит параллельно соответствующей оси. Если два коэффициента из A, B, C равны нулю, плоскость параллельна одной из координатной плоскости. Например, плоскость $4x - 5z - 1 = 0$ проходит параллельно оси Oy , плоскость $y + 3 = 0$ проходит параллельно координатной плоскости xOz через точку $y = -3$ на оси Oy . Коэффициенты A, B, C в общем уравнении являются одновременно координатами вектора, перпендикулярного плоскости.

Разделив уравнение (5.3) на $(-D)$, получим *уравнение плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (5.4)$$

Здесь a, b, c - отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

Например, плоскость $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{1} = 1$ пересекает оси координат в точках $x = 2, y = -3, z = 1$.

Нормальное уравнение плоскости

Вполне определенное положение плоскости в пространстве можно задать нормальным вектором (перпендикулярным плоскости) и расстоянием от начала координат до плоскости. Пусть задан радиус-вектор единичной длины $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, где α, β, γ - углы между вектором $\vec{n}$ и

положительными полуосями координат. Задано также расстояние $OD = p$ от начала координат до плоскости (рисунок 5.2).

В произвольную точку плоскости $M(x, y, z)$ проведем радиус-вектор, координаты которого совпадают с координатами точки M (так как точка начала вектора имеет координаты $(0, 0, 0)$).

Для любой точки $M(x, y, z)$ $np_{\vec{n}} \vec{OM} = p$. Тогда скалярное произведение векторов

$$\vec{OM} \cdot \vec{n} = |\vec{n}| \cdot np_{\vec{n}} \vec{OM} = np_{\vec{n}} \vec{OM} = p \Leftrightarrow \vec{OM} \cdot \vec{n} = p.$$

Перепишем последнее уравнение в виде:

$$\vec{OM} \cdot \vec{n} - p = 0. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) – *векторное уравнение плоскости*. Запишем уравнение в координатной форме с учетом того, что $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

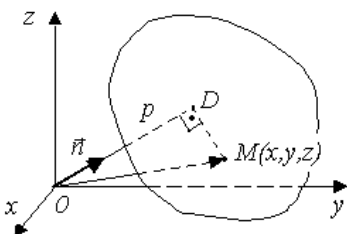


Рисунок 5.2 – Плоскость

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6) называется *нормальным уравнением плоскости*.

Общее уравнение плоскости (5.3) и нормальное уравнение плоскости (5.6) одинаковы в том, что это уравнения плоскости, проходящей перпендикулярно заданному вектору. Отличие уравнений в том, что в общем уравнении нормальный вектор $\vec{N}(A, B, C)$ имеет произвольную длину, равную $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, а в нормальном уравнении $|\vec{n}| = 1$. Поэтому несложно от общего уравнения плоскости перейти к нормальному, разделив общее уравнение на длину вектора $\vec{N}$. При этом нужно учесть, что в уравнении (5.6) перед положительной величиной p стоит знак «минус». С учетом этих замечаний имеем формулу нормирующего множителя (см. также формулу 4.8 и примечание к ней):

$$\mu = \frac{-\operatorname{sgn} p}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (5.7)$$

Умножив общее уравнение на нормирующий множитель (5.7), получим нормальное уравнение плоскости.

Пример 5.2. Определить расстояние от начала координат до плоскости $2x - 3y + 6z + 4 = 0$.

Решение

Задано общее уравнение плоскости. Расстояние от начала координат до плоскости можно определить, зная нормальное уравнение плоскости. Поэтому вычисляем нормирующий множитель по формуле (5.7):

$$\mu = \frac{-\operatorname{sgn} D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{-\operatorname{sgn} 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{-1}{\sqrt{49}} = -\frac{1}{7}.$$

Нормальное уравнение: $(2x - 3y + 6z + 4 = 0) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \Leftrightarrow -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{4}{7} = 0$.

Ответ: искомое расстояние равно $\rho = \frac{4}{7}$.

В приложениях используется формула для определения расстояния ρ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением (5.3):

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (5.8)$$

Условия перпендикулярности и параллельности двух плоскостей

Две плоскости перпендикулярны (параллельны) друг другу, если перпендикулярны (параллельны) их векторы нормали. Поэтому, если даны две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \quad (5.9)$$

условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (5.10)$$

Угол между плоскостями можно определить по формуле

$$\cos \alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (5.11)$$

5.2 Уравнения прямой линии в пространстве

Положение прямой линии в пространстве однозначно определяет точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит прямая и вектор $\vec{S}(m, n, p)$, параллельный прямой. Такой вектор называется *направляющим* вектором.

Создадим вектор $M_0\vec{M} \llbracket -x_0; y-y_0; z-z_0 \rrbracket$, где $M \llbracket x, y, z \rrbracket$ - принадлежащая прямой линии точка с переменными координатами. Векторы $\vec{S}$ и $M_0\vec{M}$ коллинеарные. Запишем условия коллинеарности векторов, которые выражаются в пропорциональности их соответствующих координат:

$$\frac{x-x_0}{n} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}. \quad (5.12)$$

Полученные уравнения называются *каноническими* уравнениями прямой в пространстве. В частном случае, когда прямая линия и направляющий вектор лежат в плоскости xOy , координата по оси Z отсутствует, получим каноническое уравнение прямой на плоскости (см. параграф 4.1):

$$\frac{x-x_0}{n} = \frac{y-y_0}{m}.$$

Если направляющий вектор задан двумя точками $M_1 \llbracket x_1, y_1, z_1 \rrbracket$ и $M_2 \llbracket x_2, y_2, z_2 \rrbracket$, через которые проходит прямая линия, то векторы $M_1\vec{M}_2$ и $M_1\vec{M}$ - коллинеарные. Из условия коллинеарности указанных векторов получим *уравнения прямой, проходящей через две точки*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (5.13)$$

Обозначим параметром t каждую дробь в уравнениях (5.12): $\frac{x-x_0}{n} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p} = t$. В каждом уравнении выразим переменную и получим *параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + nt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad t \in \llbracket -\infty; \infty \rrbracket; \quad (5.14)$$

Прямая в пространстве может быть также задана как линия пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Пример 5.3 Прямая в пространстве задана как линия пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0, \\ -2x + y - z + 6 = 0. \end{cases}$$

Определить канонические и параметрические уравнения прямой.

Решение

Для определения канонических и параметрических уравнений прямой вида (5.12) и (5.14) необходимо найти координаты одной точки, принадлежащей прямой и направляющий вектор.

Одну из координат искомой точки зададим произвольно, две другие координаты определим решением полученной системы алгебраических уравнений. Пусть $z = 0$, тогда
$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ -2x + y = -6. \end{cases}$$
 Решаем систему по правилу

Крамера. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = -7$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 4$.

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$. Таким образом, искомая прямая линия проходит через точку $M_0\left(\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right)$.

Определяем направляющий вектор, который проходит параллельно каждой из заданных плоскостей, и, следовательно, перпендикулярен нормальным векторам плоскостей $\vec{N}_1 \llcorner -2; 3 \rceil$ и $\vec{N}_2 \llcorner 2; 1; -1 \rceil$. Векторное произведение двух векторов перпендикулярно каждому из сомножителей, поэтому направляющий вектор $\vec{S} \llcorner m, p \rceil$ определяем по формуле:

$$\vec{S} \llcorner m, p \rceil = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Канонические уравнения прямой: $\frac{x - 7/3}{-1} = \frac{y + 4/3}{-5} = \frac{z}{-3}$.

Параметрические уравнения прямой:
$$\begin{cases} x = 7/3 - t, \\ y = -4/3 - 5t, \\ z = -3t, \end{cases} \quad t \in \llcorner -\infty; \infty \rceil.$$

Пример 5.4 Задано общее уравнение плоскости $7x - 2y - 4z + 10 = 0$ и точка $M_0(3, -5, 7)$. Записать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно плоскости.

Найти координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Решение. Нормальный вектор плоскости $\vec{N}(7; -2; -4)$ является направляющим для искомой прямой. Запишем канонические и параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x-3}{7} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-7}{-4}; \quad \begin{cases} x = 3+7t, \\ y = -5-2t, \\ z = 7-4t. \end{cases}$$

В точке пересечения прямой и плоскости координаты совпадают, поэтому в уравнение плоскости подставим координаты точки прямой, выраженные через параметр.

$$7(3+7t) - 2(-5-2t) - 4(7-4t) + 10 = 0, \quad t = -\frac{13}{69}. \quad \text{Вычисляем}$$

координаты точки пересечения: $x = 3 - 7 \cdot \frac{13}{69} = 1,681,$

$$y = -5 - 2 \left(-\frac{13}{69} \right) = -4,623, \quad z = 7 - 4 \cdot \left(-\frac{13}{69} \right) = 7,754.$$

Ответ: (1,681; -4,623; 7,754).

Условия перпендикулярности и параллельности двух прямых

Две прямые линии в пространстве, заданные каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{n_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{n_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

будут параллельны, если соответствующие направляющие векторы коллинеарные: $\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}.$

Две прямые перпендикулярны, если перпендикулярны направляющие векторы: $n_1 n_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2 = 0.$

Условия перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости

Пусть задана плоскость (р) $Ax + By + Cz + D = 0$, нормальный вектор

которой $\vec{N}(A, B, C)$, и прямая L в

пространстве $\frac{x-x_0}{n} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p},$

направляющий вектор которой $\vec{S}(n, m, p)$ (см. рисунок 5.3).

Обозначим $\angle \alpha$ - угол между прямой и вектором $\vec{N}$, $\angle \beta$ - угол между прямой и плоскостью.

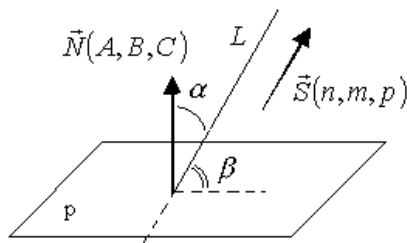


Рисунок 5.3 – Прямая и плоскость

Если прямая перпендикулярна плоскости, то векторы $\vec{N}$ и $\vec{S}$ коллинеарные:

$$\frac{A}{n} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p}.$$

Если прямая параллельна плоскости, то векторы $\vec{N}$ и $\vec{S}$ перпендикулярные:

$$A \cdot n + B \cdot m + C \cdot p = 0.$$

Угол β между прямой и плоскостью можно определить по формуле:

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{|An + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{n^2 + m^2 + p^2}}. \quad (5.16)$$

5.3 Поверхности в пространстве

Если не принимать во внимание исключений, то уравнение вида $f(x, y, z) = 0$ определяет в пространстве некоторую поверхность (одну или несколько). Например, уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ определяет плоскость (поверхность первого порядка). Кривую же в пространстве можно задать либо параметрически, уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, либо как линию пересечения двух поверхностей: $\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$

Будем рассматривать поверхности второго порядка, которые в декартовой системе координат задаются в общем случае уравнением

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Kx + Ly + Mz + N = 0,$$

причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C, D, E, F отличен от нуля.

Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью называют поверхность, которая образуется движением прямой («образующей»), перемещающейся в пространстве, сохраняя постоянное направление и пересекая некоторую неподвижную кривую («направляющую»).

В цилиндрических поверхностях образующая всегда проходит параллельно одной из координатных осей, направляющая при этом лежит в координатной плоскости, перпендикулярной образующей. Если уравнение направляющей $\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ то уравнение цилиндрической поверхности

$f(x, y) = 0$. Это объясняется тем, что проекция любой произвольной точки

цилиндрической поверхности $M(x, y, z)$ на плоскость xOy - точка $M'(x, y, 0)$, которая лежит на направляющей. Иначе говоря, координаты точки M удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$.

Таким образом, отсутствие в уравнении поверхности одной из координат говорит о том, что это цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси отсутствующей координаты.

Если в качестве направляющих выбраны кривые второго порядка, то цилиндрические поверхности:

$x^2 + y^2 = a^2$ - прямой круговой цилиндр;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллиптический цилиндр; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболический цилиндр;

цилиндр; $y^2 = 2px$ - параболический цилиндр.

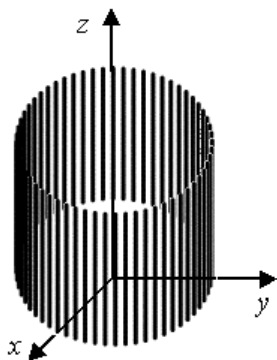


Рисунок 5.4 – Круговой цилиндр

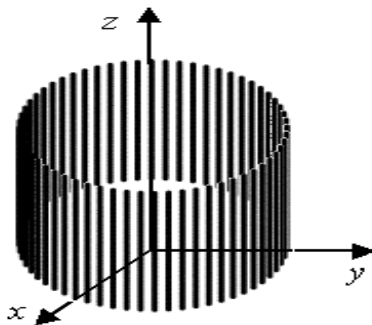


Рисунок 5.5 – Эллиптический цилиндр

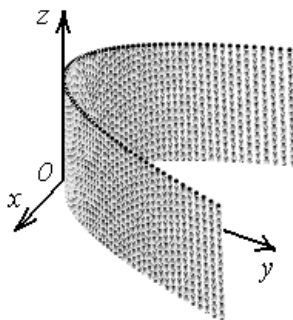


Рисунок 5.6 – Параболический цилиндр

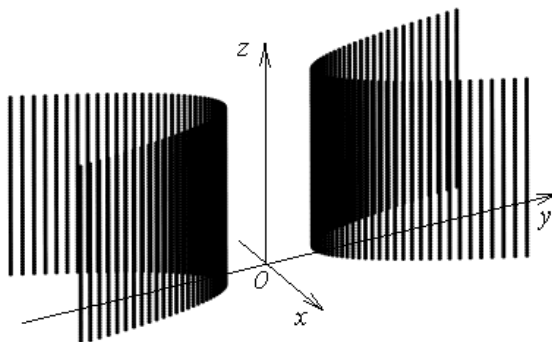
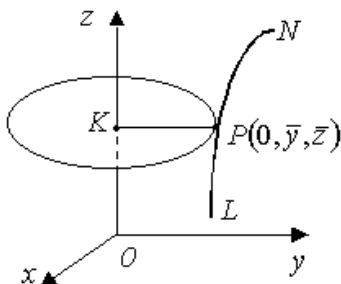


Рисунок 5.7 – Гиперболический цилиндр

Поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, образованная вращением некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в её плоскости.

Примем за ось вращения ось Oz , кривую LN поместим в полуплоскость yOz , там, где $y > 0$. Уравнение кривой LN запишем в виде



$$\begin{cases} f(\bar{y}, \bar{z}) = 0, \\ x = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Произвольная точка кривой $P(\bar{y}, \bar{z})$ вращается вместе с кривой LN относительно оси Oz .

Рисунок 5.8 – Вращение кривой

Уравнение окружности вращения точки P имеет вид (рисунок 5.8):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \bar{y}^2, \\ z = \bar{z}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Координаты вращающейся точки P удовлетворяют уравнению кривой LN :

$$f(\bar{y}, \bar{z}) = 0. \quad (5.19)$$

Подставим в уравнение (5.19) значение координат $\bar{y}, \bar{z}$ из уравнения (5.18):

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (5.20)$$

Уравнение (5.20) – уравнение поверхности вращения кривой LN . Сравнивая уравнения (5.17) и (5.20), приходим к правилу, по которому формируется уравнение поверхности вращения, если известно уравнение кривой и ось вращения:

а) переменная оси вращения остаётся без изменения;

б) вторая переменная кривой в уравнении кривой заменяется корнем квадратным из суммы квадратов переменных, лежащих в плоскости вращения.

Далее применим правило формирования уравнения поверхности вращения при вращении кривых второго порядка.

Эллипсоиды

Пусть в плоскости yOz расположен эллипс с уравнением $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Если Oz - ось вращения, то поверхность вращения называется эллипсоидом вращения и имеет уравнение

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (5.21)$$

Если эллипс вращается относительно оси Oy , то эллипсоид вращения имеет уравнение вида (рисунок 5.9)

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1. \quad (5.22)$$

Если же, при движении эллипса относительно оси вращения каждая его точка движется не по окружности, а по эллипсу, то такая поверхность называется трёхосным эллипсоидом (или просто эллипсоидом). Уравнение трёхосного эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (5.23)$$

где $a \neq b \neq c$.

