

С.Ф. Ледяев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Севастополь - 2012

Ледяев С.Ф. Высшая математика. Лекции во втором семестре/ С.Ф. Ледяев. – Севастополь, 2012, 123 с.

Данное пособие основано на конспекте лекций, читаемых автором во втором учебном семестре студентам дневной формы обучения ряда специальностей Севастопольского национального технического университета. Пособие является продолжением конспекта лекций первого семестра [3], а также широко использует материал учебных пособий [1] и [2].

СОДЕРЖАНИЕ

1.	НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	4
1.1	Первообразная. Неопределённый интеграл и его свойства	4
1.2	Таблица интегралов и табличное интегрирование	7
1.3	Интегрирование по частям	8
1.4	Интегрирование подстановкой	11
1.5	Интегрирование простейших рациональных дробей	13
1.6	Разложение многочлена на множители	15
1.7	Разложение рациональной дроби на сумму элементарных дробей	16
1.8	Интегралы от иррациональных функций	20
1.9	Интегрирование тригонометрических функций	21
1.10	Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок	26
1.11	О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции	27
2.	ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	28
2.1	Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла	28
2.2	Определённый интеграл как предел интегральных сумм	29
2.3	Свойства определённого интеграла	30
2.4	Определённый интеграл с переменным пределом интегрирования	34
2.5	Формула Ньютона – Лейбница	35
2.5	Способы вычисления определённого интеграла	37
2.6	Несобственные интегралы	41
2.7	Интегралы, зависящие от параметра	43
2.8	Приближенные и численные методы интегрирования	45
2.9	Приложения определенных интегралов	49
3.	ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	51
3.1	Определение функции нескольких переменных. Области, линии и поверхности уровня	51
3.2	Частные приращения и частные производные. Теорема о равенстве частных смешанных производных	52
3.3	Полное приращение и полный дифференциал	54
3.4	Дифференцирование неявной функции	55

3.5 Производная по направлению	56
3.6 Градиент и его свойства	58
3.7 Экстремум функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума	59
4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ	62
4.1 Основные определения о дифференциальных уравнениях	62
4.2 Дифференциальные уравнения первого порядка	62
4.3 Уравнения с разделяющимися переменными	63
4.4 Однородные уравнения	63
4.5 Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли	65
4.6 Уравнения в полных дифференциалах	66
4.7 Задача Коши для уравнения 1-го порядка	67
4.8 Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	68
4.9 Линейные дифференциальные уравнения высших порядков	71
4.10 Структура общего решения линейного однородного уравнения.	74
4.11 ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение	76
4.12 Случай комплексных корней характеристического уравнения.	77
4.13 Случай кратных действительных корней характеристического уравнения	78
4.14 Фундаментальная система решений ЛОДУ с постоянными коэффициентами	79
4.15 Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.	82
4.16 Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных	83
4.17 Неоднородные линейные уравнения со специальной правой частью	85
4.18 Системы дифференциальных уравнений	89
5. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	92
5.1 Объём цилиндрического тела. Двойной интеграл	92
5.2 Основные свойства и приложения двойного интеграла	93
5.3 Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах	94
5.4 Двойной интеграл в полярных координатах.	100
5.5 Определение тройного интеграла.	103
5.6 Вычисление тройного интеграла в декартовых и других координатах	104
5.7 Вычисление кратных интегралов в пакете MathCAD	109
5.8 Криволинейный интеграл первого рода	111
5.9 Основные свойства и приложения криволинейного интеграла первого рода	112
5.10 Вычисление криволинейных интегралов 1-го рода	113
5.11 Криволинейный интеграл второго рода	114
5.12 Формула Грина	117
5.13 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от вида пути интегрирования.	119
Приложение А – таблица производных	122
Приложение Б – разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей в пакете MathCAD	123
Библиографический список	123

Глава 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Первообразная. Неопределённый интеграл и его свойства

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если для всех $x \in [a; b]$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \quad (1.1)$$

Определение первообразной от заданной функции называется *интегрированием* этой функции. Интегрирование - действие обратное дифференцированию и практически более сложное.

Первообразная для заданной функции не является единственной. Так, $F(x) = \sin x$ - первообразная для функции $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$. Но и $(\sin x + 5)' = \cos x$. Пример показывает, что если известна одна первообразная $F(x)$, то любая другая имеет вид $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то разность между ними равна постоянному числу.

Определение 2. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется *неопределённым интегралом* и обозначается

$$F(x) + C = \int f(x) dx. \quad (1.2)$$

Здесь $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, x - переменная интегрирования, dx - дифференциал переменной интегрирования.

Из определения следует, что $\sin x + C = \int \cos x dx$. Также можно утверждать, что $-\cos x + C = \int \sin x dx$, так как $(-\cos x + C)' = \sin x$.

В приведенных примерах первообразную определили на основе таблицы производных. Рассмотрим ещё пару формул.

Известно, что $(e^x)' = e^x$. Следовательно, $\int e^x dx = e^x + C$.

Известно, что $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Тогда $\left((n+1)x^n\right)' = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$,

т.е. первообразной для степенной функции x^n является на порядок большая степенная функция $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ при всех $n \neq -1$. Следовательно,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

Из определений (1.1), (1.2) и правил дифференцирования вытекают свойства неопределённого интеграла.

1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x) dx\right)' = \left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Например, $\int dx = x + C$, $\int d \cos x = \cos x + C$.

4. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов этих функций:

$\int (f(x) + q(x)) dx = \int f(x) dx + \int q(x) dx$. Последнее равенство справедливо с точностью до произвольной постоянной. Если найти производные от левой и правой частей равенства

$$\left(\int (f(x) + q(x)) dx\right)' = \left(\int f(x) dx + \int q(x) dx\right)',$$

то $f(x) + q(x) = f(x) + q(x)$.

5. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad \text{где } a = \text{const.}$$

Следствие свойств 4 и 5: неопределенный интеграл линейной комбинации конечного числа функций равен линейной комбинации интегралов этих функций ($a_1, a_2, \dots, a_k$ - постоянные числа):

$$\int (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_k f_k) dx = a_1 \int f_1 dx + a_2 \int f_2 dx + \dots + a_k \int f_k dx.$$

Пример 1.1 Найти неопределённый интеграл.

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 4 \sin x - 3 \cos x + 7) dx &= 5 \int x^2 dx + 4 \int \sin x dx - \\ &- 3 \int \cos x dx + 7 \int dx = 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cos x - 3 \sin x + 7x + C. \end{aligned}$$

При интегрировании были использованы свойства №3, 4, 5 неопределённого интеграла и табличные интегралы №1, 5, 6.

6. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(U) dU = F(U) + C$, где $U(x)$ - произвольная дифференцируемая функция. Это свойство есть следствие свойства инвариантности формы дифференциала функции, согласно которому

$$dF(U) = F'(U) dU = f(U) dU, \text{ если } dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx.$$

Рассмотрим пример применения свойства №6 неопределенного интеграла.

Пусть заданный интеграл приведен к виду $\int \sin(x^3) dx$. Так как $\int \sin x dx = -\cos x + C$, функция x^3 - дифференцируемая, то

$$\int \sin(x^3) dx = -\cos(x^3) + C.$$

В простейших случаях функция $U(x)$ - линейная относительно x .

Из свойств дифференциала вытекает, что $dx = d(x+b)$ и $dx = \frac{1}{a} d(ax)$, где a и b - постоянные величины. Поэтому из свойства №6 неопределенного интеграла следуют формулы, полезные при нахождении неопределенных интегралов: если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C; \quad (1.3)$$

$$\int f(x+b) dx = F(x+b) + C; \quad (1.4)$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \quad (1.5)$$

Пр и м е р 1.2 Найти неопределённые интегралы

а) $\int \cos 4x dx$; б) $\int \sin(x-7) dx$; в) $\int x^3 dx$.