Примечание – эллипсоид не является поверхностью вращения. Эту поверхность можно рассматривать как полученную из эллипсоида вращения путем пропорциональной деформации вдоль осей Ox и Oy .

Главное свойство эллипсоида заключается в том, что сечение поверхности координатной плоскостью – эллипс (см. рисунок 5.10, 5.11).

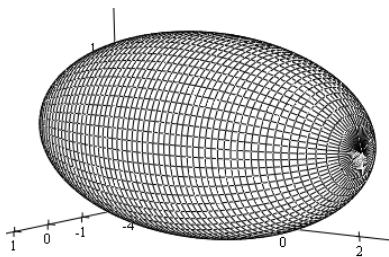


Рисунок 5.9 – Эллипсоид вращения

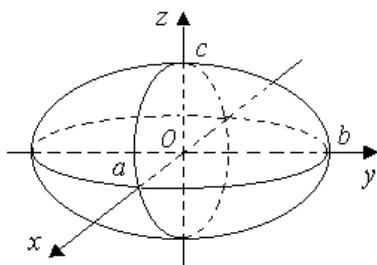


Рисунок 5.10 – Эллипсоид

Например, сечение эллипсоида плоскостью $z=0$, есть эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Если плоскость сечения имеет уравнение $z=h$, $|h| < c$, то сечением также является эллипс, но меньших размеров. Сечение эллипсоида плоскостью $y=0$ - эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. То же для плоскости $y=h$, $|h| < b$. Величины a, b, c называются полуосями эллипсоида. Если $a=b=c$, то эллипсоид – сфера (рисунок 5.12).

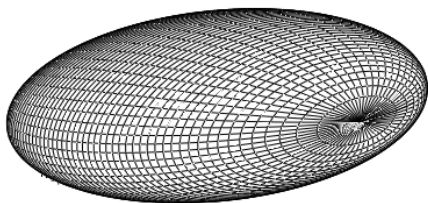


Рисунок 5.11 – Эллипсоид

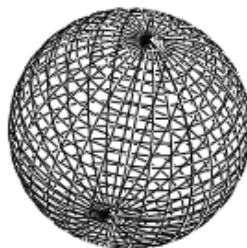


Рисунок 5.12 – Сфера

Гиперboloиды, конусы

В плоскости yOz расположим гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ с действительной осью, совпадающей с координатной осью Oy , сопряженную ей гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ с действительной осью на координатной оси Oz и осевой

прямоугольник с асимптотами $z = \pm \frac{c}{b}y$. Общее уравнение для пары асимптот имеет вид $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (рисунок 5.13).

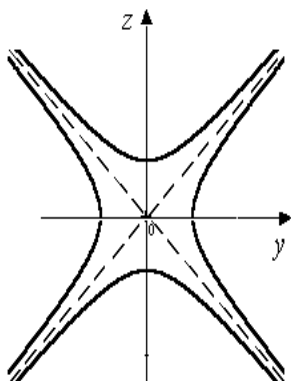


Рисунок 5.13 – Гиперболы в плоскости yOz

При вращении обеих гипербол и асимптот относительно оси Oz образуются следующие поверхности вращения:

а) при вращении гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

образуется однополостный гиперболоид вращения (рисунок 5.14)

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad (5.24)$$

б) при вращении гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ образуется двуполостный гиперболоид вращения (рисунок 5.15)

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1; \quad (5.25)$$

в) при вращении пары асимптот $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ образуется конус вращения (рисунок 5.16)

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (5.26)$$

Сечение поверхностей вращения (5.24)-(5.26) плоскостью $z = h$ - окружность (для поверхности (5.25) $|h| > c$).

Если же при вращении указанных кривых и прямых линий, каждая точка гиперболы, сопряженной гиперболы и асимптоты движется не по окружности, а по эллипсу, то образуются поверхности:

а) однополостный гиперболоид
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad (5.27)$$

б) двуполостный гиперболоид
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1; \quad (5.28)$$

в) конус второго порядка
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (5.29)$$

Сечение поверхностей (5.27)-(5.29) плоскостью $z = h$ - эллипс (для поверхности (5.28) $|h| > c$).

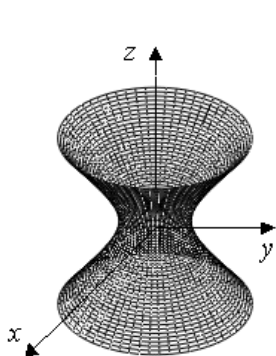


Рисунок 5.14 – Однополостный гиперболоид вращения

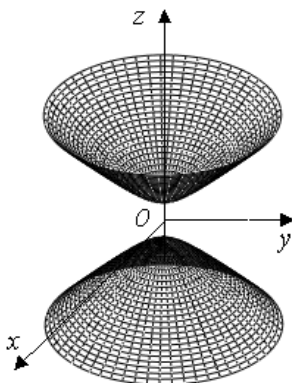


Рисунок 5.15 – Двуполостный гиперболоид вращения

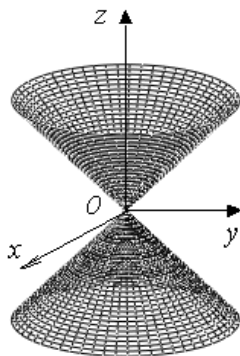


Рисунок 5.16 – Конус вращения

Поверхности (5.27), (5.28), (5.29) не являются поверхностями вращения. Для них справедливы те же примечания, что и для эллипсоидов.

Параболоиды

Пусть в плоскости yOz расположена парабола с уравнением $y^2 = 2pz$. При вращении параболы относительно оси Oz образуется поверхность параболоид вращения (см. рисунок 5.17) с уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z. \quad (5.30)$$

Если же параболоид вращения пропорционально «сжат» (или «растянут») вдоль осей Ox и Oy таким образом, что сечение поверхности плоскостью

$z = h$, ($h > 0$ при $p > 0$) - эллипс, то поверхность называется эллиптическим параболоидом (см. рисунок 5.18), уравнение которого

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z. \quad (5.31)$$

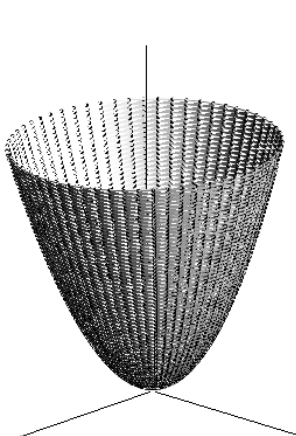


Рисунок 5.17 – Параболоид вращения

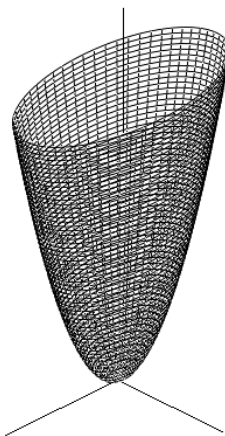


Рисунок 5.18 – Эллиптический параболоид

Гиперболический параболоид

Поверхность, которая в декартовой системе координат имеет уравнение

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (5.32)$$

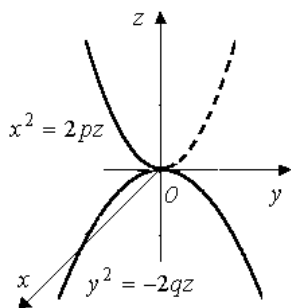
где p и q - положительные числа, называется гиперболическим параболоидом.

Сечение гиперболического параболоида плоскостью xOz ($y = 0$) - парабола $x^2 = 2pz$ с ветвями, направленными в положительном направлении оси Oz (рисунок 5.19). Сечение гиперболического параболоида плоскостью yOz ($x = 0$) - парабола $y^2 = -2qz$ с ветвями, направленными в отрицательном направлении оси Oz .

Пересекая гиперболический параболоид плоскостями $x = h$ (перпендикулярными оси Ox), получим семейство сечений

$$\begin{cases} \frac{y^2}{q} = -2z + \frac{h^2}{p}, \\ x = h. \end{cases} \quad (5.33)$$

Каждое сечение (5.33) является параболой $y^2 = -2qz$, вершина которой при $x = h$ лежит на параболе $x^2 = 2pz$. Таким образом, гиперболический параболоид представляет из себя множество точек, через которые проходит парабола $y^2 = -2qz$, перемещаясь параллельно плоскости yOz так, что её



вершина движется по параболе $x^2 = 2pz$. Это поверхность, имеющая вид неограниченного седла (рисунок 5.20).

Выясним теперь, почему в названии поверхности присутствует гипербола. В сечении плоскостью $z = h$ ($h > 0$) получаем кривую

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h.$$

Рисунок 5.19 – Расположение парабол

Приведем последнее уравнение к каноническому виду. Получим

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2hp})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2hq})^2} = 1.$$

Это гипербола с действительной осью, параллельной оси Ox .

В сечении плоскостью $z = -h$ ($h > 0$) получаем кривую $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = -2h$.

В каноническом виде

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2hp})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2hq})^2} = -1$$

- уравнение гиперболы с действительной осью, параллельной оси Oy .

Гиперболический параболоид пересекает плоскость xOy ($z = 0$) по паре пересекающихся прямых $\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ и $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$.

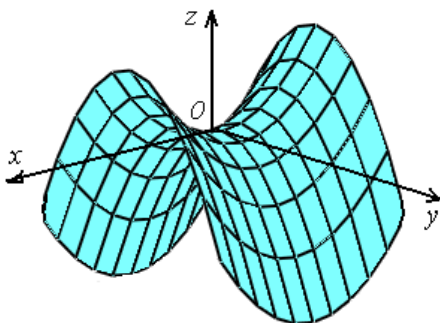


Рисунок 5.20 – Гиперболический параболоид

6. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

6.1 Матрицы, частные виды матриц

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, переменных, функций, или других математических объектов.

Матрица обозначается круглыми скобками по бокам таблицы. Матрицы также обозначают большими латинскими буквами $A, B, C, E, X, \dots$

Примеры матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, F = (4 \quad 0 \quad -5).$$

Здесь показаны различные типы матриц. Матрица A – прямоугольная, размерностью (2×3) , первая цифра указывает количество строк, вторая цифра – количество столбцов.

Матрица B – *квадратная*, у неё число строк равно числу столбцов.

Матрица C состоит из одного столбца (*матрица-столбец*), матрица F состоит из одной строки (*матрица-строка*).

Различают также *диагональные* матрицы – квадратные матрицы, у которых все элементы, кроме элементов, стоящих в главной диагонали, равны нулю.

Единичные матрицы – диагональные матрицы, у которых в главной диагонали стоят единицы. Например,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь D - диагональная матрица; E, I - единичные матрицы разной размерности.

6.2 Операции с матрицами

1. Две матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ одинаковой структуры (одинаковых размеров) *равны* друг другу, если их соответствующие элементы равны. Понятие неравенства в матрицах не определено.

2. Две матрицы одинаковой размерности можно складывать и вычитать: $A \pm B = C$. При этом $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Здесь a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} - элементы матриц A, B, C , стоящие на одинаковых местах. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Произведение матрицы A на число (скаляр) k определяется соотношением $kA = Ak = (k \cdot a_{ij})$. Каждый элемент матрицы умножается на это

число:
$$k \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a & k \cdot b & k \cdot c \\ k \cdot d & k \cdot e & k \cdot f \end{pmatrix}.$$

4. Операция замены строк матрицы столбцами с теми же номерами называется *транспонированием матрицы*. Эта операция обозначается так:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}.$$

Повторное транспонирование приводит к исходной матрице: $(A^T)^T = A$. Матрицы, удовлетворяющие условию $A = A^T$, называются *симметрическими*. Они характеризуются условием $a_{ij} = a_{ji}$. Пример симметрических матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Две матрицы согласованных размеров можно перемножить. Количество столбцов (длина строки) первой матрицы должно быть равно количеству строк (высоте столбца) второй:

$$A_{n \times m} \cdot B_{m \times l} = C_{n \times l}. \quad (6.1)$$

На рисунке 6.1 указаны размеры перемножаемых матриц и результата.

Для расчета элемента $C_{i,j}$ элементы строки i матрицы A перемножаются с элементами столбца j матрицы B по правилу скалярного умножения векторов, по формуле:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} \cdot b_{k,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \dots + a_{i,m} \cdot b_{m,j}. \quad (6.2)$$

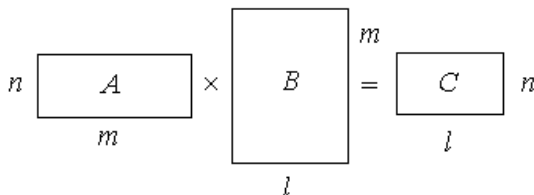


Рисунок 6.1 – Размеры перемножаемых матриц

Приведём пример, из которого несложно понять правило умножения матриц:

Пример 6.1 Перемножить матрицы $A_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 4} = C_{3 \times 4}$.

Решение

Проставим индексацию элементов матрицы C . Напомним, что первая цифра индекса показывает номер строки, в которой находится элемент, вторая цифра показывает номер столбца:

$$A_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 4} = C_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \end{pmatrix}.$$

Проставленная индексация указывает также правило умножения матриц. Например, индекс $(3,4)$ говорит о том, что на этом месте должно стоять произведение третьей строки первого сомножителя на четвертый столбец второго сомножителя.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 17 & 6 & 11 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 27 & 10 & 18 & 11 \end{pmatrix}.$$

В приведённом примере нельзя сомножители (матрицы) поменять местами, потому что их размеры будут не согласованы. Но и в общем случае произведение матриц *некоммутативное*, то есть $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Если же $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются *коммукативными*.

При умножении матрицы A на согласованную по размерам единичную матрицу E матрица A не изменяется: $AE=A$, $EA=A$. Это означает, что в матричной алгебре единичная матрица играет роль единицы обычной алгебры: при умножении числа на единицу результат равен исходному числу. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 7 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 7 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Свойство *ассоциативности* в матричной алгебре сохраняется. Это означает, что $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Если матрицы A и B - квадратные порядка n , то *определитель произведения матриц равен произведению их определителей*:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

6.3 Обратная матрица, её вычисление

Если матрица A – квадратная, то обратной к ней матрицей называется такая матрица A^{-1} , для которой справедливо двойное равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \quad (6.3)$$

где E – единичная матрица.

Квадратная матрица A имеет обратную лишь в том случае, если её определитель $\det A \neq 0$. В этом случае она называется *неособенной*, или *невырожденной*. Например, для матрицы A её определитель $\det A$ не равен нулю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 7 = -26.$$

Матрица A неособенная. Всякая неособенная (невырожденная) матрица имеет обратную матрицу.

Докажем, что обратная матрица квадратной матрицы A вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}, \quad (6.4)$$

где $\tilde{A}$ - присоединенная матрица, матрица алгебраических дополнений элементов транспонированной матрицы A .

Доказательство проведем на примере матрицы второго порядка. Пусть невырожденная квадратная матрица второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ имеет

$$\begin{aligned} \text{присоединенную матрицу } \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}. \text{ Тогда } A^{-1} \cdot A = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A} \cdot A = \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} & a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} \\ a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} & a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Также и } A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Выполняется} \end{aligned}$$

двойное равенство (6.3), следовательно, формула (6.4) определяет обратную матрицу.

Формула (6.4) для матрицы A третьего порядка имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Пример 6.2 Определить обратную матрицу (если она существует) для матрицы A и проверить правильность вычислений, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Определитель матрицы $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 70 \neq 0$,

следовательно, матрица невырожденная и имеет обратную матрицу.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле (1.7). Определяем миноры элементов, присваивая им знак согласно таблице

знаков: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$. $A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = -7$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 7$; $A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 14$;

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = -46$$
; $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -14$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 22$;

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$
; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -7$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6$.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Окончательно, решение уравнения (6.7) имеет вид:

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (6.8)$$

Остаётся найти обратную матрицу A^{-1} и умножить её на матрицу B . В результате получим решение системы (6.6). В этом состоит матричный метод решения систем алгебраических уравнений (метод обратной матрицы).

Пример 6.3 Дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases} \quad (6.9)$$

Найти решение системы уравнений методом обратной матрицы.

Решение

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 21 - 10 = -30.$$

$$\Delta = -30.$$

Матрица системы невырожденная и имеет обратную матрицу.