Решение

а) По формуле (1.3): $\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x + C$, т. к. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Если формула (1.3) забыта, то нужно использовать следующие выкладки.

Задан интеграл $\int \cos 4x dx$. Чтобы его привести к табличному виду, под

знаком дифференциала должно стоять выражение $4x$. Чтобы его получить, умножим и разделим интеграл на 4.

$$\begin{aligned} \int \cos 4x dx &= \frac{4}{4} \int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \int \cos 4x d4x = \int \cos U dU = \\ &= \frac{1}{4} \sin U + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

б) По формуле (1.4): $\int \sin(x-7) dx = -\cos(x-7) + C$, так как $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

в) По формуле (1.5): $\int x^3 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + C$, так как $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$.

1.2 Таблица интегралов и табличное интегрирование

Метод табличного (непосредственного) интегрирования заключается в том, что с помощью эквивалентных преобразований подынтегральной функции и на основании свойств неопределённого интеграла заданные интегралы преобразуются в табличные. Это даёт возможность непосредственно записать первообразную. В пример 1.1 применен метод табличного интегрирования.

Значения интегралов от основных элементарных функций получены на основе формул дифференцирования.

Таблица 1 – Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C.$
7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C.$
15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$
8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$
16. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
17. $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

1.3 Интегрирование по частям

Не существует формулы, выражающей интеграл от произведения функций через интегралы от сомножителей. Но иногда интеграл от произведения функций можно вычислить по *формуле интегрирования по частям*.

Вывод формулы интегрирования по частям

Пусть $U = U(\cdot)$ и $V = V(\cdot)$ - дифференцируемые функции. Тогда дифференциал произведения $d(U \cdot V) = VdU + UdV$. Проинтегрируем обе части формулы:

$\int d(UV) = \int VdU + \int UdV \Rightarrow UV = \int VdU + \int UdV$. Окончательно, получим формулу

$$\int UdV = UV - \int VdU. \quad (1.6)$$

Формула (1.6) называется *формулой интегрирования по частям*.

Метод интегрирования по частям заключается в следующем.

Подынтегральную функцию исходного интеграла рассматриваем как произведение функции U и дифференциала некоторой функции dV , За дифференциал dV мы должны выбрать выражение, для которого сможем найти первообразную.

После этого применяем формулу (1.6). Применять формулу имеет смысл в том случае, когда интеграл $\int VdU$ окажется проще исходного или подобен ему.

Для получения окончательного результата иногда требуется применить метод последовательно несколько раз.

Пример 1.3 Найти интеграл $\int x \cdot \cos x dx$.

Решение

а) Сознательно неверное начало решения. Положим $U = \cos x$, $dV = x dx$.

Тогда $dU = -\sin x dx$, $V = \frac{x^2}{2}$. Запишем правую часть формулы (1.6):

$$\int x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x dx.$$

Интеграл, стоящий в правой части стал сложнее исходного, так как повысилась степень x с первой до второй. Это говорит о том, что обозначения выбраны неверно.

б) Верное решение. Положим $U = x$, $dV = \cos x dx$. Тогда $dU = dx$, $V = \int \cos x dx = \sin x$. Произвольную постоянную учтем, когда получим первообразную для исходного интеграла. Применяем формулу (1.6):

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Рекомендации по применению метода

Методом интегрирования по частям вычисляются интегралы следующих типов (список интегралов можно расширить).

1. $\int x^n e^{ax} dx$.

6. $\int x^n \arcsin bx dx$

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 2. $\int x^n \sin bxdx$ | 7. $\int x^n \arccos bxdx$ |
| 3. $\int x^n \cos bxdx$ | 8. $\int x^n \arctg bxdx$ |
| 4. $\int e^{ax} \sin bxdx$ | 9. $\int x^n \arccot bxdx$ |
| 5. $\int e^{ax} \cos bxdx$ | 10. $\int x^n \ln bxdx$ |

Примечания:

- 1) в интегралах 1, 2, 3 за функцию U следует принимать x^n (вместо сомножителя x^n в интеграле может стоять многочлен по степеням x , см. §1.6);
- 2) в интегралах 6 - 10 следует принять $dV = x^n dx$;
- 3) в интегралах 4, 5 безразлично, что принимать за U , но формула применяется дважды.

Последнее примечание рассмотрим на примере.

Пример 1.4 Найти интеграл $\int e^{2x} \sin x dx$.

Решение

Обозначим $U = e^{2x}$, $dV = \sin x dx$. Тогда $dU = 2e^{2x} dx$,
 $V = \int \sin x dx = -\cos x$. Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int e^{2x} \sin x dx = -\cos x \cdot e^{2x} + 2 \int e^{2x} \cos x dx =$$

Снова вводим обозначения для повторного применения формулы (1.6)

$$\begin{aligned}
 &= \left(\begin{array}{l} U = e^{2x}, \quad dU = 2e^{2x} dx; \\ dV = \cos x dx, \quad V = \sin x \end{array} \right) = \\
 &= -\cos x \cdot e^{2x} + 2 \left(\sin x \cdot e^{2x} - 2 \int e^{2x} \sin x dx \right) = \\
 &= 2e^{2x} \sin x - e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \sin x dx.
 \end{aligned}$$

Таким образом, после двукратного применения формулы в правой части появился исходный интеграл:

$$\int e^{2x} \sin x dx = 2e^{2x} \sin x - e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \sin x dx.$$

«Интеграл вернулся». Его и называют «возвратным». Получили уравнение относительно исходного интеграла. Перенесем «возвратный» интеграл в левую часть.

$$5 \int e^{2x} \sin x dx = 2e^{2x} \sin x - e^{2x} \cos x.$$

Окончательно, прибавив произвольную постоянную, получим:

$$\int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C.$$

1.4 Интегрирование подстановкой

Существует два основных типа подстановок при вычислении неопределенного интеграла: а) замена переменной интегрирования функцией новой переменной; б) замена функции в подынтегральном выражении новой переменной.

1) Замена переменной интегрирования функцией новой переменной

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x) dx$, причем первообразную нельзя подобрать непосредственно по таблице. Сделаем замену переменной по формуле $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда справедливо равенство

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (1.7)$$

На первый взгляд кажется, что интеграл в правой части (1.7) сложнее исходного. На практике, при правильно выбранной подстановке $x = \varphi(t)$ полученный интеграл проще исходного. Равенство (1.7) подразумевает, что после интегрирования в правой части равенства вместо t будет подставлено выражение через x .

Пример 1.5 Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Решение. В последующем изложении показано, что для такого интеграла нужно применить подстановку $x = 2 \sin t$. Тогда $dx = 2 \cos t dt$, $\sqrt{(4-x^2)^3} = 8 \cos^3 t$. При этом $t = \arcsin \frac{x}{2}$

Интеграл с новой переменной – табличный:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} t + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin t}{\cos t} + C =$$

(теперь нужно вернуться к старой переменной интегрирования)

$$= \frac{\sin \left(\arcsin x/2 \right)}{4\sqrt{1-\sin^2 \left(\arcsin x/2 \right)}} + C = \frac{x/2}{4\sqrt{1-(x/2)^2}} + C = \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C.$$

2) Замена функции в подынтегральном выражении новой переменной

Второй основной прием метода подстановки заключается в том, что замену переменной подбирают по формуле $t = \varphi(x)$. Применение метода подстановки типа $t = \varphi(x)$ возможно, если подынтегральная функция имеет в общем случае такой вид:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx.$$

Здесь в общем случае под знаком внешней функции f имеется функция $\varphi(x)$, от которой в подынтегральной функции имеется множитель $\varphi'(x)$, производная от $\varphi(x)$.