Определяем алгебраические дополнения элементов матрицы системы:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -23, \\ A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 11, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, & A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \\ A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений определяем по формуле (6.8), где обратная матрица A^{-1} составляется по формуле (6.5):

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-30} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -23 & 5 \\ -7 & 11 & -5 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$

7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

7.1 Основные понятия о комплексных числах

Комплексным числом z называется выражение вида $a+bi$, где a и b – действительные числа, а символ i удовлетворяет условию $i^2 = -1$ и называется мнимой единицей.

Числа a и b называются действительной и мнимой частями комплексного числа $z = a+bi$ и обозначаются соответственно символами $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Каждому комплексному числу $z = a+bi$ соответствует точка a, b на плоскости прямоугольных декартовых координат Oxy , которую поэтому будем называть комплексной z -плоскостью. Комплексное числа $a+0i$, совпадающее с действительным числом a , изображается точкой оси Ox , которая называется действительной осью, а комплексное числа $0+bi$, называемое чисто мнимыми, изображается точкой оси Oy , которая называется мнимой осью, рисунок 7.1.

Точку на плоскости, а, следовательно, и комплексное число, которое изображается этой точкой, можно задавать также при помощи полярных координат ρ и φ . При этом полярный радиус ρ называется модулем комплексного числа z и обозначается символом $|z|$, а полярный угол φ – аргументом комплексного числа z и обозначается символом $\operatorname{Arg} z$. Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определён.

Модуль комплексного числа $z = a+bi$ определяется однозначно и может быть вычислен по формуле

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (7.1)$$

В частности, если $z = 0$, то $|z| = 0$.

Комплексные числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ $z_1 = z_2$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Комплексное число $a-bi$ называется сопряжённым комплексному числу $z = a+bi$ и обозначается символом $\bar{z}$: $\bar{z} = a-bi$.

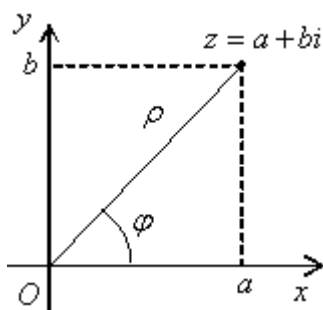
Комплексное число z может быть записано в одной из следующих трёх форм:

1) алгебраической: $z = a + bi$; (7.2)

2) тригонометрической: $z = \rho \cos \varphi + i \sin \varphi$; (7.3)

3) показательной: $z = \rho e^{i\varphi}$. (7.4)

Здесь ρ – модуль z , а φ – одно из значений $\text{Arg} z$.



Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на слагаемое $2\pi k$, где k – целое число.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на величину $2\pi k$, где k – целое число.

Рисунок 7.1 – Изображение комплексного числа на плоскости z

Значение $\text{Arg} z$, принадлежащее промежутку $-\pi, \pi$, называется главным значением, обозначается символом $\arg z$ и вычисляется по формулам:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & \text{если } a > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } a = 0, b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } a = 0, b < 0, \\ \arctg \frac{b}{a} - \pi, & \text{если } a < 0, b < 0, \\ \arctg \frac{b}{a} + \pi, & \text{если } a < 0, b \geq 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Пример 7.1 Записать комплексное числа, заданное в алгебраической форме в тригонометрической и показательной форме: $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$.

Решение. Для решения задачи нужно найти модуль комплексного числа по формуле (7.1) и аргумент числа по формуле (7.5).

$$z_1: \rho = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \varphi = \arg z = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3},$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cdot e^{i\pi/3}.$$

7.2 Алгебраические действия с комплексными числами

1. *Сложение и вычитание* двух или нескольких комплексных чисел определяется формулой (при сложении комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части; то же – при вычитании):

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) - (a_3 + b_3 i) + \dots = (a_1 + a_2 - a_3 + \dots) + (b_1 + b_2 - b_3 + \dots)i.$$

2. *Умножение* двух комплексных чисел в алгебраической форме производится по правилу умножения многочленов с заменой $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i.$$

Умножение двух комплексных чисел в показательной форме

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

Умножение двух комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] \cdot [\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned}$$

т.е. модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, аргумент произведения – сумме аргументов сомножителей.

Произведение сопряженных чисел – действительное число:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

3. *Деление* двух комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению и осуществляется по формулам:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

то есть модуль частного равен частному модулей, аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.

Чтобы разделить два числа в алгебраической форме, нужно числитель и знаменатель умножить на число, сопряжённое знаменателю, а затем представить результат в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2) \cdot (a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

Пример 7.2 Заданы два комплексных числа $z_1 = 4 - 5i$ и $z_2 = -1 + 3i$.

Вычислить выражение $z_1 \cdot z_2 + \frac{z_2}{z_1}$.

Решение

Вычисляем произведение комплексных чисел: $(4 - 5i)(-1 + 3i) =$

$-4 + 5i + 12i - 15 \cdot i^2 = 11 + 17i$ (так как $i^2 = -1$). Теперь разделим числа, умножив делимое и делитель на число, сопряжённое делителю:

$$\frac{-1 + 3i}{4 - 5i} = \frac{(1 + 3i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{-4 + 12i - 5i + 15i^2}{4^2 - 5i^2} = \frac{-19 + 7i}{41} = -\frac{19}{41} + \frac{7}{41}i.$$

Сложим результаты умножения и деления, сложив по отдельности действительные и

мнимые части: $z_1 \cdot z_2 + \frac{z_2}{z_1} = (11 + 17i) + \left(-\frac{19}{41} + \frac{7}{41}i\right) = 10\frac{22}{41} + 17\frac{7}{41}i.$

Возведение в целую степень комплексного числа удобно проводить в тригонометрической или показательной форме по формуле:

$$z^n = [\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Пример 7.3 Вычислить $(1 + i)^{50}$.

Решение

Запишем числа $1 + i$ в тригонометрической форме. Модуль $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Аргумент $\varphi = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^{50} &= (\sqrt{2})^{50} \left(\cos \left(\frac{50\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{50\pi}{4} \right) \right) = \\ &= 2^{25} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2^{25} i. \end{aligned}$$

Извлечение корня n -ой степени из комплексного числа производится по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (7.6)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Корень n -ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, модуль которых один и тот же, а аргументы отличаются на

величину $\frac{2\pi}{n}$. Точки на комплексной плоскости, соответствующие значениям корня, лежат в углах правильного n -угольника, вписанного в окружность, радиуса $R = \sqrt[n]{\rho}$.

Пример 7.4 Найти все значения корня $\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}}$.

Решение

Определяем тригонометрическую форму числа: $\rho = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 8$;

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{2}}{-4\sqrt{2}} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

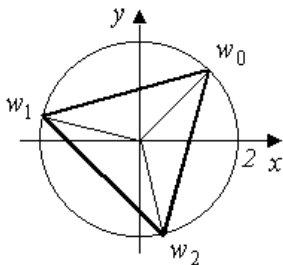
Вычисляем корни:

$$\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3} \right).$$

$$k = 0: \quad w_0 = 2 \left(\cos \frac{3\pi/4}{3} + i \sin \frac{3\pi/4}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2};$$

$$k = 1: \quad w_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$$

$$k = 2: \quad w_2 = 2 \left(\cos \frac{3\pi/4 + 4\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 4\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$



На рисунке 7.2 показано, что значения корня третьей степени лежат в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2.

Рисунок 7.2 - К решению примера 7.4

7.3 Комплексные корни квадратного алгебраического уравнения

Решение квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (7.7)$$

в котором коэффициенты a , b , c — вещественные числа, определяется по формулам

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad (7.8)$$

где дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных различных корня, если $D = 0$, то уравнение имеет два одинаковых корня, если $D < 0$, то уравнение не имеет *действительных* корней. Однако, если $D < 0$, то уравнение имеет два *комплексных сопряжённых* корня. Рассмотрим на примере способ нахождения комплексных корней квадратного уравнения.

Пример 7.5 Найти корни уравнения 1) $x^2 - 2x + 10 = 0$, 2) $x^2 + 16 = 0$.

Решение

1) Вычисляем дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36$. Находим корень квадратный из дискриминанта: $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6 \cdot i$. По формулам (7.8) вычисляем корни:

$$x_1 = \frac{2 - i6}{2} = 1 - 3i, \quad x_2 = \frac{2 + 6i}{2} = 1 + 3i.$$

Корни уравнения комплексные и сопряжённые.

2) В неполном квадратном уравнении дискриминант вычислять не надо. $x^2 = -16$, отсюда $x_1 = \sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$, $x_2 = -\sqrt{-16} = -4i$. Действительные части корней равны нулю.

Таким образом, квадратное уравнение (7.7) всегда имеет два корня – действительных или комплексных.

8. ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

8.1 Понятие линейного пространства. Аксиомы линейных пространств

Одной из характерных черт геометрических векторов является возможность производить над ними линейные действия: складывать вектора и умножать вектор на число. Результатом линейной операции является также вектор. Такие действия можно производить и над другими объектами, например, над матрицами, многочленами.

Множество L называется *линейным пространством*, а его элементы – *векторами*, если:

1) задан закон (операция сложения), по которому для двух элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из множества L $\langle \bar{x}, \bar{y} \in L \rangle$ определено понятие суммы, принадлежащей множеству L , $\langle \bar{x} + \bar{y} \in L \rangle$;

2) задан закон (операция умножения вектора на число), по которому для элемента $\bar{x} \in L$ и числа $\alpha \in R$ определено понятие произведения, принадлежащего множеству L , $\alpha \cdot \bar{x} \in L$.

Свойства операций сложения векторов и умножения вектора на число называются *аксиомами* линейных пространств.

Операция сложения векторов обладает свойствами (аксиомами):

1.1 свойство коммутативности (при перестановке слагаемых сумма не меняется) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$;

1.2 свойство ассоциативности $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$;

1.3 в пространстве L существует нулевой элемент (нуль-вектор) $\bar{0}$, такой, что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$;

1.4 в пространстве L для каждого элемента $\bar{x}$ существует противоположный элемент $\bar{x}$, такой что $\bar{x} + \bar{x} = \bar{0}$.

Операция умножения вектора на число обладает свойствами (аксиомами):

2.1 если $\alpha, \beta \in R$, то $\alpha(\beta \cdot \bar{x}) = (\alpha\beta) \cdot \bar{x}$;

2.2 $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$;

2.3 $(-1) \cdot \bar{x} = -\bar{x}$;

2.4 $0 \cdot \bar{x} = \bar{0}$;

2.5 $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Оба линейных действия связаны друг с другом аксиомами дистрибутивности.

Если $\alpha, \beta \in R$ и $\bar{x}, \bar{y} \in L$, то:

1) $(\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x}$;

2) $\alpha \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{y}$.

8.2 Примеры линейных пространств

Пример 1 – геометрические векторы.

Если заданы два вектора $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ и $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$,

то суммой векторов является вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}.$$

Произведением числа $\alpha \in R$ на вектор $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ является вектор $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot a_x \vec{i} + \alpha \cdot a_y \vec{j} + \alpha \cdot a_z \vec{k}$. В пространстве существует нуль-вектор $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$. Для каждого вектора $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ существует противоположный вектор $-\vec{a} = -a_x \vec{i} - a_y \vec{j} - a_z \vec{k}$.

Пример 2 – матрицы одинакового размера $n \times m$.

Известно (см. §6.2), что $A_{n \times m} + B_{n \times m} = C_{n \times m}$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Определена также операция умножения матрицы на число, при которой каждый элемент матрицы умножается на это число. Существует нулевая матрица $O_{n \times m}$, у которой все элементы – нули. Для каждой матрицы $\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{n \times m}$ существует противоположная матрица $\begin{pmatrix} -a_{ij} \end{pmatrix}_{n \times m}$.

Пример 3 – множество функций независимой переменной X , определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$.

Такое линейное пространство будем обозначать $C[a, b]$. Сумма непрерывных функций – непрерывная функция, $f_1 \in C[a, b] + f_2 \in C[a, b] \in C[a, b]$. Произведение $\alpha \cdot f \in C[a, b]$, $\alpha \in R$. Роль нулевого элемента пространства $C[a, b]$ выполняет функция $f \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 4 – множество комплексных чисел.

Если в операции умножения комплексного числа на число α , последнее число – вещественное, то множество комплексных чисел представляет собой вещественное линейное пространство. Если же число α – комплексное, то множество комплексных чисел представляет собой комплексное линейное пространство.

Пример 5 – пространство арифметических векторов. Ввиду особой роли указанного пространства, мы изучим его в следующем параграфе.

8.3 Арифметический вектор. Линейное пространство арифметических векторов

Всякая упорядоченная совокупность из n действительных чисел называется *действительным арифметическим n -компонентным вектором*.

То, что совокупность из n чисел упорядочена, означает, что составляющие её числа пронумерованы. Арифметический вектор обозначается

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ - компоненты вектора $\bar{x}$.

Над арифметическими векторами введены операции.

1) Сложение двух векторов.

$$\text{Если } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ то } \bar{x} + \bar{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

2) Умножение вектора на число.

$$\text{Если } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } \alpha \in R, \text{ то } \alpha \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \dots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Множество всех арифметических n - компонентных векторов с введенными операциями 1) и 2) называется вещественным *пространством арифметических векторов* и обозначается R^n .

Для пространства арифметических векторов выполняются все аксиомы линейных векторных пространств, поэтому оно является частным случаем линейного векторного пространства. Нулевым вектором является вектор

$$\bar{0} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T.$$

Противоположным вектору $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ является вектор $-\bar{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \dots \\ -x_n \end{pmatrix}$.

Например, вектору $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ противоположным будет вектор $-\bar{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Из определения пространства арифметических векторов следует, что пространство R^1 - совокупность всех действительных чисел R .

Если среди компонент арифметического вектора есть комплексные числа, то вектор называется комплексным. В таком случае, множество всех арифметических векторов с введенными операциями 1) и 2) называется *комплексным пространством арифметических векторов*.

8.4 Линейная зависимость. Базис

Система арифметических векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, не все одновременно равные нулю, такие, что выполняется равенство:

$$\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_k \bar{x}_k = \bar{0}. \quad (8.1)$$

Если равенство (8.1) выполняется только когда все числа равны нулю, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, система векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ называется *линейно независимой*.

Пусть Q - произвольное множество (может быть и конечное) арифметических n -компонентных векторов.

Система векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ называется *базисом* множества Q , если выполняются следующие условия: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k \in Q$; система $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ линейно независима; для любого вектора $\bar{y} \in Q$ найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, такие, что вектор $\bar{y}$ будет представлен линейной комбинацией векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$, а именно,

$$\bar{y} = \lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_k \bar{x}_k \quad (8.2)$$

Формула (8.2) называется разложением вектора $\bar{y}$ по базису $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$. Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ однозначно определяются вектором $\bar{y}$, и называются координатами этого вектора в базисе $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$.

Справедливы следующие утверждения:

- всякая система векторов $Q \subset R^n$ имеет хотя бы один базис; при этом все базисы системы состоят из одинакового числа векторов, это число называется *рангом* системы Q , и обозначается $\text{Rang}Q$;
- ранг всего пространства R^n равен n и называется размерностью этого пространства.

Пример 8.1 Проверить, являются ли векторы $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ линейно

независимыми.

Решение

Предположим, что указанные векторы линейно зависимы, и при $\lambda_2 \neq 0$ выполняется равенство:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = -\lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Обозначим } k = \frac{\lambda_1}{-\lambda_2}. \text{ Тогда}$$

$$k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Последнее равенство не выполняется при любом значении } k.$$

Такой же вывод получим, если предположим, что $\lambda_1 \neq 0$. Следовательно,

векторы $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ линейно независимы. Так как два двухкомпонентных

вектора линейно независимы, они составляют базис в пространстве R^2 , любой вектор из R^2 можно представить линейной комбинацией векторов базиса, например,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

В качестве базиса R^n можно взять систему векторов, каждый из которых имеет компонентой одну единицу и $(n-1)$ нулей:

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ называется *каноническим*.

Всякий вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ можно записать его разложением в каноническом

базисе следующим образом:

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n,$$

то есть, координатами вектора $\bar{x}$ в каноническом базисе являются его компоненты.

Пример 8.2 Представить вектор $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ разложением в каноническом базисе.

Решение

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.5 Евклидово пространство. Норма. Ортогональность

Линейное пространство L называется *евклидовым пространством*, если введено понятие скалярного произведения любых двух его элементов.

Не всякое линейное пространство может быть евклидовым.

Понятие скалярного произведения введено для пространства геометрических векторов (см. §3.1): скалярным произведением двух геометрических векторов называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a}, \bar{b})$.

Скалярным произведением двух арифметических векторов

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ называется число, равное сумме произведений}$$

компонент

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (8.4)$$

Скалярным произведением двух элементов $f_1 \in E, f_2 \in E$ пространства $C[a; b]$ называется определённый интеграл

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$$

Из определения скалярного произведения вытекают его свойства, которые являются свойствами евклидова пространства:

- 1) для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$ $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$;
- 2) для любых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in L$ $(\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z}$;
- 3) для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$ и действительного числа $\alpha \in R$ $(\alpha \bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot (\alpha \bar{y}) = \alpha (\bar{x} \cdot \bar{y})$.

В евклидовом пространстве введено понятие нормы вектора, которое обобщает понятие длины геометрического вектора на иные векторы евклидова пространства. Норма вектора $\bar{x} \in L$ обозначается $\|\bar{x}\|$ и вычисляется для пространства R^n формулой

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (8.5)$$

Норма вектора пространства $C[a, b]$ вычисляется по формуле

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Вектор, норма которого равна единице, $\|\bar{x}\| = 1$, называется *нормированным*. Операция нормирования вектора заключается в умножении вектора на число, обратное его норме: $\bar{x} \cdot \frac{1}{\|\bar{x}\|}$.

Норма вектора обладает следующими свойствами (аксиомами):

- 1) $\|\bar{x}\| > 0$, если $\bar{x} \neq \bar{0}$; $\|\bar{x}\| = 0$, если $\bar{x} = \bar{0}$;
- 2) если $\alpha \in R$, $\|\alpha \cdot \bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$;
- 3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$.

Пример 8.3 Задан арифметический вектор $\bar{a} = (1 \ 3 \ -4 \ 0)^T$.

Требуется: 1) вычислить норму вектора. 2) нормировать вектор.

Решение

Норму арифметического вектора вычисляем по формуле (8.5).

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{26}.$$

Нормированный вектор $\bar{a}$ имеет вид: $\frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{26} \\ 3/\sqrt{26} \\ -4/\sqrt{26} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Если для двух векторов $\bar{x}, \bar{y} \in L$ скалярное произведение равно нулю, то они называются *ортгональными*. Понятие ортгональности обобщает понятие перпендикулярности геометрических векторов.

Условием ортгональности векторов пространства R^n является равенство:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = 0.$$

Например, векторы канонического базиса

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

попарно ортгональны и нормированы (норма каждого вектора равна единице).

Условием ортгональности векторов пространства $C[a; b]$ является равенство: $\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = 0$. Примером ортгональной системы

функций является тригонометрическая система: $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$. Функции тригонометрической системы

ортгональны на отрезке $[-\pi, \pi]$, например, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx = 0$,

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = 0, n \neq m$.

9. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

9.1 Метод Гаусса и Жордана – Гаусса

Метод Гаусса – универсальный метод решения систем линейных алгебраических уравнений. Он в отличие от других методов может быть использован и при решении систем, когда число неизвестных не равно числу уравнений. Метод состоит из двух этапов. При «прямом ходе» последовательно уменьшают количество неизвестных в уравнениях системы. При этом можно каждое уравнение умножать на число, не равное нулю, складывать и переставлять уравнения. При «обратном ходе» непосредственно вычисляются значения неизвестных.

Пример 9.1 Решить систему алгебраических уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение

При умножении уравнений на число, не равное нулю, сложении и перестановке уравнений все изменения происходят с коэффициентами уравнений и свободными членами, поэтому для решения достаточно записать матрицу из коэффициентов и свободных членов. Такая матрица называется *расширенной матрицей системы*.

Расширенная матрица системы это матрица, в которой к матрице системы справа добавлен столбец свободных членов. Для заданной системы уравнений расширенная матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{1} & 3 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{array} \right).$$

В первом столбце выбираем ведущий элемент (помечен сверху волнистой чертой), с помощью которого «обнуляем» элементы первого столбца. Умножив первую строку на (-2) , прибавим её ко второй строке. Умножив первую строку на (-3) , прибавим её к третьей строке. Этим добиваемся того, что в первом столбце элементы ниже первого равны нулю. Затем выбираем во второй строке ведущий элемент (коэффициент $-\tilde{5}$), с помощью которого «обнуляем» элемент, стоящий во втором столбце внизу. Для этого умножаем вторую строку на (-1) и прибавляем её к третьей строке. Результат вычислений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{1} & 3 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -9 \\ 0 & -\tilde{5} & 5 & 20 \\ 0 & -5 & 11 & 32 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -9 \\ 0 & -5 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right).$$

На этом *прямой ход метода Гаусса закончен*, система уравнений приняла

треугольный вид:
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9, \\ -5x_2 + 5x_3 = 20, \\ 6x_3 = 12. \end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса. Из последнего уравнения определяем $x_3 = 2$ и подставляем это значение во второе уравнение, получим $x_2 = -2$.

Из первого уравнения определяем

$$x_1 = -9 + 2x_3 - 3x_2 = -9 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$

Разновидностью метода Гаусса является метод Жордана – Гаусса. Его ещё называют методом полного обнуления, так как *процедурой Гаусса* (всё теми же операциями над строками расширенной матрицы) матрица системы приводится к единичной и в последнем столбце расширенной матрицы образуется решение системы.

Пример 9.2 Решить систему алгебраических уравнений методом Жордана – Гаусса.

Решение

Первые действия такие же, как в предыдущем примере 9.1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{1} & 3 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -9 \\ 0 & -\tilde{5} & 5 & 20 \\ 0 & -5 & 11 & 32 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -9 \\ 0 & -\tilde{5} & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right).$$

Продолжаем, умножив вторую строку на $-1/5$, а затем умножим вторую строку на (-3) и прибавим её к первой строке:

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right). \text{ Теперь умножим третью строку на}$$

$$\frac{1}{6} : \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & \tilde{1} & 2 \end{array} \right). \text{ С помощью ведущего элемента } \tilde{1} \text{ «обнуляем»}$$

элементы третьего столбца:

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & \tilde{1} & 2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Последний столбец, столбец свободных членов показывает решение системы:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$$

9.2 Ранг матрицы и его вычисление

Пусть в матрице A размера $n \times m$ выбраны произвольно k строк и k столбцов $\llbracket \leq \min \llbracket n, m \rrbracket$. Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k , определитель которой называется *минором k -го порядка матрицы A* .

Например, в матрице A имеются миноры 1-го, 2-го и 3-го порядков:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \end{pmatrix}, \quad M_1 = |2| = 2, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -4,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 12 & 11 & 10 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 10 & 9 \end{vmatrix}.$$

Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A называется её рангом, а любой минор порядка r , отличный от нуля, называется *базисным*. Ранг матрицы A обозначается $\text{Rang} A$.

Пример 9.3 Определить ранг матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица имеет один минор 3-го порядка: $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Минор M_3 равен нулю, так как элементы первой и третьей строк пропорциональны.

Миноров второго порядка несколько. Некоторые из них не равны нулю:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0.$$

Следовательно, ранг матрицы равен двум.

Ответ: $\text{Rang} B = 2$.

Имеют место две важные теоремы, связанные с рангом матрицы.

Теорема о базисном миноре. В произвольной матрице A каждый столбец является линейной комбинацией столбцов, в которых расположен базисный минор.

Каждая строка матрицы является линейной комбинацией строк, в которых расположен базисный минор.

Пример 9.4 Задана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы равен 2, так как имеется минор второго порядка $M = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 0 = 5 \neq 0$. Этот же

минор – базисный. Согласно теореме о базисном миноре, третий столбец можно представить линейной комбинацией двух первых. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема о ранге матрицы. Ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых столбцов этой матрицы. Максимальное число линейно независимых строк матрицы равно максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы.

Говоря другими словами, если минор (определитель) не равен нулю, все его строки и столбцы линейно независимы (понятие о линейной зависимости рассмотрено в §8.4). Каждый столбец или строку матрицы мы можем рассматривать как арифметический вектор.

В примере 9.3 определение ранга матрицы выполнено путем перебора миноров и проверки их значений. Для вычисления ранга матрицы применяют также метод окаймляющих миноров и метод элементарных преобразований. Рассмотрим подробнее метод элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие операции:

- перестановки параллельных рядов (строк или столбцов);
- умножение строк или столбцов на число, не равное нулю;
- сложение параллельных рядов.

Применение перечисленных операций к определителю изменяет значение определителя, но не превращает это значение в ноль (см. §1.1). Поэтому, «обнуляя» элементы матрицы элементарными преобразованиями, в итоге приходим к тому, что только диагональ матрицы будет содержать несколько отличных от нуля элементов. Количество ненулевых элементов равно рангу матрицы.

Пример 9.5 Определить ранг матрицы методом элементарных преобразований.

$$\begin{array}{l}
 A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Умножим вторую} \\ \text{строку на } (-1) \\ \text{переставим первую} \\ \text{и вторую строки.} \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Вторую строку} \\ \text{умножим на } 1/2, \\ \text{третью} - \text{ на } (-1/11), \\ \text{четвертую} - \text{ на } 1/5, \\ \text{пятую} - \text{ на } -1/5 \end{array} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Умножим вторую строку на } (-4) \text{ и прибавим} \\ \text{её к первой, умножим вторую строку на } (-1) \\ \text{и прибавим к 3-й, 4-й, 5-й.} \end{array} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Умножим первый столбец на } (-3) \text{ и} \\ \text{прибавим к третьему, умножим второй} \\ \text{столбец на } 2 \text{ и прибавим к третьему} \\ \text{столбцу.} \end{array}
 \end{array}$$

Доказательство

Пусть система (9.1) совместна и пусть $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ будет одним из решений этой системы. Подставим эти числа вместо неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ во все уравнения системы и получим m верных равенств. Эти равенства показывают, что последний столбец расширенной матрицы $\bar{A}$ есть линейная комбинация остальных столбцов этой матрицы с коэффициентами $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Запишем это так:

$$x_1^0 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2^0 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n^0 \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (9.4)$$

Отсюда следует, что всякая максимальная система линейно независимых столбцов матрицы A останется максимальной и в матрице $\bar{A}$, а тогда $\text{Rang} A = \text{Rang} \bar{A}$.

Пусть теперь $\text{Rang} A = \text{Rang} \bar{A}$. Тогда последний столбец матрицы $\bar{A}$ есть линейная комбинация остальных столбцов матрицы A . Это означает, что существуют числа $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ такие, что выполняется равенство (9.4), каждое уравнение системы (9.1) превращается в верное равенство. Следовательно, числа $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ - решение системы.

Следствие теоремы Кронекера – Капелли: если $\text{Rang} A < \text{Rang} \bar{A}$, то система (9.1) несовместна и решений не имеет.

Неравенство $\text{Rang} A > \text{Rang} \bar{A}$ невозможно, так как добавление столбца в матрице не может привести к уменьшению её ранга.

Примеры приложения теоремы Кронекера – Капелли

Пример 9.6 Решить систему

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Решение

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Минор второго порядка матрицы совпадает

с её определителем и равен нулю: $M_2 = d(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$. Миноры первого порядка не равны нулю, следовательно, $\text{Rang} A = 1$.

Расширенная матрица системы $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ имеет минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, следовательно, $\text{Rang} \bar{A} = 2$. Получили неравенство, $\text{Rang} \bar{A} > \text{Rang} A$, система не имеет решения.

Пример 9.7 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = d(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang} A = 2.$$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_2 \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang} \bar{A} = 2$. Получили $\text{Rang} A = \text{Rang} \bar{A}$, система совместна, и имеет решение. Кроме того, определитель системы $d(A) \neq 0$, по правилу Крамера система имеет единственное решение $x = 1,5$; $y = -0,5$.

Пример 9.8 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2, \\ 3x + 3y = 3. \end{cases}$$

Решение

В матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ и расширенной матрице $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ все миноры второго порядка равны нулю, миноры первого порядка не равны нулю, следовательно, $\text{Rang} A = \text{Rang} \bar{A} = 1$. Система уравнений совместна, имеет решение, но правило Крамера здесь не применимо. Метод решения таких систем будет рассмотрен в последующих параграфах.

9.5 Понятие укороченной системы, свободные и базисные неизвестные, общее решение однородной системы

Рассмотрим основные случаи, возникающие при решении однородных систем общего вида

[illegible]

$$\begin{aligned}
 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0, \\
 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 &= 0, \\
 x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 &= 0, \\
 x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 &= 0.
 \end{aligned}$$

Решение

Методом Жордана – Гаусса преобразовываем матрицу системы к виду, когда в главной диагонали стоят единицы, а выше и ниже её – нули. Так как система – однородная, то расширенную матрицу не используем (при преобразованиях правые части остаются нулевыми). Записывая матрицу системы, первую и последнюю строки поменяем местами.

$$\begin{pmatrix} \tilde{1} & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Ведущим элементом} \\ \tilde{1} \text{ обнуляем другие} \\ \text{элементы первого} \\ \text{столбца} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & \tilde{8} & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Ведущим элементом $\tilde{8}$ обнуляем элементы второго столбца.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{19}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Все коэффициенты третьей и четвёртой} \\ \text{строк – нули, правые части уравнений} \\ \text{также нули. Удаляем из системы тождества} \\ \mathbf{0 = 0}. \text{ Умножим вторую строку на } 1/8. \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{19}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & \frac{25}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обсудим полученный результат. Два уравнения системы удалены, получена укороченная система, ранг которой равен 2. В качестве базисного минора удобно выбрать минор, расположенный в первых двух столбцах, следовательно, базисными неизвестными будут x_1, x_2 , свободными неизвестными – x_3, x_4, x_5 . Запишем полученную систему:

$$x_1 - \frac{19}{8}x_3 - \frac{3}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 0,$$

$$x_2 - \frac{7}{8}x_3 + \frac{25}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0.$$

Теперь получим общее решение системы:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5, \\ x_2 &= \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Таким образом, определение ранга матрицы и её преобразование в укороченную систему выполняется «автоматически» при определении общего решения методом Гаусса.

9.6 Теорема о линейно независимых решениях однородной системы

Пусть для однородной системы (9.5)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

найденно общее решение (9.7)

$$x_1 = b_1 \overbrace{(\dots)}^{r+1} x_{r+1} + \dots + b_{1n}x_n,$$

$$x_2 = b_2 \overbrace{(\dots)}^{r+1} x_{r+1} + \dots + b_{2n}x_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_r = b_r \overbrace{(\dots)}^{r+1} x_{r+1} + \dots + b_{rn}x_n.$$

Задавая свободным (параметрическим) неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ числовые значения и вычисляя затем по формулам (9.7) значения базисных неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_r$, каждый раз будем получать решение системы.

Всего свободных неизвестных $\overbrace{(n-r)}^{\sim}$, где n - количество всех неизвестных, r - ранг матрицы системы, количество базисных неизвестных.

Зададим свободным неизвестным следующие наборы значений из единиц и нулей (всего $\overbrace{(n-r)}^{\sim}$ наборов):

- 1) $x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = 0, \dots, \quad x_n = 0;$
 2) $x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 1, \quad x_{r+3} = 0, \dots, \quad x_n = 0;$

.....
 $n-r)$ $x_{r+1} = 0, \dots, \quad x_{n-1} = 0, \quad x_n = 1.$

Для каждого набора значений свободных неизвестных найдем соответствующие значения базисных неизвестных. Полученные решения (их всего $\binom{n-r}{r}$) запишем в виде арифметических векторов $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$.

Верхний индекс у элементов векторов $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$ означает номер набора.

$$E_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \dots \\ x_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \dots \\ x_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad E_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ \dots \\ x_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

Докажем, что решения $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$ линейно независимы. Для этого составим из векторов $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$, как из столбцов, матрицу. Эта матрица

в нижних $\binom{n-r}{r}$ строках имеет базисный минор вида
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Согласно теореме о ранге матрицы (см. §9.2), столбцы базисного минора линейно независимы.