П р а в и л о : ту функцию $\varphi(x)$, от которой имеется производная $\varphi'(x)$ нужно обозначить новой переменной $t = \varphi(x)$. Затем определяем дифференциал новой переменной, используя формулу дифференциала функции:

$$d\varphi(x) = \varphi'(x) dx. \quad (1.8)$$

Следовательно, $dt = \varphi'(x) dx$. В итоге получим:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt. \quad (3.9)$$

Рассмотренный прием метода подстановки называют *методом подведения функции под знак дифференциала*.

Пример 1.6 Найти интеграл $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Решение. В подынтегральном выражении $\frac{1}{x} = (\ln x)'$, поэтому выбираем

подстановку $t = \ln x$, $dt = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, выражение $\frac{1}{x}$ подводится под знак дифференциала. Интеграл становится табличным.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Пример 1.7 Найти интеграл $\int \sqrt{1+x^3} \cdot x^2 dx$.

Решение. Обозначим $t = 1 + x^3$. Тогда $dt = 3x^2 dx$. Но в интеграле нет множителя 3. Умножим и разделим интеграл на 3, получим

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^3} \cdot x^2 dx &= \frac{1}{3} \int \sqrt{1+x^3} \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9} (1+x^3)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

1.5 Интегрирование простейших рациональных дробей

Различают 4 типа простейших рациональных дробей.

1. Простейшая дробь 1-го типа имеет вид $\frac{A}{x-a}$, где A – коэффициент, a – действительный корень знаменателя. Интеграл от дроби 1-го типа приводится к табличному интегралу:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C.$$

2. Простейшая дробь 2-го типа имеет вид $\frac{A}{(x-a)^k}$, где A – коэффициент, a – действительный корень знаменателя кратности k . Интеграл от дроби 2-го типа приводится к табличному интегралу:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C.$$

3. Простейшая дробь 3-го типа имеет вид $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где A, B – коэффициенты, знаменатель дроби не имеет действительных корней, его дискриминант $D < 0$.

При интегрировании дроби вначале в числителе нужно выделить дифференциал знаменателя (если $A \neq 0$).

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \\ &+ (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + (B - \frac{Ap}{2}) \cdot I_1 \end{aligned}$$

Интеграл $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$ превращается в табличный, если в знаменателе выделить полный квадрат суммы или разности и применить подстановку $x + \frac{p}{2} = U$.

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = U^2 + R^2.$$

Так как дискриминант знаменателя $D = p^2 - 4q < 0$, то $R^2 = \left(q - \frac{p^2}{4}\right) > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } I_1 &= \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dU}{U^2 + R^2} = \frac{1}{R} \operatorname{arctg} \frac{U}{R} + C = \\ &= \frac{1}{R} \operatorname{arctg} \frac{x + p/2}{R} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.8

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-7}{x^2+4x+5} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(x+4) - 7 - 6}{x^2+4x+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5} - \\ &- 13 \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+5| - 13 \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+5| - 13 \operatorname{arctg}(x+2) + C. \end{aligned}$$

Использованы табличные интегралы №2 и №16.

Примечание – если знаменатель дроби 3-го типа имеет действительные корни, то дробь не считается простейшей. Однако и в этом случае можно применять рассмотренный способ интегрирования, что показано в примере 1.9.

Пример 1.9

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+2x-8} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2-3^2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3-U}{3+U} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3-x-1}{3+x+1} \right| = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{2-x}{4+x} \right| + C. \end{aligned}$$

4. Простейшая дробь 4-го типа имеет вид $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, где A, B – коэффициенты, знаменатель дроби не имеет действительных корней, его

дискриминант $D < 0$. Выделяя в знаменателе полный квадрат, приходим к

дробь вида $\frac{A_1 U + B_1}{(U^2 + a^2)^k} = \frac{A_1 U}{(U^2 + a^2)^k} + \frac{B_1}{(U^2 + a^2)^k}$. Интеграл от

первого слагаемого $\frac{A_1}{2} \int \frac{2UdU}{(U^2 + a^2)^k} = \frac{A_1}{2} \cdot \frac{(U^2 + a^2)^{1-k}}{1-k}$.

При интегрировании второго слагаемого для $k = 2$ используется табличный интеграл 17. При $k > 2$ используется рекуррентная формула [1]:

$$\int \frac{dU}{(U^2 + a^2)^k} = \frac{U}{2a^2(k-1)(U^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} \int \frac{dU}{(U^2 + a^2)^{k-1}}$$

1.6 Разложение многочлена на множители

Определение. Многочленом (полиномом) от X называется функция вида:

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0.$$

Здесь n – целое положительное число, $A_n, \dots, A_0$ – коэффициенты, действительные или комплексные. Число n называется степенью многочлена.

Корнем (нулем) многочлена называется такое значение X , при котором он обращается в нуль.

Любой многочлен можно представить в виде произведения линейных множителей (разложить многочлен на множители). Это утверждение базируется на следующих основных теоремах.

Теорема 1 (теорема Безу). При делении многочлена $f(x)$ на разность $(x - a)$ получается остаток, равный $f(a)$.

Следствие теоремы Безу. Если a – корень многочлена $f(x)$, то есть $f(a) = 0$, то $f(x)$ делится без остатка на $(x - a)$. При этом $f(x) = (x - a) f_1(x)$.

Теорема 2 (основная теорема алгебры). Всякий многочлен $f(x)$ имеет, по крайней мере, один корень – действительный или комплексный.

Теорема 3. Всякий многочлен n -й степени на множестве комплексных чисел разлагается на n линейных множителей вида $(x - a_i)$ и множитель, равный старшему коэффициенту A_n :

$$f(x) = A_n (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Теорема 4. Если многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a + ib$, то он имеет и сопряженный корень $a - ib$.

При перемножении линейных множителей с сопряженными комплексными корнями получается квадратный трехчлен с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом:

$$(x - a - ib)(x - a + ib) = (x - a)^2 - (ib)^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2).$$

Из теорем 1 – 4 следует вывод: многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители с действительными коэффициентами первой и второй степени. Множители первой степени соответствуют действительным корням многочлена. Среди действительных корней могут быть кратные (одинаковые). Множители второй степени соответствуют парам комплексных сопряженных корней. Пары комплексных корней также могут быть кратными.

$$f(x) = A_n (x - a)^k (x - b)^* \dots (x^2 + p_1x + q_1)^k (x^2 + p_2x + q_2)^m. \quad (1.8)$$

В записанном выражении (1.8) a – действительный простой корень, b – действительный корень кратности k , множитель $(x^2 + p_1x + q_1)^k$ соответствует простой паре комплексных сопряженных корней, множитель $(x^2 + p_2x + q_2)^m$ соответствует паре комплексных сопряженных корней кратности m .

1.7 Разложение рациональной дроби на сумму элементарных дробей

Рациональной дробью называют частное двух многочленов одного и того же аргумента

$$\frac{G(x)}{P(x)} = \frac{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0}{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0}, \quad (1.9)$$

где $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ – действительные числа.

Рациональная дробь (1.9) называется *правильной*, если $n > m$. При $m \geq n$ дробь называется *неправильной*, в этом случае делением числителя на знаменатель можно выделить целую часть, которая будет многочленом степени $\lfloor m/n \rfloor$ и дробный остаток, который является правильной дробью. Такую процедуру называют выделением целой части.

Пример 1.10 В неправильной рациональной дроби выделить целую часть и правильный рациональный остаток:

$$\frac{G(x)}{P(x)} = \frac{x^4 + 7x^3 - 5x^2 + x - 17}{x^3 + 4x^2 - x + 1}.$$

Решение

Разделим числитель на знаменатель «уголком».

$$\begin{array}{r} x^4 + 7x^3 - 5x^2 + x - 17 \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + 4x^2 - x + 1 \\ x + 3 \end{array} \right. \\ - (x^4 + 4x^3 - x^2 + x) \\ \hline 3x^3 - 4x^2 - 17 \\ - (3x^3 + 12x^2 - 3x + 3) \\ \hline -16x^2 + 3x - 20 \end{array}$$

В результате получим: $\frac{G(x)}{P(x)} = x + 3 + \frac{-16x^2 + 3x - 20}{x^3 + 4x^2 - x + 1}.$

Пусть дробь (1.9) – правильная. Предположим, что её знаменатель $P(x)$ можно разложить на множители

$$P(x) = a_n (x - x_1) \dots (x - x_k) \dots (x^2 + px + q) \dots (x^2 + bx + c). \quad (1.10)$$

Здесь x_1 – простой корень многочлена $P(x)$, x_2 – корень кратности k .

Квадратные трёхчлены $x^2 + px + q$, $x^2 + bx + c$ не имеют действительных корней. Тогда правильную дробь (1.9) можно представить суммой простейших дробей.

Зависимость типа простейшей дроби от характера корней знаменателя

1. Каждому простому действительному корню соответствует простейшая дробь 1-го типа.
2. Каждому кратному действительному корню кратности k соответствует одна дробь 1-го типа и $(k-1)$ дробей 2-го типа, показатель степени знаменателя которых возрастает от 2-й до k -й.
3. Каждой простой паре комплексных сопряженных корней соответствует простейшая дробь 3-го типа.
4. Каждой кратной паре комплексных сопряженных корней соответствуют простейшие дроби 3-го и 4-го типа.

$$\frac{G(x)}{P(x)} = \left[\frac{A}{x - x_1} \right] + \dots + \left[\frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x - x_2)^k} \right] + \dots + \left[\frac{Cx + D}{x^2 + px + q} \right] + \left[\frac{M_1x + N_1}{x^2 + bx + c} + \dots + \frac{M_r x + N_r}{(x^2 + bx + c)^r} \right]. \quad (1.11)$$

Выражения в каждой квадратной скобке соответствуют каждому множителю в разложении (1.10).

Неизвестные коэффициенты $A_1, B_1, \dots, B_k, C, D, M_1, N_1, \dots, M_r, N_r$ определяются путём приведения правой части (1.11) к общему знаменателю.

Затем используют равенство числителей полученной и исходной дроби, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x .

Другой прием заключается в том, что переменной x в равенстве числителей задают ряд числовых значений, причем «удобными» значениями являются действительные корни знаменателя.

И в том и в другом случае образуется система алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

Пример 1.11 Разложить на простейшие дроби

$$\frac{x^2 - 4}{x \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)}.$$

Решение

Простому корню знаменателя $x=0$ соответствует одна простейшая дробь, корню $x=-1$ кратности 2 соответствуют две простейшие дроби. Квадратный

трёхчлен $x^2 + x + 1$ не имеет действительных корней, ему соответствует одна простейшая дробь, в числителе которой – линейный двучлен.

$$\frac{x^2 - 4}{x \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю, приравнявая затем числители правой и левой частей. Получим тождество:

$$A(x+1)^2(x^2+x+1) + Bx(x+1)(x^2+x+1) + Cx(x+1)^2 + x(Dx+E)(x+1)^2 \equiv x^2 - 4.$$

Подставляя в тождество различные значения x , получаем уравнения относительно неизвестных коэффициентов (в первую очередь используем значения x , равные корням знаменателя 0 и -1).

Пусть $x=0$, тогда $A=-4$.

Пусть $x=-1$, тогда $-C=-3$, $C=3$.

Задавая далее $x=1$, 2 , -2 , получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3B + 2D + 2E = 18, \\ 7B + 6D + 3E = 35, \\ 3B + 2D - E = 15. \end{cases}$$

Решаем систему одним из методов (Крамера, Гаусса или матричным). Получим $B=8$, $D=-4$, $E=1$. Запишем окончательный вид разложения заданной дроби на простейшие:

$$\frac{x^2 - 4}{x \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)} = -\frac{4}{x} + \frac{8}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{-4x+1}{x^2 + x + 1}.$$

Вывод

Определение интеграла от рациональной дроби производят в следующей последовательности.

1. Выясняют, правильная дробь, или неправильная. Если дробь правильная, переходят к пункту 2. Если дробь неправильная, то выделяют целую часть и правильную рациональную дробь.
2. Знаменатель правильной рациональной дроби разлагают на простейшие множители.
3. Правильную рациональную дробь представляют суммой простейших дробей 1-4 типов и определяют неизвестные коэффициенты.
4. Интеграл от исходной дроби равен сумме интегралов от целой части и простейших дробей.

Примечание – разложение рациональной дроби на целую часть и сумму простейших дробей можно выполнить в пакете MathCAD, смотри приложение Б.

1.8 Интегралы от иррациональных функций

1. Если подынтегральная функция является рациональной функцией R

переменной x в дробных степенях,
$$\int R\left(x, x^{\frac{n}{m}}, \dots, x^{\frac{p}{q}}\right) dx, \quad \text{то}$$

применяется подстановка $X = t^r$ где r - общий знаменатель дробей $\frac{n}{m}, \dots, \frac{p}{q}$.

Знак рациональной функции показывает, что над переменной x в дробных степенях производятся только рациональные операции (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень).

Пример 1.12

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \left(x = t^6 \right) = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t + 1}.$$

Подынтегральная функция – неправильная рациональная дробь. Выделим

целую часть:
$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}.$$

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6 \cdot \frac{t^3}{3} - 6 \cdot \frac{t^2}{2} + 6t - 6 \ln|t+1| = \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C. \end{aligned}$$

2. Если подынтегральная функция является рациональной функцией R выражений в дробных степенях,
$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{n}{m}}, \dots, (ax+b)^{\frac{p}{q}}\right) dx, \quad \text{то}$$

применяется подстановка $(ax+b) = t^r$ где r - общий знаменатель дробей $\frac{n}{m}, \dots, \frac{p}{q}$.

Пример 1.13

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx = \int \frac{x+3-3}{\sqrt{2x+3}} dx = \int \frac{x+3}{\sqrt{2x+3}} dx - \int \frac{3}{\sqrt{2x+3}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{(t^2-3)}{t} t dt = \frac{1}{2} \int (t^2-3) dt = \frac{t^3}{6} - \frac{3}{2} t + C = \frac{1}{6} \sqrt{(2x+3)^3} - \\
 &\quad - \frac{3}{2} \sqrt{2x+3} + C.
 \end{aligned}$$

3. Если подынтегральная функция является рациональной функцией R выражений в дробных степенях,

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{n}{m}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p}{q}} \right) dx, \text{ то применяется подстановка}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) = t^r, \text{ где } r - \text{общий знаменатель дробей } \frac{n}{m}, \dots, \frac{p}{q}. \text{ Из}$$

равенства $\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) = t^r$ выражают x и dx через новую переменную t и записывают интеграл с новой переменной.