Доказана теорема о линейно независимых решениях однородной системы:

Теорема Если ранг матрицы однородной системы (9.5) с n неизвестными равен r , то система имеет $\binom{n-r}{r}$ линейно независимых решений.

Совокупность решений (9.9) называют *нормальной фундаментальной системой решений*. Вообще, любая система из $n-r$ линейно независимых решений называется *фундаментальной системой решений*.

Рассмотрим равенство $X = C_1 E_1 + C_2 E_2 + \dots + C_{n-r} E_{n-r}$, или в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \dots \\ x_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \dots \\ x_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + C_{n-r} \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ \dots \\ x_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

Здесь $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ - произвольные постоянные, векторы $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$ записаны в виде столбцов.

Из теоремы о сумме решений однородной системы вытекает, что линейная комбинация любого числа решений также является решением системы. С другой стороны, любое решение системы X может быть получено при соответствующих значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$. Поэтому выражение в правой части равенства (9.10) называется *общим решением однородной системы, составленным из нормальной фундаментальной системы решений*.

Пример 9.10 Найти нормальную фундаментальную систему решений и записать общее решение на его основе для системы из примера 9.9.

Решение

Общее решение системы из примера 9.9 имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5, \\ x_2 &= \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Для определения нормальной фундаментальной системы решений свободным неизвестным x_3, x_4, x_5 зададим три набора числовых значений из единиц и нулей, определяя по формуле (9.8) значения для x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned} x_3 &= 1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \text{ тогда } x_1 = \frac{19}{8}, \quad x_2 = \frac{7}{8}; \\ x_3 &= 0, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0, \text{ тогда } x_1 = \frac{3}{8}, \quad x_2 = -\frac{25}{8}; \end{aligned}$$

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1, \text{ тогда } x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Теперь запишем общее решение системы в виде (9.10):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 19/8 \\ 7/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3/8 \\ -25/8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.7 Неоднородные системы линейных уравнений

Система линейных алгебраических уравнений называется *неоднородной*, если правая часть хотя бы одного уравнения не равна нулю. Рассмотрим общий вид неоднородной системы:

[illegible]

Будем предполагать, что она совместна, т.е. имеет хотя бы одно решение,

$\text{Rang} A = \text{Rang} \bar{A}$. Заменим в системе (9.11) правые части нулями:

[illegible]

Получили однородную систему, которая называется *приведенной системой к неоднородной системе* (9.11).

Теорема о сумме решений неоднородной системы

Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ - некоторое решение системы (9.11), а $z_1, z_2, \dots, z_n$ - произвольное решение её приведенной системы (9.12). Тогда сумма $(y_1 + z_1), (y_2 + z_2), \dots, (y_n + z_n)$ также является решением неоднородной системы (9.11).

Доказательство

Подставим сумму решений в произвольное уравнение системы и преобразуем выражение в левой части уравнения:

$$a_{k1}x_1 + z_1 \} a_{k2}x_2 + z_2 \} \dots + a_{kn}x_n + z_n \} b_k ;$$

$$a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \dots + a_{kn}y_n \} a_{k1}z_1 + a_{k2}z_2 + \dots + a_{kn}z_n \} b_k .$$

По условию теореме $a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \dots + a_{kn}y_n \} b_k$, а

$a_{k1}z_1 + a_{k2}z_2 + \dots + a_{kn}z_n \} 0$, поэтому имеем верное равенство $b_k = b_k$, справедливое для произвольного уравнения системы. Теорема доказана.

Следствием теорем о сумме решений неоднородной системы и теоремы из §9.6 является следующее утверждение: *если $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$ - нормальная фундаментальная система решений приведенной системы (9.12), а $y_1, y_2, \dots, y_n$ - некоторое (частное) решение неоднородной системы (9.11), то общее решение неоднородной системы в векторной форме имеет вид ($C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ - произвольные постоянные):*

$$X = Y + C_1 E_1 + C_2 E_2 + \dots + C_{n-r} E_{n-r} . \quad (9.13)$$

Развернутый вид формулы (9.13):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \dots \\ x_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \dots \\ x_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + C_{n-r} \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ \dots \\ x_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (9.14)$$

Вывод

Чтобы решить неоднородную систему произвольного вида, нужно:

- определить нормальную фундаментальную систему решений её приведенной системы;
- определить какое либо частное решение неоднородной системы;
- по формуле (9.14) составить общее решение неоднородной системы.

Пример 9.11 Найти общее решение системы

$$x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 10,$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 11,$$

$$7x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 32.$$

Решение

Решаем систему методом Жордана – Гаусса, для чего запишем расширенную матрицу системы. Ведущие элементы обозначаем волнистой линией $\tilde{1}, \tilde{10}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{1} & -2 & 6 & 2 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 11 \\ 7 & 6 & 6 & 4 & 32 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 10 \\ 0 & \tilde{10} & -18 & -5 & -19 \\ 0 & 20 & -36 & -10 & -38 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 12/5 & 1 & 31/5 \\ 0 & 10 & -18 & -5 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

Убираем из системы уравнение – тождество $0 = 0$. Вторую строку умножаем на $0,1$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 12/5 & 1 & 31/5 \\ 0 & 1 & -9/5 & -1/2 & -19/10 \end{array} \right). \text{Базисный минор расположен в}$$

первых двух столбцах, базисные неизвестные x_1, x_2 , свободные неизвестные x_3, x_4 . Выражаем базисные неизвестные через свободные неизвестные.

Получим общее решение неоднородной системы:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{31}{5} - \frac{12}{5}x_3 - x_4, \\ x_2 &= -\frac{19}{10} + \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{2}x_4. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Из общего решения (9.15) определяем одно частное решение неоднородной системы. Пусть $x_3 = x_4 = 0$, тогда $x_1 = \frac{31}{5}$, $x_2 = -\frac{19}{10}$. Вектор

$$\left(\frac{31}{5}, -\frac{19}{10}, 0, 0 \right)^T \text{ - частное решение неоднородной системы.}$$

Если в решении (9.15) удалить слагаемые $\frac{31}{5}, -\frac{19}{10}$, то оно превратится в общее решение приведенной системы:

$$x_1 = -\frac{12}{5}x_3 - x_4,$$

$$x_2 = \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{2}x_4.$$

Зададим свободным неизвестным наборы значений из единиц и нулей:

$$x_3 = 1, \quad x_4 = 0, \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{12}{5}, \quad x_2 = \frac{9}{5};$$

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 1, \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Получили два линейно независимых частных решения приведенной системы. Составляем общее решение неоднородной системы, записанное с помощью нормальной фундаментальной системы решений приведенной системы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31/5 \\ -19/10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \cdot \begin{pmatrix} -12/5 \\ 9/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Примечание – при решении неоднородной системы методом Гаусса (Жордана – Гаусса) проверка совместности системы происходит автоматически. Если при преобразованиях расширенной матрицы возникает строка вида $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$, то есть все коэффициенты левой части уравнения равны нулю, а правая часть уравнения не равна нулю, то система не совместна, не имеет решения.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$

Пример 9.12 Найти общее решение системы $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8,$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 10.$$

Решение

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 10 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

После обнуления во второй строке расширенной матрице образовалось тождество $(0=0)$, эту строку можно вычеркнуть из системы. В третьей строке образовалось не верное равенство $(0=-2)$. Следовательно, система несовместна, решений не имеет.

10. ПРЕДЕЛЫ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Понятие предела бесконечной числовой последовательности и предела функции лежит в основе всей теории дифференциального и интегрального исчисления.

10.1 Предел бесконечной числовой последовательности

Бесконечной числовой последовательностью называется совокупность чисел, каждому из которых присвоен определённый порядковый номер $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Числовая последовательность задаётся общим членом x_n , записанным в виде функции номера: $x_n = f(n)$. Например, последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ задаётся её общим членом $x_n = \frac{1}{n}$.

Число a называется *пределом последовательности* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε (эпсилон) найдётся такое положительное число N , что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

В этом случае пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

(Читается: предел последовательности равен a при n стремящемся к бесконечности).

Рассмотрим *геометрический смысл* определения предела числовой последовательности. На горизонтальной оси Ox будем откладывать номера элементов числовой последовательности. Тогда вертикальная ось — ось значений элементов числовой последовательности.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ эквивалентно системе двух неравенств:

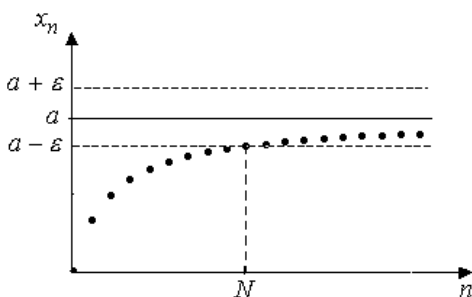
$$\begin{cases} x_n < a + \varepsilon, \\ x_n > a - \varepsilon. \end{cases} \quad \text{Пусть предел числовой последовательности } x_n \text{ равен } a.$$

Зададим произвольное малое положительное число ε .

Отложим на вертикальной оси значения $a - \varepsilon$, a , $a + \varepsilon$.

Из точек $a - \varepsilon$, a , $a + \varepsilon$ на вертикальной оси проведем прямые линии параллельно горизонтальной оси. Графиком числовой последовательности является множество точек с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$.

(см. рисунок 10.1). Начиная с номера N , все точки графика числовой последовательности располагаются внутри полосы $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Если



задать число $\varepsilon_1 < \varepsilon$, то полоса $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1)$ будет тоньше. Однако и в этом случае найдется номер числовой последовательности N_1 такой, что при $n > N_1$ все точки графика будут располагаться внутри полосы.

Рисунок 10.1 – Предел числовой последовательности

С помощью определения предела числовой последовательности можно доказать (или опровергнуть) утверждение, что некоторое число является пределом числовой последовательности.

Пример 10.1 Доказать, что последовательность

$$-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \dots, \frac{(-1)^n}{n^2}, \dots \text{ имеет своим пределом нуль.}$$

Решение

Зададим произвольное малое число $\varepsilon > 0$. Должно выполняться неравенство

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \text{ Зная число } \varepsilon > 0, \text{ можно найти}$$

ближайшее по избытку целое число $N \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда при $n > N$

будет выполняться неравенство $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0.$$

Числовая последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называется *бесконечно малой*, если её предел при $n \rightarrow \infty$ равен нулю. Так, числовая последовательность из примера 10.1 является бесконечно малой.

Числовая последовательность называется *бесконечно большой*, если для каждого сколь угодно большого положительного числа M можно указать такое число $N \in \mathbb{N}$, что для всех значений $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > M$. В этом случае пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Примером

бесконечно большой последовательности является последовательность натуральных чисел $1, 2, \dots, n, \dots$.

Предел постоянной величины $x_n = C$ равен самой этой величине, так как неравенство $|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$ выполняется при любых $\varepsilon > 0$.

Не всякая числовая последовательность имеет предел, например, последовательность с общим членом $x_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Последовательность имеет вид: $2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots$. С ростом номера члены числовой последовательности не приближаются к какому-то одному числу, для них нельзя указать число a , для которого выполнялось бы неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$.

10.2 Предел функции при $x \rightarrow a$

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow a$ (при x стремящемся к a), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε (эпсилон) найдется такое число (дельта) $\delta > 0$, величина которого зависит от ε , что при всех x , не равных a и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Это записывается так:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Данное определение предела функции имеет геометрическое толкование, которое рассмотрим на рисунке 3.2. Пусть $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Зададим произвольное малое число $\varepsilon > 0$. Построим полосу шириной 2ε со средней линией $y = b$. Отобразим с помощью графика функции $y = f(x)$ ε -окрестность точки b на оси Oy и получим окрестность точки a на оси

оx. Преобразуем несимметричную окрестность точки a в симметричную с меньшей стороной. Эта окрестность на рисунке подчеркнута и обозначена как $(a - \delta, a + \delta)$.

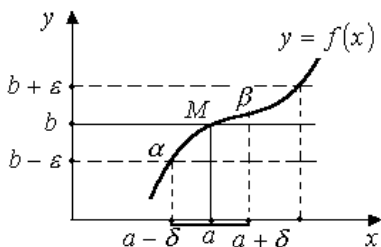


Рисунок 3.2 – Предел функции

Таким образом, для произвольного числа ε мы смогли найти такое число δ , что все точки дуги α, β графика лежат внутри построенной полосы. При уменьшении числа ε полоса сжимается к средней линии, вследствие чего уменьшается δ - окрестность точки a .

Из определения предела следует:

- 1) закон, по которому изменяется переменная x при $x \rightarrow a$ - произвольный; x может оставаться по одну сторону от точки a , но может и колебаться относительно этой точки;
- 2) при любом законе изменения $x \neq a$.

Если $x \rightarrow a$ и при этом $x < a$, то пишут $x \rightarrow a - 0$. Если $x \rightarrow a$ и при этом $x > a$, то пишут $x \rightarrow a + 0$. В этом случае предел

$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1$ называется левосторонним, предел $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2$

называется правосторонним. Для существования предела функции при $x \rightarrow a$ необходимо и достаточно, чтобы $b_1 = b_2$.

Пример 3.2 С помощью определения предела доказать, что для функции $f(x) = 3x + 2$ предел $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$.

Решение

Зададим произвольное малое число $\varepsilon > 0$. Должно выполняться условие

$$|f(x) - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x + 2 - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 6| < \varepsilon. \quad \text{Положительный}$$

множитель выносим за знак модуля, $3|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Обозначим

$\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Теперь при выполнении условия $|x - 2| < \delta$ выполняется

неравенство $|f(x) - 8| < \varepsilon$. Таким образом, задав произвольное малое число

$\varepsilon > 0$, мы нашли число $\delta \llbracket \varepsilon \rrbracket > 0$, при этом выполняются оба неравенства из определения предела.

Условно записывают $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > A$ при

$0 < |x - a| < \delta$, где A - произвольное большое положительное число. В этом случае функция $f \llbracket \varepsilon \rrbracket$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow a$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$.

10.3 Предел функции при $x \rightarrow \infty$

Число b называется *пределом функции* при $x \rightarrow \infty$, если для любого малого положительного числа ε можно указать такое положительное число M , величина которого зависит от ε , что для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, будет выполняться неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Записывается так: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

Условно записывают $\lim_{x \rightarrow \infty} f \llbracket \varepsilon \rrbracket = \infty$, если $|f(x)| > A$ при $|x| > M$,

где A - произвольное большое положительное число.

В этом случае функция $f \llbracket \varepsilon \rrbracket$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow \infty$.

Если $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow \infty$.

10.4 Свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин

Свойства бесконечно малых величин доказываются теоремами. Доказательство теорем основано на определении понятия предела.

Теорема 1. О связи между пределами и бесконечно малыми

а) Если переменная величина $f(x)$ стремится к конечному пределу b , то разность между нею и её пределом есть бесконечно малая величина $\alpha(x)$.

б) Обратно, если переменная величина $f(x)$ равна сумме некоторой постоянной величины b и величины бесконечно малой, то эта постоянная

величина
есть
предел
переменной

$$f(x) : \lim_{x \rightarrow b} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x).$$

Доказательство а): пусть $\lim f(x) = b$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, следовательно, $f(x) - b$ - величина бесконечно малая, $f(x) - b = \alpha(x)$, $f(x) = b + \alpha(x)$.

Доказательство б): пусть $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая, b - постоянная; тогда, начиная с некоторых значений x выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$ для любого малого $\varepsilon > 0$; тогда и $|f(x) - b| < \varepsilon$, следовательно, $\lim f(x) = b$.

Другие свойства бесконечно малых величин перечислим без доказательства.

Теорема 2. О сумме бесконечно малых величин

Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых является бесконечно малой величиной.

Теорема 3. О произведении с бесконечно малой величиной

Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию является величиной бесконечно малой.

Следствия теоремы:

- 1) произведения бесконечно малых являются бесконечно малыми;
- 2) произведение бесконечно малой и постоянной величины является величиной бесконечно малой;
- 3) любая натуральная степень бесконечно малой – бесконечно малая.

Теорема 4. О связи бесконечно малых и бесконечно больших.