1.9 Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ всегда можно преобразовать к интегралам от рациональной дроби с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Пусть $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Тогда $x = 2 \operatorname{arctg} t$, и

$$dx = \frac{2dt}{t^2 + 1}. \quad (1.12)$$

Функции $\sin x$ и $\cos x$ можно выразить через новую переменную.

$\sin x = \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)}$. Разделим числитель и знаменатель на

$$\cos^2 \frac{x}{2}. \quad \text{Тогда} \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}, \text{ или, окончательно,}$$

$$\sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}. \quad (1.13)$$

Аналогично, $\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}$. Иначе,

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}. \quad (1.14)$$

Пример 1.14 Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Решение. Преобразуем интеграл, используя формулы (1.12), (1.13), (1.14).

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} &= \int \frac{2dt / \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} \right)}{2t / \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} \right) + (-t^2) / \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} \right)} = \int \frac{2dt}{2t + 1 - t^2} = \\ &= \int \frac{2dt}{(\sqrt{2})^2 - (t-1)^2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + t - 1}{\sqrt{2} - t + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2} + 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка приводит к сложным рациональным дробям, когда функции $\sin x$ и $\cos x$ присутствуют в степенях выше первой. Поэтому в отдельных частных случаях применяются другие подстановки, которые быстрее приводят к цели.

Частные случаи тригонометрических выражений

1) Интеграл вида $\int R(\sin x) \cos x dx$ приводится к виду $\int R(t) dt$ подстановкой $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$.

Пример 1.15

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 2 \sin x - 3} &= \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x + 2 \sin x - 3} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 3} \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 3} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - 2^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1-2}{t+1+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 2}{\sin x + 3} \right| + C. \end{aligned}$$

2) Интеграл вида $\int R(\cos x, \sin x) dx$ приводится к виду $\int R(t) dt$ подстановкой $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$.

Пример 1.16

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1} = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x + 1} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = -\arctg(\cos x) + C.$$

3) Интеграл вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ приводится к виду $\int R(t) \frac{dt}{t^2 + 1}$ подстановкой

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \arctg t, \quad dx = \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

Пример 1.17

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg} x + 5} dx = \left(\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt \end{array} \right) = \int \frac{t^2 - 1}{(t + 5)(t^2 + 1)} dt.$$

Правильную рациональную дробь разложим на сумму простейших дробей.

$$\frac{t^2 - 1}{(t + 5)(t^2 + 1)} = \frac{A}{t + 5} + \frac{Bt + C}{t^2 + 1} = \frac{At^2 + A + Bt^2 + 5Bt + Ct + 5C}{(t + 5)(t^2 + 1)}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t в числителе исходной и полученной дроби.

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ 5B + C = 0, \\ A + 5C = -1, \end{cases} \Rightarrow A = \frac{12}{13}, \quad B = \frac{1}{13}, \quad C = -\frac{5}{13}.$$

$$\int \frac{t^2 - 1}{(t + 5)(t^2 + 1)} dt = \frac{12}{13} \int \frac{dt}{t + 5} + \int \frac{t/13 - 5/13}{t^2 + 1} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{12}{13} \int \frac{d(t+5)}{t+5} + \frac{1}{26} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - \frac{5}{13} \int \frac{dt}{t^2+1} = \\
&= \frac{12}{13} \ln|t+5| + \frac{1}{26} \ln(t^2+1) - \frac{5}{13} \operatorname{arctg} t + C = \\
&= \frac{12}{13} \ln|\operatorname{tg} x + 5| + \frac{1}{26} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) - \frac{5}{13} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C.
\end{aligned}$$

- 4) В интегралах вида $\int R(\sin^n x, \cos^m x, \sin 2x) dx$, где показатели степени n, m - четные, используется подстановка, похожая на универсальную: $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$. Формулы замены:

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{dt}{t^2+1}; \quad \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{t^2}{t^2+1}; \\
\cos^2 x &= \frac{1}{t^2+1}, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2t}{t^2+1}.
\end{aligned}$$

Пример 1.18

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 1} dx = \int \frac{1/(t^2+1)}{t^2/(t^2+1) + 1} \cdot \frac{dt}{(t^2+1)} = \int \frac{dt}{(2t^2+1)(t^2+1)} = \\
&= \sqrt{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \cdot t) - \operatorname{arctg} t + C = \sqrt{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} x) - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C.
\end{aligned}$$

- 5) Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где n, m - целые числа, положительные или отрицательные.

а) Один из показателей степени - нечетное число, например, $n = 2p + 1$, где p - целое число. Тогда возможно следующее преобразование:

$$\int \sin^m x \cdot \cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x \cdot (-\sin^2 x)^p d(\sin x). \text{ Затем } \sin x = t.$$

Пример 1.19

$$\begin{aligned}
&\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^4 x (-\sin^2 x) \cos x dx = \int \sin^4 x d \sin x - \\
&- \int \sin^6 x d \sin x = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C.
\end{aligned}$$

- б) Показатели степени положительные и четные:

$$n > 0, \quad m > 0, \quad n = 2p, \quad m = 2q, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

При вычислении интеграла применяются формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x).$$

Пример 1.20

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x dx &= \frac{1}{4} \int \cos^2 x \cdot \sin^2 2x dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2x)(1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{32} \sin 2x - \\ &\quad - \frac{1}{32} \int (\cos 2x + \cos 6x) dx = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{192} \sin 6x + C. \end{aligned}$$

6) Интегралы от произведения тригонометрических функций

$$\int \cos nx \cdot \cos mx dx, \quad \int \sin nx \cdot \cos mx dx, \quad \int \sin nx \cdot \sin mx dx$$

вычисляются с использованием формул, которые преобразуют произведение в сумму.

Напомним, что

$$\begin{aligned} \cos nx \cdot \cos mx &= \frac{1}{2} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x); \\ \sin nx \cdot \cos mx &= \frac{1}{2} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x); \\ \sin nx \cdot \sin mx &= \frac{1}{2} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x). \end{aligned}$$

Пример 1.21

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \sin 3x \cdot \cos 2,5x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 5,5x + \sin 0,5x) dx = \\ &= -\frac{1}{11} \cos 5,5x - \cos 0,5x + C. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \sin 3x \sin 6x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 3x - \cos 9x) dx = \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{18} \sin 9x + C$$

1.10 Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок

С помощью тригонометрических подстановок вычисляются интегралы вида $\int R\left(t, \sqrt{at^2 + bt + c}\right) dt$, то есть содержащие под знаком квадратного корня квадратный трехчлен.

Путем выделения полного квадрата под знаком радикала и перехода при этом к новой переменной x в зависимости от знака старшего коэффициента a и от знака дискриминанта D подкоренного выражения возможны следующие случаи.

1) Если $a > 0$, $D > 0$, то интеграл преобразуется к виду

$$\int R\left(x, \sqrt{m^2 x^2 - n^2}\right) dx. \text{ Подстановка } x = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{\cos u}, \quad dx = \frac{n}{m} \cdot \frac{\sin u}{\cos^2 u} du.$$

Пример 1.22

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{4x^2 - 9} \cdot dx = \left(x = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cos u}; \quad dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin u}{\cos^2 u} du \right) = \\ & = \int \sqrt{9 \left(\frac{1}{\cos^2 u} - 1 \right)} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin u}{\cos^2 u} du = \frac{9}{2} \int \operatorname{tg} u \cdot \frac{\sin u}{\cos^2 u} du = \frac{9}{2} \int \frac{\sin^2 u}{\cos^3 u} du = \\ & = -\frac{9}{2} \int \frac{\sin u \cdot d(\cos u)}{\cos^3 u}. \end{aligned}$$

Последний интеграл вычисляем по формуле интегрирования по частям.

Обозначим: $U = \sin u$, $dV = \frac{d(\cos u)}{\cos^3 u}$. Тогда $dU = \cos u du$,

$$V = \int \cos^{-3} u d(\cos u) = -\frac{1}{2 \cos^2 u}. \text{ Следовательно,}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{9}{2} \int \frac{\sin u \cdot d(\cos u)}{\cos^3 u} = -\frac{9}{2} \left(-\frac{\sin u}{2 \cos^2 u} + \int \frac{\cos u du}{2 \cos^2 u} \right) = \frac{9}{4} \cdot \operatorname{tg} u \cdot \frac{1}{\cos u} - \\ & -\frac{9}{4} \int \frac{du}{\cos u} = \frac{1}{2} x \sqrt{4x^2 - 9} - \frac{9}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

2) Если $a < 0$, $D > 0$, интеграл преобразуется к виду

$$\int R\left(x, \sqrt{n^2 - m^2 x^2}\right) dx. \text{ Подстановка } x = \frac{n}{m} \sin u, \quad dx = \frac{n}{m} \cos u du.$$

Пример 1.23

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - 4x^2} dx &= \left(x = \frac{3}{2} \sin u, \quad dx = \frac{3}{2} \cos u du, \quad u = \arcsin \frac{2}{3} x \right) = \\ &= \int \sqrt{9(1 - \sin^2 u)} \cdot \frac{3}{2} \cos u du = \frac{9}{2} \int \cos^2 u du = \frac{9}{2} \int \frac{1 + \cos 2u}{2} du = \\ &= \frac{9}{4} u + \frac{9}{8} \sin 2u + C = \frac{9}{4} u + \frac{9}{4} \sin u \cos u + C = \frac{9}{4} \arcsin \frac{2}{3} x + \\ &\quad + \frac{1}{2} x \sqrt{9 - 4x^2} + C. \end{aligned}$$

3) Если $a > 0$, $D < 0$, интеграл преобразуется к виду

$$\int R\left(x, \sqrt{m^2 x^2 + n^2}\right) dx. \text{ Подстановка } x = \frac{n}{m} \operatorname{tg} u, \quad dx = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du$$

Пример 1.24

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4x^2 + 9} \cdot dx &= \left(x = \frac{3}{2} \cdot \operatorname{tg} u; \quad dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du; \quad u = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} x \right) = \\ &= \int \sqrt{9 \operatorname{tg}^2 u + 9} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du = \left(\operatorname{tg}^2 u + 1 = \frac{1}{\cos^2 u} \right) = \frac{9}{2} \int \frac{du}{\cos^3 u} = \\ &= \frac{9}{2} \int \frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^3 u} du = \frac{9}{2} \int \frac{du}{\cos u} - \int \frac{\sin u du (\cos u)}{\cos^3 u} = \end{aligned}$$

(Решение второго интеграла рассмотрено в примере 1.22)=

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{4x^2 + 9} + \frac{9}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{3} x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

1.11 О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции

По сути вопроса можно сказать следующее:

во-первых, всякая непрерывная на отрезке функция имеет на нем первообразную [1];

во-вторых, не всякая первообразная может быть выражена комбинацией конечного числа элементарных функций.

Такие первообразные выражены «не берущимися» интегралами:

интеграл вероятностей - $\int e^{-x^2} dx$;

интегралы Френеля $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$

интегральные синус и косинус $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$;

интегральный логарифм $\int \frac{dx}{\ln x}$,

интегральная показательная функция $\int \frac{e^x}{x} dx$, и многими другими.

Определение первообразных указанных «не берущихся» интегралов будет рассмотрено в разделе «Ряды».

Примечание – если при выполнении индивидуального задания у вас не получается найти первообразную, это ещё не значит, что вам попался «не берущийся» интеграл.

Глава 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

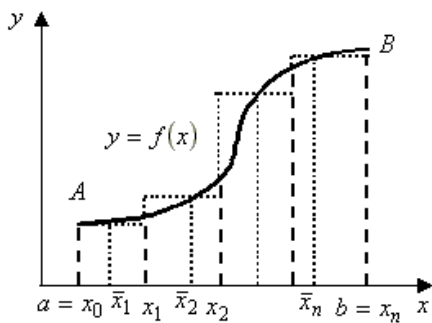
2.1 Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

К понятию определённого интеграла приводят множество прикладных задач:

- 1) вычисление площади криволинейной трапеции (см. следующий параграф);
- 2) вычисление массы неоднородного материального стержня;
- 3) вычисление работы, которую совершает переменная сила при перемещении материальной точки из одного положения в другое;
- 4) определение пути, пройденного материальной точкой при условии, что её скорость переменная.

2.2 Определённый интеграл как предел интегральных сумм

Пусть на отрезке $a \leq x \leq b$ определена функция $y = f(x) > 0$ (рисунок 2.1). Вычислим площадь фигуры $aABb$, которая ограничена графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (фигуру $aABb$ называют *криволинейной трапецией*). Для этого отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ разбиваем на n частей, внутри каждого частичного интервала $[x_{i-1}, x_i]$ выбираем произвольную точку $\bar{x}_i$.



Если принять значение функции в каждом частичном отрезке постоянным и равным $f(\bar{x}_i)$, то криволинейная трапеция будет заменена ступенчатой фигурой, площадь которой определяется по формуле

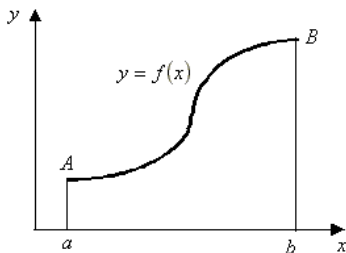
$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i. \quad (2.1)$$

Рисунок 2.1 – Площадь криволинейной трапеции

Сумма (2.1) называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина частичного интервала. Площадь S_n приблизительно равна площади криволинейной трапеции $aABb$.

Определение. Если существует предел интегральных сумм S_n при условии, что $n \rightarrow \infty$ и длина каждого частичного отрезка стремится к нулю, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки и от выбора точек $\bar{x}_i$, то он называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\max \Delta x \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i. \quad (2.2)$$



При этом определённый интеграл равен площади криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. В этом состоит геометрический смысл определённого интеграла (см. рисунок 2.2).

Рисунок 2.2 – Геометрический смысл определённого интеграла $S_{aABb} = \int_a^b f(x) dx$

Название элементов определённого интеграла $\int_a^b f(x) dx$: $\int$ - знак

определённого интеграла, где a - нижний предел, b - верхний предел интегрирования; x - переменная интегрирования; dx - дифференциал переменной интегрирования; $f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

2.3 Свойства определённого интеграла

Свойства определённого интеграла доказываются на основе его определения (2.2), а также могут быть объяснены с помощью геометрического смысла.

1. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.
2. Постоянный множитель выносится за знак интеграла.
3. При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на

противоположный $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$. Это объясняется тем, что при

перестановке пределов интегрирования и интегрировании от точки b к точке a все значения $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$ становятся отрицательными. При этом значения $f(x_i)$ не изменяются, поэтому интегральная сумма (2.1) меняет знак на противоположный и предел интегральной суммы (2.2) также меняет знак.

4. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю, что можно объяснить как следствие предыдущего свойства: $\int_a^a f(x) dx = 0$.

5. Для произвольного расположения точек a, b, c на числовой оси справедливо равенство $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. Действительно, если $a < c < b$, то $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. Это означает, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ - сумма площадей криволинейных трапеций $aACc$ и $cCBb$ (см. рисунок 2.3).