Бесконечно большие функции $A(x)$ и бесконечно малые $\alpha(x)$ связаны между собой равенством (при $x \rightarrow a$ или при $x \rightarrow \infty$)

$$\lim \alpha(x) = \lim \frac{1}{A(x)}. \quad (10.1)$$

Обратное равенство справедливо, если при изменении бесконечно малой α она не принимает значений, равных нулю:

$$\lim A(x) = \lim \frac{1}{\alpha(x)}. \quad (10.2)$$

Условно связи (10.1) и (10.2) можно выразить так: $0 = \frac{1}{\infty}$, $\infty = \frac{1}{0}$.

Свойства бесконечно больших величин рассматриваются как следствия теорем 2, 3, 4 о бесконечно малых.

- 1) сумма бесконечно большой и постоянной (или ограниченной величины $z \ll$) есть величина бесконечно большая;
- 2) произведение бесконечно большой и постоянной (или бесконечно большой) – величина бесконечно большая.

Условно указанные свойства можно выразить так: $\infty + C = \infty$;
 $\infty + z \ll = \infty$; $\infty \times C = \infty$; $\infty \times \infty = \infty$.

Иные случаи сочетания бесконечно больших и бесконечно малых функций, а именно, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, называются неопределенностями. Раскрытие неопределенностей – основная сложность при вычислении пределов.

10.5 Свойства пределов

Свойства пределов справедливы как для пределов числовых последовательностей, так и для пределов функций. Свойства справедливы как для $x \rightarrow a$, так и для $x \rightarrow \infty$.

1. Предел постоянной равен самой постоянной $\lim C = C$, где $C - \text{const}$.
2. Предел суммы переменных равен сумме их пределов

$$\lim (f + g) = \lim f + \lim g.$$

(За исключением неопределенности вида $\infty - \infty$).

3. Предел произведения переменных равен произведению их пределов

$$\lim (f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g.$$

(За исключением неопределенности вида $0 \times \infty$).

3. Предел дроби двух переменных равен дроби их пределу,

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g},$$

за исключением неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

4. Постоянный множитель выносится за знак предела

$$\lim C \cdot f = C \cdot \lim f.$$

Примеры вычисления пределов с использованием их свойств

Пример 10.3 Вычислить: 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{x+2}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 6}{n^2 + 2n - 7}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x + 3} - \sqrt{x^2 + x + 3} \right)$.

Решение

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{x+2}$. Так как $x \rightarrow 3$, то числитель дроби стремится к числу

$2 \cdot 3 - 1 = 5$, а знаменатель дроби к числу $3 + 2 = 5$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{5}{5} = 1.$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 6}{n^2 + 2n - 7}$. При $n \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель дроби – бесконечно большие величины, неопределенность вида ∞/∞ . Для раскрытия неопределённости разделим числитель и знаменатель на наибольшую степень переменной, то есть разделим на n^2 .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 6}{n^2 + 2n - 7} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3/n + 6/n^2}{1 + 2/n - 7/n^2} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n + 6 \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n - 7 \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2} = \frac{2 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0}{1 + 2 \cdot 0 - 7 \cdot 0} = \frac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$. При $x \rightarrow 2$ числитель и знаменатель дроби равны

нулю, неопределенность вида $0/0$. Для раскрытия неопределенности нужно разложить многочлены на множители. В числе множителей числителя и знаменателя будет линейный множитель $(x - 2)$, который можно сократить.

Сокращать на $(x - 2)$ можно, так как $x \rightarrow 2$, но $(x - 2) \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}.$$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x + 3} - \sqrt{x^2 + x + 3} \right)$. При $x \rightarrow \infty$ подкоренные выражения положительные и бесконечно большие, неопределенность вида $\infty - \infty$. Для раскрытия неопределенности умножим и разделим выражение на сумму радикалов.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x + 3} - \sqrt{x^2 + x + 3} \right) &= \infty - \infty = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 6x + 3} - \sqrt{x^2 + x + 3} \right) \left(\sqrt{x^2 + 6x + 3} + \sqrt{x^2 + x + 3} \right)}{\sqrt{x^2 + 6x + 3} + \sqrt{x^2 + x + 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 6x + 3} + \sqrt{x^2 + x + 3}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{1 + 6/x + 3/x^2} + \sqrt{1 + 1/x + 3/x^2}} = \frac{5}{1 + 1} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Здесь для раскрытия неопределенности вида ∞/∞ используется тот же прием, как в пределе 2.

10.6 Два замечательных предела

Первым замечательным пределом называют предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (10.3)$$

Замечателен он тем, что раскрывает неопределенность вида $\frac{0}{0}$, возникающую при вычислении пределов тригонометрических выражений.

Второй замечательный предел имеет несколько формулировок:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e = 2,71828\dots,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 + \alpha \right)^{1/\alpha} = e = 2,71828\dots \quad (10.4)$$

Число $e = 2,7182818284\dots$ называется числом Непера. Оно лежит в основании натуральных логарифмов, показательной функции e^x . Это иррациональное число, имеющее в математике значение не менее важное, чем число «пи».

Сам же предел замечателен тем, что раскрывает неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, так как выражение в скобках стремится к единице. Доказательство замечательных пределов можно изучить в литературе [1].

Примеры применения замечательных пределов

Пример 10.4 Вычислить: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{5x}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{4x}$.

Решение

Вычисляя числитель и знаменатель заданных пределов при $x = 0$, получаем неопределенность вида $0/0$.

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \left(\begin{array}{l} \text{если } 2x = t, \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Умножив числитель и знаменатель на 2, получили первый замечательный предел.

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} \cdot \frac{2}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x} = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{4x} = \left(\begin{array}{l} \text{нужно } t = \arcsin 3x, \\ \sin t = 3x, x = 1/3 \cdot \sin t, \\ x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right) =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{4/3 \cdot \sin t} = \frac{3}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \frac{3}{4}.$$

Пример 10.5 Вычислить:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{2x+1} ; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3n+7}{n^2+3n+5} \right)^{n^2-3}.$$

Решение

Вычисляя пределы от выражений, стоящих в скобках, получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-3/x}{1+2/x} \right) = \frac{1-0}{1+0} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3n+7}{n^2+3n+5} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3/n+7/n^2}{1+3/n+5/n^2} = \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1.$$

В то же время, показатель степени выражения стремится к бесконечности.

Таким образом, в пределах имеет место неопределенность вида ∞^∞ . Для вычисления пределов преобразуем выражения так, чтобы выделить в них второй замечательный предел.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+2)-5}{x+2} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x+2} \right)^{2x+1}.$$

При $x \rightarrow \infty$ выражение $\frac{-5}{x+2} \rightarrow 0$, поэтому преобразуем выражение к формулировке второго замечательного предела в виде

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x+2} \right)^{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-5}{x+2} \right)^{\frac{x+2}{-5}} \right)^{\frac{-5(x+1)}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-10x-5}{x+2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-10x-5}{x+2} = e^{-10}. \end{aligned}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3n+7}{n^2+3n+5} \right)^{n^2-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2+3n+5} \right)^{n^2-3} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n^2 + 3n + 5} \right)^{\frac{n^2 + 3n + 5}{2}} \right)^{\frac{2(2^2 - 3)}{n^2 + 3n + 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2n^2 - 6}{n^2 + 3n + 5}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 6}{n^2 + 3n + 5} = e^2.
 \end{aligned}$$

10.7 Сравнение бесконечно малых функций

Большую роль в математическом анализе имеет дробь двух бесконечно малых величин. Предел дроби может иметь разные значения. Всего существует четыре разных случая для предела дроби бесконечно малых величин $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

1. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой *высшего порядка малости* по сравнению с $\beta(x)$, при этом $\beta(x)$ - бесконечно малая *нижнего порядка малости* по сравнению с $\alpha(x)$.

Пример 10.6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Бесконечно малая $(1 - \cos 2x)$ - высшего порядка малости по сравнению с x .

2. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой *нижнего порядка малости* по сравнению с $\beta(x)$, при этом $\beta(x)$ - бесконечно малая *высшего порядка малости* по сравнению с $\alpha(x)$.

Пример 10.7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} =$$

$= \infty \cdot 1 \cdot 1 = \infty$. Бесконечно малая величина $\operatorname{tg} x$ - низшего порядка малости по сравнению с x^2 .

3. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = q \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется бесконечно малыми одного порядка малости.

В частном случае, две бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными, если предел их дроби равен единице:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Пример 10.8
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \cdot \frac{a}{b} \right) =$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin bx} = \frac{a}{b} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{a}{b}.$$

Бесконечно малые величины $\sin ax$, $\sin bx$ - одного порядка малости. При этом эквивалентными являются бесконечно малые величины $\sin ax$ и ax , $\sin bx$ и bx .

4. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется несравнимыми бесконечно малыми.

Пример 10.9 Пусть при $x \rightarrow 0$ $\alpha(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$, $\beta(x) = x$.

Величина $\alpha(x)$ - бесконечно малая, так как является

произведением бесконечно малой $\sin x$ на ограниченную величину $\sin 1/x$,

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}.$$

Функция $\sin 1/x$ при $x \rightarrow 0$ не стремится ни к какому пределу, колеблясь между $+1$ и -1 . Поэтому предел дроби $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует. Бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются несравнимыми между собой.

10.8 Эквивалентные бесконечно малые величины

Две бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*, если предел их дроби равен единице: $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Запись $\alpha \sim \beta$ означает, что α и β - эквивалентные бесконечно малые величины. Эквивалентные бесконечно малые величины обладают рядом свойств, которые описываются следующими теоремами.

Теорема 1. Две бесконечно малые α и β эквивалентные порознь третьей бесконечно малой γ , эквивалентны между собой.

Доказательство. Пусть $\alpha \sim \gamma$, $\beta \sim \gamma$. Вычислим предел

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha/\gamma}{\beta/\gamma} = \frac{\lim \alpha/\gamma}{\lim \beta/\gamma} = \frac{1}{1} = 1, \text{ следовательно, } \alpha \sim \beta.$$

Теорема 2. Разность $\alpha - \beta$ двух эквивалентных бесконечно малых является бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с каждой из них.

Доказательство. Пусть $\alpha \sim \beta$. Вычислим предел

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha}{\alpha} - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0, \text{ следовательно, разность } \alpha - \beta$$

является бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с α . То же получим, разделив разность $\alpha - \beta$ на β .

Теорема 3. Предел дроби двух бесконечно малых сохраняет своё значение при замене этих бесконечно малых их эквивалентными.

Доказательство

Пусть $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$ и пусть $\lim \frac{\alpha}{\beta} = q$. Вычислим предел

$$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1 \alpha \beta}{\beta_1 \alpha \beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\alpha} \lim \frac{\beta}{\beta_1} \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1 \cdot 1 \cdot q = q,$$

что требовалось доказать.

Теорема 4. Сумма бесконечно малых различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка малости.

Доказательство

Пусть α - бесконечно малая низшего порядка малости по сравнению с бесконечно малыми β и γ . Вычислим предел

$$\lim \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha} = \lim \left(\frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \lim \frac{\alpha}{\alpha} + \lim \frac{\beta}{\alpha} + \lim \frac{\gamma}{\alpha} = 1 + 0 + 0 = 1,$$

что требовалось доказать.

Слагаемое, эквивалентное всей сумме бесконечно малых, называется *главной частью суммы*. Замена суммы её главной частью называется «отбрасыванием» бесконечно малых высшего порядка малости.

При вычислении пределов используют эквивалентность следующих бесконечно малых: если $\alpha(x) \rightarrow 0$, то справедлива следующая таблица соотношений.

- | | |
|--|---|
| 1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$. | 5. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$. |
| 2. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$. | 6. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$. |
| 3. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$. | 7. $\log_a (1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \cdot \log_a e$. |
| 4. $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$. | 8. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$. |

Кроме того, сумма бесконечно малых эквивалентна бесконечно малой низшего порядка малости, входящей в сумму. Так при $x \rightarrow 0$

$$x^3 + 5x^2 + 8x \sim 8x.$$

Пример 10.10 Используя эквивалентность бесконечно малых

величин, вычислить пределы: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x^4 + 2x^3 - x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1 + 5x)}$.

Решение

При $x \rightarrow 0$ величины $3x \rightarrow 0$, $-2x \rightarrow 0$, $5x \rightarrow 0$. Алгебраическая сумма бесконечно малых $x^4 + 2x^3 - x$ эквивалентна бесконечно малой низшего порядка малости $-x$. В числителе и знаменателе дробей – бесконечно малые величины. Согласно теореме 3, предел дроби двух бесконечно малых сохраняет своё значение при замене этих бесконечно малых им эквивалентными. Вычисляем пределы, заменяя бесконечно малые величины им эквивалентными.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x^4 + 2x^3 - x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+5x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

10.9 Непрерывность функции

Понятие о непрерывности функции в точке является одним из основных понятий математического анализа. Существует несколько тождественных определений о функции, непрерывной в точке. В различных случаях целесообразно использование разных определений непрерывности.

Определение 1 (базовое). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если она определена в этой точке и её окрестности, и если существует конечный предел при $x \rightarrow a$, равный значению функции в этой точке: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если: 1) функция определена в этой точке и её окрестности; 2) существуют конечные односторонние пределы при $x \rightarrow a$, равные между собой; 3) пределы равны значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a). \quad (10.5)$$

Данное определение удобно использовать при исследовании функций на непрерывность.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если она определена в этой точке и её окрестности, и если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение самой функции.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если она определена в этой точке и её окрестности, и если предел функции в этой точке существует и равен значению функции от предела аргумента: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$.

Это означает, что в случае непрерывных функций можно менять местами знак функции и знак предела.

Функция непрерывна в интервале (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$.

10.10 Точки разрыва непрерывности функции

Если не выполняется одно из условий непрерывности функции в точке, то эта точка является точкой разрыва. Чаще всего точкой разрыва является та, в которой функция не определена, но в окрестности которой функция определена. В зависимости от того, какие значения принимают односторонние пределы в точке разрыва, различают точки разрыва 1-го и 2-го рода.

10.10.1 Точки разрыва первого рода

К точкам разрыва 1-го рода относятся точки устранимого разрыва и точки скачка, когда конечные односторонние пределы не равны между собой.

Если в точке $x = a$ функция не определена, а односторонние пределы конечные и равные, $f(a-0) = f(a+0)$, то эта точка называется *точкой устранимого разрыва*.

Пример 10.11 Найти точки разрыва функции и определить характер разрыва $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Решение

В точке $x = 3$ функция не определена, выполнив подстановку $x = 3$, получим неопределенность вида $0/0$. В других точках дробь можно

сократить на $(x - 3)$, так как $x - 3 \neq 0$: $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$.

Определяем односторонние пределы при $x \rightarrow 3$: $\lim_{x \rightarrow 3-0} x + 3 = 6$;

$\lim_{x \rightarrow 3+0} x + 3 = 6$. Таким образом, при $x = 3$ функция имеет *устраанимый*

разрыв. Разрыв будет устранен, если условиться, что $f(x) = 6$ при $x = 3$. Для этого определим заданную функцию следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{иначе } x \neq 3; \\ 6, & \text{иначе } x = 3. \end{cases}$$

Заданная таким образом функция («доопределённая по непрерывности») является непрерывной на всей числовой оси.

Вне зависимости от того, определена ли функция в точке $x = a$ или нет, но если односторонние пределы функции в этой точке конечные и не равны между собой, $f(a-0) \neq f(a+0)$, в точке $x = a$ функция имеет разрыв с конечным скачком.

Пример 10.12 Найти точки разрыва функции и определить характер разрыва: $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x < 0, \\ x + 2, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$

Решение

Функция определена на всем множестве действительных чисел двумя непрерывными функциями. Разрыв непрерывности может быть только «на стыке», на границе интервалов, в точке $x = 0$. Определяем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \sin x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} x + 2 = 2.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$, точка $x = 0$ является точкой разрыва с конечным скачком, точкой разрыва первого рода (рисунок 10.3)

Если $f(a) = \frac{f(a-0) + f(a+0)}{2}$, то разрыв называется правильным разрывом непрерывности 1-го рода.

10.10.2 Точки разрыва второго рода

В точках разрыва 2-го рода один или оба односторонних предела не существуют или равны бесконечности.

Пример 10.13 Найти точки разрыва функции и определить характер разрыва: а) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{2x}{x+4}$.

Решение

а) Функция $f(x) = \sin(1/x)$ не определена в точке $x = 0$. При $x \rightarrow 0$ как слева, так и справа $1/x \rightarrow \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ не существует (см. пример 10.9). Точка $x = 0$ - точка разрыва второго рода.