Если же $a < b < c$, то $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$. Переставим интегралы

местами. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$. В последнем интеграле поменяем местами

пределы интегрирования. Тогда $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

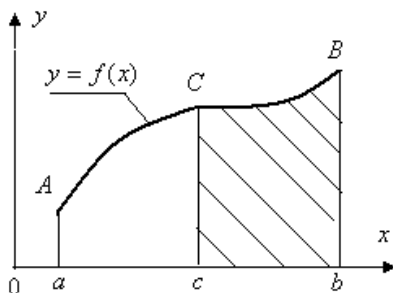


Рисунок 2.3 – Свойство 5 определенного интеграла

6. Интеграл от знакопостоянной функции есть число того же знака, что и функция: $\int_a^b f(x) dx > 0$, если $f(x) > 0$; $\int_a^b f(x) dx < 0$, если $f(x) < 0$.

Действительно, если в равенстве (2.2) все значения $f(\bar{x}_i) > 0$, то и предел положителен, если все значения $f(\bar{x}_i) < 0$, то и предел отрицательный.

7. Абсолютная величина интеграла не превосходит интеграла от абсолютной

величины функции: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$. Поясним это свойство на

примере интеграла $\int_0^{2\pi} \sin x dx$. График функции $y = \sin x$ показан на

рисунке 2.4а. По свойству $\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$. Площади под

кривой на этих двух отрезках равны, но интеграл на отрезке $[0; \pi]$ положителен, а на отрезке $[\pi; 2\pi]$ интеграл отрицателен. Следовательно,

$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$. График функции $y = |\sin x|$ показан на рисунке 2.4б.

Функция на всем отрезке $[0; 2\pi]$ положительна, интеграл

$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx > 0$. Итак, $\left| \int_0^{2\pi} \sin x dx \right| < \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$.

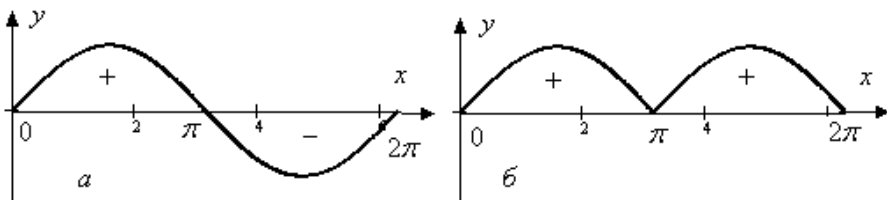


Рисунок 2.4 – а) График функции $y = \sin x$, б) График функции $y = |\sin x|$

8. Определённый интеграл не зависит от переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

9. Оценка определенного интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a; b]$ и имеет на нем наименьшее и наибольшее значения, равные m, M , то значение интеграла можно оценить по формуле:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

На рисунке 2.5 функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ имеет наименьшее значение в точке a , $m = f(a)$, наибольшее – в точке b , $M = f(b)$. Выполняется неравенство площадей: $S_{aADb} < S_{aABb} < S_{aCBb}$, что соответствует указанному выше неравенству.

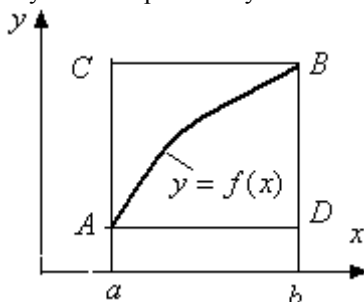


Рисунок 2.5 – К оценке определённого интеграла.

Пример 2.1 Оценить величину интеграла $\int_1^e \ln x dx$.

Решение. Логарифмическая функция – возрастающая, поэтому на концах интервала интегрирования она принимает наименьшее и наибольшее значения. $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$, длина интервал $(e-1)$. Тогда справедливо двойное неравенство:

$$0 < \int_1^e \ln x dx < (e-1), \text{ или, } 0 < \int_1^e \ln x dx < 1,7182818284...$$

10. Если подынтегральная функция – непрерывная, то внутри отрезка интегрирования $[a; b]$ существует хотя бы одна точка C , такая, что значение функции в ней, умноженное на длину отрезка интегрирования, равно определённому интегралу (теорема о среднем).

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$$

Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ численно равна площади прямоугольника $aNMb$ с основанием $[a, b]$ и высотой $f(c)$ (см. рисунок 2.6).

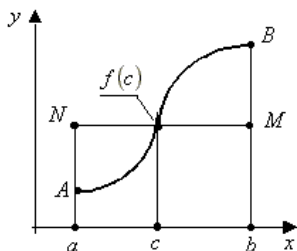


Рисунок 2.6 – Теорема о среднем

2.4 Определенный интеграл с переменным пределом интегрирования

Исходя из определения (2.2) определённый интеграл можно вычислить как предел интегральных сумм. В учебнике Пискунова Н.С. [1] дан пример такого вычисления определённого интеграла. Показано, что вычисление на основе определения (2.2) связано с большими трудностями.

Используя глубокую связь, существующую между дифференцированием и интегрированием Исаак Ньютон (английский физик, математик и астроном, 1642 – 1727 г.г.) и Лейбниц, Готфрид Вильгельм (немецкий философ, логик, математик, и прочее, 1646 – 1716 г.г.) открыли удобный метод вычисления определённых интегралов.

Определенный интеграл – число, величина которого зависит от пределов

интегрирования, т.е. $\int_a^b f(x)dx = I(a; b)$. Зафиксируем нижний предел. Если

верхний предел является переменной величиной, то сам интеграл – функция этой переменной:

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x).$$

Теорема. Производная от определённого интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела (при условии, что подынтегральная функция непрерывна).

Доказательство

$$\Phi'(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(\xi + \Delta x) - \Phi(\xi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{\xi+\Delta x} f(t) dt - \int_a^{\xi} f(t) dt \right) =$$

(первый интеграл запишем по свойству 4 суммой двух интегралов) =

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{\xi} f(t) dt + \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(t) dt - \int_a^{\xi} f(t) dt \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(t) dt =$$

$$(\text{к интегралу применим теорему о среднем}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} f(\xi) \Delta x = (\text{где точка}$$

ξ расположена между точками ξ и $\xi + \Delta x$, и при $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \xi \rightarrow \xi$)

$$= \lim_{\xi \rightarrow \xi} f(\xi) = f(\xi), \text{ ч.т.д.}$$

Таким образом, функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ является первообразной для функции $f(x)$.

Доказанная теорема является одновременно теоремой о существовании первообразной функции: «Всякая непрерывная функция имеет первообразную, а следовательно, и неопределённый интеграл» (см. §1.11).

С помощью теоремы о производной от определённого интеграла по переменному верхнему пределу выводится основная формула интегрального исчисления – *формула Ньютона – Лейбница*.

2.5 Формула Ньютона – Лейбница

Теорема. Если $F(x)$ - некоторая первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2.3)$$

Формула (2.3) называется формулой Ньютона – Лейбница.

Доказательство

Пусть $F(x)$ - первообразная от $f(x)$. По предыдущей теореме и

$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ является первообразной от $f(x)$. Две первообразных от

одной функции отличаются на произвольную постоянную (см. теорему из §1.1).

Можно записать $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$. Последнее равенство запишем при

$$x = a: \int_a^a f(t)dt = F(a) + C \Rightarrow 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a). \quad \text{Тогда}$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a). \text{ Запишем последнее равенство при } x = b:$$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Это и есть формула Ньютона – Лейбница.

Важность формулы в том, что она даёт простой способ вычисления определённого интеграла, который позволяет не прибегать к вычислению предела интегральных сумм S_n .