б) Функция $f(x) = \frac{2x}{x+4}$ не определена при $x = -4$, во всех других точках

функция определена. Определяем левосторонний предел:

$\lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{2x}{x+4} = +\infty$, так как при $x \rightarrow -4-0$ числитель дроби стремится к постоянному отрицательному числу, а знаменатель является отрицательной бесконечно малой величиной, что условно можно записать $\frac{-8}{-0} = +\infty$.

Правосторонний предел: $\lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{2x}{x+4} = -\infty$, так как можно условно

записать $\frac{-8}{+0} = -\infty$. Односторонние пределы равны бесконечности, точка

$x = -4$ является точкой разрыва второго рода (рисунок 10.4).

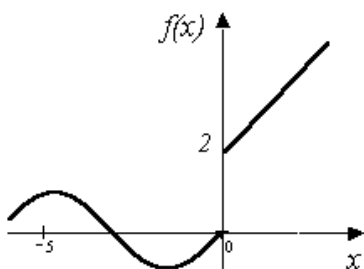


Рисунок 10.3 – Разрыв 1-го рода

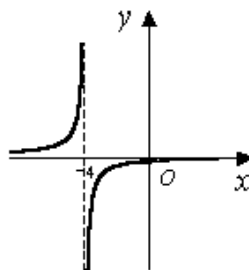


Рисунок 10.4 – Разрыв 2-го рода

11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

11.1 Понятие производной

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx , когда приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует. Производную обозначают y' , y'_x , $f'(x)$. Итак,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{или} \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (11.1)$$

Определение. Операция нахождения производной функции называется дифференцированием функции.

Определение. Функция, для которой производная существует в некоторой точке, называется дифференцируемой в этой точке.

Определение. Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого интервала (a, b) , называется дифференцируемой в этом интервале.

Геометрический смысл производной: угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению её производной в точке касания.

Механический смысл производной: скорость прямолинейного движения в момент времени t равна значению производной от пути по времени в данный момент времени.

11.2 Теорема о непрерывности дифференцируемой функции

Теорема. Если функция дифференцируема в точке $x = x_0$, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство

Если в точке $x = x_0$ существует производная, то существует конечный

предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. По теореме 1 из §10.4 можно утверждать, что

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, где α - бесконечно малая величина. Умножим

последнее равенство на Δx .

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Сумма бесконечно малых величин $f'(x_0) \Delta x + \alpha \Delta x$ - бесконечно малая величина. Следовательно, Δy - бесконечно малая величина. Таким образом, бесконечно малому приращению аргумента из точки x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции. По определению непрерывности функции в точке (см. §10.9) функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Из теоремы следует, что в точке разрыва функции производная не существует. Обратное утверждение о существовании производной в точке непрерывности не всегда верное. Рассмотрим на примерах случаи отсутствия производной в точке непрерывности функции.

Пример 11.1 Функция $y = |x|$ непрерывна при $x \in R$. Пусть $x_0 = 0$. Вычислим односторонние пределы:

$$1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{y(0 + \Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1;$$

$$2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{y(0 + \Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Так как односторонние пределы имеют различные значения, то предела

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(0 + \Delta x) - y(0)}{\Delta x}$, при произвольном стремлении к нулю приращения аргумента, не существует. Функция не дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Пример 11.2 Функция $y = \sqrt[3]{x}$ не имеет производной в точке непрерывности $x_0 = 0$. Действительно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(0 + \Delta x) - y(0)}{\Delta x} =$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty$. Предел равен бесконечности, производная не существует.

11.3 Правила дифференцирования

Правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций разработана на основе определения производной (11.1), приёмов и правил вычисления пределов.

1) *Производная постоянной равна нулю* $C' = 0$.

Пусть $y = C$ ($C = \text{const}$), тогда для любого Δx приращение функции $\Delta y = 0$, следовательно, $C' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$.

2) *Производная аргумента равна единице* $x' = 1$.

Пусть $y = x$, тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

3) *Производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных этих функций*

$$\mathbf{C}(U(x) + V(x))' = U'(x) + V'(x).$$

Пусть $y = U + V$. Зададим приращение независимой переменной. Функции также при этом получают приращения:

$$y + \Delta y = U + \Delta U + V + \Delta V \Rightarrow \Delta y = \Delta U + \Delta V.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U + \Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = U' + V'.$$

4) Производная произведения двух функций

$$\mathbf{C}(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'.$$

Пусть $y = U \cdot V$. Зададим приращение независимой переменной. Функции также при этом получают приращения: $y + \Delta y = (U + \Delta U) \cdot (V + \Delta V)$.

$$\Delta y = (U + \Delta U) \cdot (V + \Delta V) - U \cdot V, \quad \Delta y = \Delta U \cdot V + \Delta V \cdot U + \Delta U \cdot \Delta V.$$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U \cdot V + \Delta V \cdot U + \Delta U \cdot \Delta V}{\Delta x} = V \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} + \\ &+ U \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta U \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = U' \cdot V + U \cdot V', \text{ так как} \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta U = 0. \end{aligned}$$

5) Постоянный множитель выносится за знак производной

$$\mathbf{C}(C \cdot f(x))' = C \cdot \mathbf{C}f(x)'$$

Свойство – следствие свойств 4 и 1.

$$\text{Действительно, } (C \cdot f(x))' = C' \cdot f(x) + C \cdot f'(x) = 0 + C \cdot f'(x).$$

6) Производная дроби двух функций

$$\left(\frac{U}{V} \right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}.$$

Пусть $y = \frac{U}{V}$. Зададим приращение независимой переменной. Функции

$$\text{также при этом получают приращения: } y + \Delta y = \frac{U + \Delta U}{V + \Delta V},$$

$$\Delta y = \frac{U + \Delta U}{V + \Delta V} - \frac{U}{V}, \quad \Delta y = \frac{(U + \Delta U)V - U(V + \Delta V)}{(V + \Delta V)V},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U \cdot V - U \cdot \Delta V}{\Delta x(V + \Delta V)V} = \frac{U'V - UV'}{V^2}.$$

7) Производная сложной функции. Пусть $y = f(z)$, $z = g(x)$. Множество всех x , при которых значения z входят в область определения функции $f(z)$, является областью определения сложной функции

$$y = f \circ g(x).$$

При этом $g(x)$ называется внутренней функцией, функция f называется внешней функцией. Переменная z - промежуточный аргумент; x - окончательный аргумент.

Если функция $g(x)$ имеет производную в точке x , а функция f имеет производную в точке $z = g(x)$, то сложная функция y имеет производную, равную произведению производной от внешней функции по промежуточному аргументу на производную от внутренней функции по окончательному аргументу:

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Внутренних функций и промежуточных аргументов может быть несколько.

8) Непрерывная дифференцируемая функция $y = f(x)$ в интервале монотонности имеет обратную себе функцию $x = \varphi(y)$. Бесконечно малому приращению Δx соответствует бесконечно малое приращение Δy и наоборот: $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$.

Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x / \Delta y}$, или $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$.

11.4 Производные обратных тригонометрических функций

Вывод формул дифференцирования многих элементарных функций изучен в курсе средней школы. Поэтому мы рассматриваем только производные обратных тригонометрических функций.

1) Функция $y = \arcsin x$ имеет себе обратную функцию $x = \sin y$. При этом $D(\arcsin x) =]-1; 1[$, $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$x' = (\sin y)' = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. По правилу 8 дифференцирования обратных функций $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ имеем:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2) Функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ связаны тождеством: $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, или, $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$. Тогда

$$(\arccos x)' = (\pi/2)' - (\arcsin x)', \text{ или } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3) Функция $y = \operatorname{arctg} x$ имеет обратную функцию $x = \operatorname{tg} y$. При этом,

$$D(\operatorname{arctg} x) =]-\infty; \infty[, \quad E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$x' = \operatorname{tg} y' = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

По правилу 8 дифференцирования обратных функций $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$

$$\text{имеем: } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4) Функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ связаны тождеством: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$, или, $\operatorname{arcctg} x = \pi/2 - \operatorname{arctg} x$. Тогда

$$(\operatorname{arcctg} x)' = (\pi/2)' - (\operatorname{arctg} x)', \text{ или, } (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

11.5 Таблица производных и примеры дифференцирования

Таблица 1 – Производные основных элементарных функций

$$1. (x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \neq 0.$$

$$2. (e^x)' = e^x.$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

$$4. (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

$$6. (\sin x)' = \cos x$$

$$7. (\cos x)' = -\sin x$$

$$8. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$9. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$10. (\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. (\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$13. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Пункт 1-й таблицы производных имеет несколько важных частных случаев:

$$(x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}.$$

Помимо таблицы 1 производных основных элементарных функций необходимо иметь понятие о производных гиперболических функций. К гиперболическим функциям относятся: гиперболический синус $\operatorname{sh}(x)$; гиперболический косинус $\operatorname{ch}(x)$; гиперболический тангенс $\operatorname{th}(x)$; гиперболический котангенс $\operatorname{cth}(x)$.

Гиперболические функции определяются следующим образом:

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}; \quad \operatorname{cth}(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}. \quad (11.2)$$

Производные гиперболических функций:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}'(x) &= \operatorname{ch}(x); & \operatorname{ch}'(x) &= \operatorname{sh}(x); \\ \operatorname{th}(x) &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}; & \operatorname{cth}(x) &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Пример 11.3

а) Найти производную функции $y = 7x^5 + 9\cos x - 5^x + 7\operatorname{ctgx} - 8$.

Функция представляет из себя алгебраическую сумму функций, умноженных на постоянные величины. Для определения производной используются правила дифференцирования №1, 3, 5 и таблица производных основных функций.

$$y' = (7x^5 + 9\cos x - 5^x + 7\operatorname{ctgx} - 8)' = 7 \cdot (x^5)' + 9(\cos x)' - (5^x)' + 7(\operatorname{ctgx})' - 8' = 35x^4 - 9\sin x - 5^x \cdot \ln 5 - \frac{7}{1+x^2}.$$

б) Найти производную функции $y = e^x \cdot \operatorname{tg} x$. Функция y - произведение двух функций, для определения производной используется правило дифференцирования №4 о производной произведения функций.

$$y' = (e^x)' \cdot \operatorname{tg} x + e^x \cdot (\operatorname{tg} x)' = e^x \cdot \operatorname{tg} x + e^x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

в) Найти производную функции $y = \frac{x^3 + 4x^2 - 5x + 7}{\sin x}$. Функция y - частное двух функций. Для определения производной используется правило №6 о производной дроби функций.

$$y' = \frac{(x^3 + 4x^2 - 5x + 7)' \cdot \sin x - (x^3 + 4x^2 - 5x + 7) \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{(3x^2 + 8x - 5) \cdot \sin x - (x^3 + 4x^2 - 5x + 7) \cdot \cos x}{(\sin x)^2}.$$

г) Найти производную функции $y = \sqrt{\arcsin(3x^2 - 7x + 1)}$. Задана сложная функция. Внешней функцией является корень квадратный (частный случай степенной функции), внутренняя функция - арксинус, которая является внешней для внутренней функции - квадратного трёхчлена.

$$y' = (\sqrt{\arcsin(3x^2 - 7x + 1)})' \cdot (\arcsin(3x^2 - 7x + 1))' \cdot (3x^2 - 7x + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(3x^2 - 7x + 1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (3x^2 - 7x + 1)^2}} \cdot (6x - 7).$$

11.6 Дифференцирование неявно заданных функций.

Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование параметрически заданных функций

1) Функция независимой переменной x называется неявной, если она определяется из неразрешенного уравнения, связывающего аргумент и функцию y : $F(x, y) = 0$. Часто разрешить это уравнение невозможно или нецелесообразно. При этом можно определить производную функции, дифференцируя обе части равенства по x , помня, что y есть функция от x .

Пример 11.4 Определить производную функции, заданной неявно

$$x^2 y - xy^3 + \sin(2x - 3y) = 1.$$

Решение

$$(x^2 y)' - (xy^3)' + (\sin(2x - 3y))' = 1',$$

$$2xy + x^2 y' - y^3 - 3xy^2 y' + \cos(2x - 3y)(2 - 3y') = 0,$$

$$y'(x^2 - 3xy^2 - 3\cos(2x - 3y)) = y^3 - 2xy - 2\cos(2x - 3y),$$

$$y' = \frac{y^3 - 2xy - 2\cos(2x - 3y)}{x^2 - 3xy^2 - 3\cos(2x - 3y)}.$$

Как видим, производная выражается явно относительно аргумента x и функции y .

2) Для дифференцирования функции $y = u(x)^{v(x)}$ нельзя непосредственно применить ни одно из правил дифференцирования или пункт таблицы производных, так как и основание и показатель степени – функции независимой переменной. Функция называется показательной – степенной или сложной показательной.

Дифференцирование возможно, если вначале определить производную натурального логарифма функции. Определяем натуральный логарифм показательной – степенной функции: $\ln y = v(x) \cdot \ln(u(x))$. Теперь

$$(\ln y)' = (v(x) \cdot \ln(u(x)))', \quad \frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

$$y' = y(v' \ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'), \quad y' = u(x)^{v(x)} \cdot (v' \ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u').$$

Пример 11.5 $y = \ln x^{x^3}$

Логарифмируем левую и правую части по основанию e :

$$\ln y = \ln (\sin x)^{x^3}, \quad \ln y = x^3 \cdot \ln (\sin x)$$

Теперь дифференцируем равенство, учитывая, что $\ln y$ - сложная функция, так как $y = y(x)$.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x^3)' \ln (\sin x) + x^3 (\ln (\sin x))', \quad \frac{y'}{y} = 3x^2 \ln (\sin x) + x^3 \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x},$$

$$y' = y (x^2 \ln (\sin x) + x^3 \operatorname{ctg} x)$$

$$y' = (\sin x)^{x^3} (x^2 \ln (\sin x) + x^3 \operatorname{ctg} x)$$

3) Координаты точки на плоскости x и y могут быть заданы в зависимости от некоторой третьей переменной, например, времени t :

$$x = \varphi(t), \quad y = \phi(t). \quad (11.4)$$

Эта переменная t является параметром. Когда t изменяется, то точка на плоскости описывает некоторую линию L . Эта линия L задана в параметрическом виде. Например, эллипс (4.14) в параметрическом виде задается уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

В случае с уравнением эллипса параметр t - угол между положительным направлением оси Ox и радиус - вектором движущейся по эллипсу точки.

Если функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \Phi(x)$, то y является функцией от x : $y = \phi(\Phi(x))$. Таким образом, уравнения (11.4) определяют y как функцию от x и говорят, что функция y задана параметрически.

Пусть $\varphi(t)$, $\phi(t)$ - дифференцируемые функции параметра t , причем $\varphi'(t) \neq 0$. Как всякие дифференцируемые функции они непрерывные. В силу этого при $\Delta t \rightarrow 0$ $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y / \Delta t}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x / \Delta t} = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad \text{Таким образом,}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (11.5)$$

Пример 11.6 Определить производную $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \ln \cos 2t. \end{cases}$

Решение

Используя формулу (11.5), найдём y'_x для функции, заданной параметрически. Дифференцируем по t переменные x и y :

$$\begin{aligned} x'_t &= 2\cos 2t, & y'_t &= \frac{1}{\cos 2t} \cdot (-\sin 2t) \cdot 2 = -2\operatorname{tg} 2t; \\ y'_x &= \frac{-2\operatorname{tg} 2t}{2\cos 2t} = -\frac{\operatorname{tg} 2t}{\cos 2t}. \end{aligned}$$

11.7 Производные высших порядков

Второй производной называют производную от производной и обозначают y'' : $y'' = (y')'$. Вторую производную также можно дифференцировать: $y''' = (y'')'$. В общем случае, производная n -го порядка определяется как производная от производной $(n-1)$ -го порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

При повторном дифференцировании обычных функций вида $y = f(x)$ справедливы все правила дифференцирования и таблица производных.

Производная второго порядка y''_{xx} от функции заданной параметрически вычисляется по формуле

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^2}. \quad (11.6)$$

Пример 11.7 Определить вторую производную функции из примера 11.6.

Для определения второй производной первую производную y'_x дифференцируем по t :

$$(y'_x)'_t = \left(-\frac{\operatorname{tg} 2t}{\cos 2t} \right)' = -\frac{(2/\cos^2 2t) \cdot \cos 2t - \operatorname{tg} 2t \cdot (-\sin 2t) \cdot 2}{(\cos 2t)^2},$$

$$y'_x = -\frac{2 + 2\sin^2 2t}{\cos^3 2t}. \text{ Разделим полученное выражение на } x'_t \text{ и}$$

$$\text{найдем } y''_{xx}: \quad y''_{xx} = -\frac{2 + 2\sin^2 2t}{\cos^3 2t} \cdot \frac{1}{2\cos 2t} = -\frac{1 + \sin^2 2t}{\cos^4 2t}.$$

Пример 11.8 Найти производную n -го порядка от функции

$$y = \frac{a}{bx + c}, \text{ где } a, b, c - \text{ заданные числа.}$$

Решение

Представим функцию в виде $y = a(bx + c)^{-1}$ и дифференцируем функцию несколько раз. $y' = -a(bx + c)^{-2}$, $y'' = 1 \cdot 2 \cdot a(bx + c)^{-3}$, $y''' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a(bx + c)^{-4}$.

Анализируя выражения нескольких первых производных, определяем закономерности и выводим формулу n -й производной:

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot a \cdot (bx + c)^{-(n+1)}.$$

11.8 Дифференциал функции и его свойства

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. По определению производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Откуда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где α - бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $\alpha \rightarrow 0$.

Умножим последнее равенство на Δx :

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \quad (11.7)$$

В правой части равенства (11.7) слагаемое $y' \cdot \Delta x$ - бесконечно малая низшего порядка малости по сравнению со слагаемым $\alpha \cdot \Delta x$, оно является главной частью приращения функции Δy и называется дифференциалом функции, что обозначается так:

$$dy = y' \cdot dx. \quad (11.8)$$

Свойства дифференциала

1. Дифференциал аргумента равен его приращению $dx = \Delta x$.
2. Дифференциал функции эквивалентен приращению функции при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $\Delta y \sim dy$.
3. Дифференциал функции вычисляется по формуле (11.8), где $dx = \Delta x$.
4. Свойство инвариантности формы дифференциала заключается в том, что дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент и был независимой переменной:

если $y = f(z)$, $z = g(x)$, то $dy = f'(z)dz$.

Так как задача нахождения дифференциала равносильна нахождению производной, то правила дифференцирования функций сохраняют свою силу и для дифференциала, а именно:

$$\begin{aligned} \text{а) } d(C) &= 0; & \text{б) } d(U + V) &= dU + dV; \\ \text{в) } d(U \cdot V) &= dU \cdot V + U \cdot dV; & \text{г) } d\left(\frac{U}{V}\right) &= \frac{VdU - UdV}{V^2}. \end{aligned}$$

Дифференциал функции находит применение в приближённых вычислениях, основанных на формуле

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0). \quad (11.9)$$

Формула следует из эквивалентности $\Delta y \sim dy$.

Если известно значение функции при $x = x_0$, то, используя (11.9), можно найти значение функции при $x = x_0 + \Delta x$.

Пример 11.8 Вычислить приближенно $y = x^{16}$ при $x = 0,99$.

Решение. Воспользуемся формулой $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$, где

$f(x) = x^{16}$. Примем $x_0 = 1$, $\Delta x = x - x_0 = 0,99 - 1 = -0,01$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1^{16} = 1, \quad df(x) = 16x^{15} \Delta x, \\ df(x_0) &= -16 \cdot 1^{15} \cdot 0,01 = -0,16. \quad 0,99 \approx 1 - 0,16 = 0,84. \end{aligned}$$

С учетом формулы (11.8) производная функции может быть обозначена как отношение дифференциалов:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Пример 11.9 Найти дифференциал функции $y = x^3 \cdot \text{sh}(x)$.

Решение: $y' = 3x^2 \text{sh}(x) + x^3 \text{ch}(x)$, $dy = (3x^2 \text{sh}(x) + x^3 \text{ch}(x))dx$.

Дифференциал от дифференциала функции называют дифференциалом функции второго порядка:

$$d(df(x)) = d^2 f(x).$$

Определим формулу дифференциала второго порядка с учётом того, что дифференциал аргумента dx не зависит от величины x :

$$d(df(x)) = d^2 f(x) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx^2.$$

$d^2 f(x) = f''(x)dx^2$, откуда выразим производную второго порядка через

отношение дифференциалов: $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$. Читается: вторая производная равна «дэ два эф от икс по дэ икс дважды».

Вообще, дифференциал n -го порядка

$$d^n f(x) = d^{n-1} f(x)dx = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Производная n -го порядка выражается через отношения дифференциалов:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

11.9 Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей

Предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных (если последний существует или равен бесконечности).

Иначе говоря, при $x \rightarrow a$ или при $x \rightarrow \infty$

$$\lim \frac{f(x)}{q(x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim \frac{f'(x)}{q'(x)}, \text{ а также } \lim \frac{f(x)}{q(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim \frac{f'(x)}{q'(x)}.$$

Пример 11.10 Вычислить пределы, применяя правило Лопиталья

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} - be^{bx}}{1} = a - b;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\arctg x - \frac{\pi}{2}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} \left(+ \frac{1}{x^2} \right) = -1$$

Примечания

1. Если после дифференцирования неопределенность сохраняется, правило применяется повторно, может быть несколько раз.

Пример 11.11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0} \right)$. При переходе к эквивалентным

бесконечно - малым величинам в числителе дроби получим «чистый ноль»:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3}$. Это говорит о том, что разность эквивалентных

бесконечно малых является бесконечно малой высшего порядка малости (см. §10.8, теорема 2). Здесь уместно применять правило Лопиталя. Итак,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

2. Для раскрытия неопределенностей вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 их надо преобразовать к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. В случаях неопределённости 1^∞ ,

∞^0 , 0^0 выражение следует предварительно прологарифмировать

Пример 11.12

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 2x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot (1/\cos^2 2x)} = \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} b) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{-\sin x} = 0; \end{aligned}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x \right)^{1/x} = \left(\infty^0 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(\ln x)^{1/x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x}} = e^0 = 1.$$

11.10 Применение производной для исследования функций

11.10.1 Интервалы монотонности, экстремумы функции

Непрерывная в интервале $(a; b)$ функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* в этом интервале, если для двух любых значений аргумента $x_1, x_2 \in (a; b)$, причем $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Непрерывная в интервале $(a; b)$ функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в этом интервале, если для двух любых значений аргумента $x_1, x_2 \in (a; b)$, причем $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Если функции $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$, то её производная положительная: $f'(x) > 0$.

Если функции $y = f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$, то её производная отрицательная: $f'(x) < 0$.

Точка $x = x_0$ называется *точкой максимума* функции $f(x)$, а значение $f(x_0)$ называется *максимумом функции*, если существует некоторая окрестность точки x_0 , такая, что значения функции в любой точке этой окрестности будет меньше, чем её значение в самой точке x_0 , то есть $f(x_0) > f(x)$.

Точка $x = x_0$ называется *точкой минимума* функции $f(x)$, а значение $f(x_0)$ называется *минимумом функции*, если существует некоторая окрестность точки x_0 , такая, что значения функции в любой точке этой окрестности будет больше, чем её значение в самой точке x_0 , то есть $f(x_0) < f(x)$.

Обобщающее название точек максимума и минимума – точки экстремума.

Обобщающее название максимума и минимума функции – экстремумы функции.

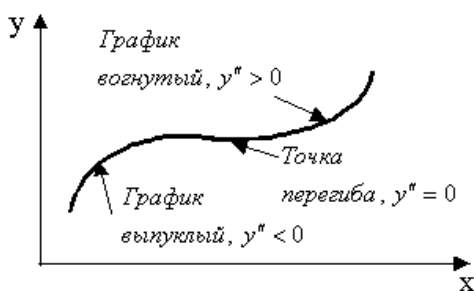
Необходимое условие экстремума функции: если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки непрерывности функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими*. Чтобы в этих точках существовал экстремум функции, должно выполняться достаточное условие экстремума.

Первое достаточное условие экстремума функции: если при переходе через критическую точку знак производной меняется с «плюса» на «минус», то в данной точке имеется максимум функции; если производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то в такой критической точке функция имеет минимум.

Второе достаточное условие экстремума функции: если в критической точке существует вторая производная, не равная нулю, то в этой точке существует экстремум функции. Причем, если $f''(x_0) > 0$, то – минимум; если $f''(x_0) < 0$, то – максимум.

11.10.2 Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба



Вторая производная y'' применяется для определения интервалов выпуклости и вогнутости графика функции. Принцип определения таких интервалов показан на рисунке 11.1. Точка, лежащая на границе между выпуклостью и вогнутостью, называется точкой перегиба

Рисунок 11.1 - Выпуклость и вогнутость графика функции

11.10.3 Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая линия, к которой неограниченно приближается уходящая в бесконечность ветвь графика.

Асимптоты бывают: вертикальные (параллельные оси Oy); горизонтальные (параллельные оси Ox); наклонные.

Вертикальные асимптоты с уравнением $x = a$ существуют, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Горизонтальные асимптоты с уравнением $y = b$ существуют, если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

Наклонные асимптоты с уравнением $y = kx + b$ существуют в том случае, если существуют два конечных предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b. \quad (11.10)$$

Пример 11.13 Определить асимптоты графика функции

$$\text{a) } y = \frac{2x+1}{x-1}; \quad \text{b) } y = \frac{x^2-1}{x+3}.$$

Решение

а) В точке $x=1$ функция не определена. Вычисляем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty. \text{ Следовательно, существует}$$

вертикальная асимптота с уравнением $x=1$.

Определяем наличие горизонтальной асимптоты: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$.

Существует двусторонняя горизонтальная асимптота с уравнением $y=2$ (при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$). Существование двусторонней горизонтальной асимптоты исключает существование наклонной асимптоты, поэтому пределы (11.10) не вычисляем. На рисунке 11.2 показаны асимптоты графика функции пункта а) и сам график функции.

б) Существует вертикальная асимптота $x=-3$, так как $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-1}{x+3} = \infty$.

Горизонтальной асимптоты нет, так как $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{x+3} = \infty$. Проверяем наличие наклонной асимптоты, вычисляя пределы (11.10).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2+3x} = 1, \quad k=1;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3x - 1}{x + 3} \right) = -3, \quad b = -3.$$

Уравнение наклонной асимптоты $y = x - 3$. На рисунке 11.3 показаны асимптоты и график функции пункта б.

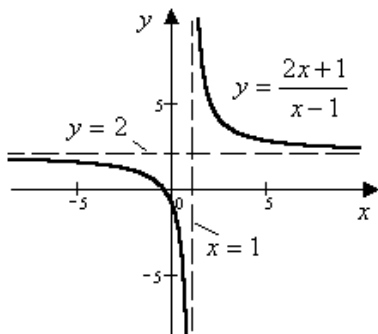


Рисунок 11.2 – Асимптоты

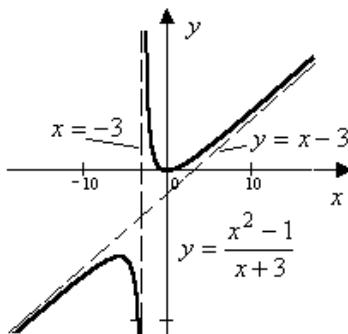


Рисунок 11.3 – Асимптоты

11.11 Общий план исследования функций и построение графиков

Наглядное представление о функции даёт её график. Построение графика служит заключительным этапом исследования функции. При исследовании функции определяются:

- 1) естественная область существования функции, точки разрыва и их характер, наличие вертикальных асимптот графика;
- 2) симметрия графика функции (чётность или нечётность функции), точки пересечения графика с осями координат;
- 3) наклонные и горизонтальные асимптоты графика;
- 4) интервалы возрастания и убывания функции, экстремумы;
- 5) интервалы выпуклости и вогнутости графика, точки перегиба.

По результатам исследования составляется сводная таблица и строится график.

Пример 11.14 Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$, и, используя результаты исследования, построить её график.

Решение

1) Область существования - вся числовая ось за исключением точек $x = -2$, $x = 2$. Это точки разрыва. Определяем характер точек разрыва.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} &= +\infty.\end{aligned}$$

Так как ветви кривой стремятся к бесконечности при $x \rightarrow -2$ и при $x \rightarrow 2$, то в этих точках – разрыв второго рода. Имеются вертикальные асимптоты с уравнениями $x = -2$, $x = 2$.

Определяем точки пересечения графиком осей координат. Если $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Если $y = 0 \Rightarrow x = 0$. Имеется одна точка – начало координат.

2) Так как $f \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} \right) = -\frac{x^3}{x^2 - 4} \Rightarrow f \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} \right) = -f \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} \right)$, то функция

является нечётной. График функции симметричен относительно начала координат.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty$, следовательно, горизонтальной асимптоты нет.

Определяем наличие наклонной асимптоты с уравнением $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 4)} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0.$$

Таким образом, существует наклонная асимптота с уравнением $y = x$.

4) Определяем первую производную $y' = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$.

Критические точки $x = -2\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = 2\sqrt{3}$ (производная равна нулю) и точки $x = -2$, $x = 2$ (производная не существует).

Знаки первой производной определяем методом интервалов (рисунок 11.4):

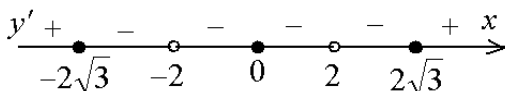


Рисунок 11.4 – Знаки первой производной

5) Вторая производная $y'' = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$. Вторая производная равна нулю

при $x=0$ и не существует при $x=-2$, $x=2$. Знаки второй производной определяем методом интервалов (рисунок 11.5):

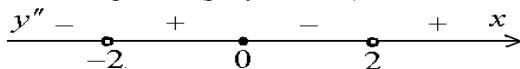
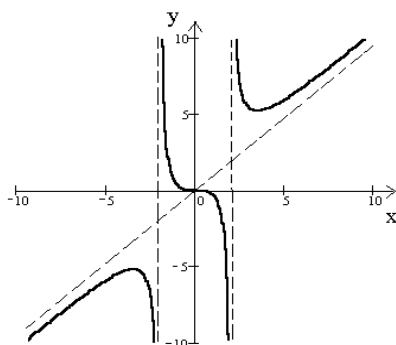


Рисунок 11.5 – Знаки второй производной

Таблица 2 – Результаты исследования функции

Значение Аргумента x	Значение функции y	Знак y'	Знак y''	Вывод о функции
$-\infty < x < -2\sqrt{3}$	-	+	-	Возрастает, выпуклость
$x = -2\sqrt{3}$	$-3\sqrt{3}$	0	-	Максимум функции
$-2\sqrt{3} < x < -2$	-	-	-	Убывает, выпуклость
$x = -2$	Не сущ.	Не сущ.	Не сущ.	Вертикальная асимптота
$-2 < x < 0$	+	-	+	Убывает, вогнутость
$x = 0$	0	0	0	Точка перегиба, график пересекает оси координат
$0 < x < 2$	-	-	-	Убывает, выпуклость
$x = 2$	Не сущ.	Не сущ.	Не сущ.	Вертикальная асимптота
$2 < x < 2\sqrt{3}$	+	-	+	Убывает, вогнутость
$x = 2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	0	+	Минимум функции
$x > 2\sqrt{3}$	+	+	+	Возрастает, вогнутость



На основании выводов таблицы и результатов исследования строим график функции (рисунок 11.6).

Рисунок 11.6 – График функции

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие для студентов втузов/Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1985. – Т.1.- 456 с.
2. Бакельман И.Я. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учеб. пособие./ И.Я. Бакельман. - М.: Просвещение, 1976. – 288 с.
3. Бугров Я.С. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии./Я.С. Бугров. - М.: Наука, 1988, - 222 с.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры./Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1984, - 278 с.
5. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы./ Н.В. Ефимов. – М.: Наука, 1964, - 160 с.
6. Ледяев С.Ф. Основы высшей математики: учеб. пособие / С.Ф. Ледяев, Ю.М. Рудов. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – 278 с.: ил..
7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Ч.1, -М.; Высшая школа, 1988, -303 с.
8. Плис А.И. МATHCAD 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина. - М.: Финансы и статистика, 2000.- 656 с.: ил.