Формула (2.3) показывает, что для вычисления определённого интеграла, во-первых, нужно найти первообразную подынтегральной функции. Во-вторых, нужно вычислить приращение первообразной на интервале интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Применение формулы Ньютона – Лейбница и свойств определённого интеграла покажем на примере.

Пример 2.2 Исследовать и вычислить интеграл $\int_0^\pi \sin x dx$.

Решение. Исследуем свойства интеграла.

$$1) \sin x > 0 \text{ при } x \in (0; \pi), \text{ следовательно, } \int_0^\pi \sin x dx > 0.$$

2) Наименьшее значение на $[0; \pi]$, $\sin x = 0$; наибольшее значение на $[0; \pi]$, $\sin x = 1$. Длина отрезка интегрирования равна π . Оценка

интеграла: $0 \cdot \pi < \int_0^{\pi} \sin x dx < 1 \cdot \pi$, $0 < \int_0^{\pi} \sin x dx < \pi$.

3) Теорема о среднем: $\int_0^{\pi} \sin x dx = \sin(c) \cdot \pi$, откуда $\sin(c) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx$.

Вычислим интеграл: $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2$.

Тогда $\sin(c) = \frac{2}{\pi} \approx 0,63$. На рисунке 2.7 показан график функции

$y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$, а также проведена прямая с уравнением $y = 2/\pi$. Она пересекает график функции в двух точках. Следовательно, внутри отрезка $[0; \pi]$ существуют две точки, c_1 и c_2 , в которых

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = \sin(c_1) \cdot \pi = \sin(c_2) \cdot \pi, \text{ то есть } \int_0^{\pi} \sin x dx = S_{ABCD}.$$

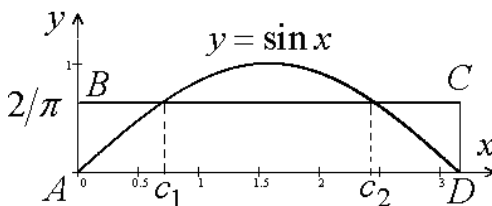


Рисунок 2.7 – К примеру 2.2

2.6 Способы вычисления определённого интеграла

Общий способ. Общее правило вычисления определённого интеграла заключается в применении формулы Ньютона – Лейбница (2.3). Для этого нужно найти первообразную и вычислить её приращение на интервале интегрирования (см. пример 2.2).

Интегрирование по частям. Формула интегрирования по частям (1.6), применяемая в неопределённом интеграле, справедлива и для определённого интеграла со всеми рекомендациями по её применению. Различие

заключается в том, что для найденной первообразной в определённом интеграле нужно найти её приращение.

Формула интегрирования по частям в определённом интеграле имеет вид:

$$\int_a^b U dV = U \cdot V \Big|_a^b - \int_a^b V dU.$$

Рекомендации по применению метода интегрирования по частям в определённом интеграле остаются такие же, как в §1.3.

Пример 2.3 Вычислить интеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln x dx &= \left(\ln x = U, \quad dU = \frac{dx}{x} \right) = \left(\frac{x^3}{3} \ln x \right) \Big|_1^e - \\ &- \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1}{3} \ln 1 - \left(\frac{x^3}{9} \right) \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Интегрирование методом подстановки. Пусть для вычисления

определённого интеграла $\int_a^b f(x) dx$ применяется подстановка $x = g(t)$.

В этом случае пределы интегрирования изменяются, и их рассчитывают по формулам: $a = g(A)$, $b = g(B)$. Справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_A^B f(g(t)) \cdot g'(t) dt. \quad (2.4)$$

При использовании формулы (2.4) не нужно переходить к старой переменной интегрирования после определения первообразной, как это делается в неопределённом интеграле.

Пример 2.4 Вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

Вычислим интеграл двумя способами, используя две различные подстановки.

1) Используем тригонометрическую подстановку (см. §1.10). Пусть $x = 2\operatorname{tg}t$, $dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}$. Пересчитываем пределы интегрирования. Нижний предел: $0 = 2\operatorname{tg}t$, $t = 0$. Верхний предел интегрирования:

$$2 = 2\operatorname{tg}t, \quad \operatorname{tg}t = 1, \quad t = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \quad \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}} &= \int_0^{\pi/4} \frac{2\operatorname{tg}t}{\sqrt{4+4\operatorname{tg}^2 t}} \cdot \frac{2dt}{\cos^2 t} = \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin t dt}{\cos^2 t} = -2 \int_0^{\pi/4} \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t} = \left(\frac{2}{\cos t} \right) \Big|_0^{\pi/4} = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

2) Обозначим $t = 4 + x^2$, тогда $dt = 2x dx$. Пересчитаем пределы интеграла на новую переменную: $x = 0 \Rightarrow t = 4$, $x = 2 \Rightarrow t = 8$. Запишем интеграл с новой переменной, предварительно умножив и разделив на 2:

$$\frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2x dx}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{t}}{1/2} \Big|_4^8 = \sqrt{8} - \sqrt{4} = 2\sqrt{2} - 2.$$

Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке симметричном относительно нуля

1. Если функция $f(x)$ - четная функция (функция определена на симметричном нулю интервале и $f(-x) = f(x)$), то определенный интеграл от функции на отрезке $[-a; a]$ равен удвоенному интегралу от этой функции, взятому по правой половине отрезка:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Доказательство

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx. \quad \text{Определяем отдельно интеграл}$$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \left(\begin{array}{l} x = -t; \quad dx = -dt; \quad f(-x) = f(x) \\ x = -a \Leftrightarrow t = a \end{array} \right) = - \int_a^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt.$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

2. Если функция $f(x)$ — нечетная функция (функция определена на симметричном нулю интервале и $f(-x) = -f(x)$), то определенный интеграл от функции на отрезке $[-a; a]$ равен нулю:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Доказательство

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx. \quad \text{Определяем отдельно интеграл}$$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \left(\begin{array}{l} x = -t; \quad dx = -dt; \quad f(x) = -f(-x) \\ x = -a \Leftrightarrow t = a \end{array} \right) = \int_a^0 f(-t) (-dt).$$

$$\int_a^0 f(-t) (-dt) = - \int_0^a f(-t) dt. \quad \text{Тогда} \quad \int_{-a}^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

Пример 2.5 Вычислить интеграл: $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (x^{13} - 5x^{11} + 6 \cos 2x) dx.$

Решение

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (x^{13} - 5x^{11} + 6 \cos 2x) dx &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} x^{13} dx - 5 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} x^{11} dx + \\ &+ 6 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos 2x dx. \end{aligned}$$

В двух первых интегралах подынтегральная функция

нечетная, в третьем интеграле подынтегральная функция четная. Поэтому,

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (x^{13} - 5x^{11} + 6 \cos 2x) dx = 0 + 6 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos 2x dx = 12 \int_0^{\pi/6} \cos 2x dx =$$

$$= 6 \sin 2x \Big|_0^{\pi/6} = 6 \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin 0 \right) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

2.7 Несобственные интегралы

Понятие несобственного интеграла является обобщением понятия определенного интеграла от непрерывной функции на конечном отрезке.

2.6.1 Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях аргумента $a \leq x < \infty$. Для такого бесконечного интервала понятие интегральной суммы не определено.

Если существует конечный предел от интеграла с переменным верхним пределом

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

то он называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на интервале $[a, \infty)$ и обозначается интегралом, в верхнем пределе которого стоит знак бесконечности:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx. \quad (2.5)$$

В этом случае несобственный интеграл *существует (сходится)*. Если не существует конечного предела (2.5), то несобственный интеграл *не существует (расходится)*.

Аналогично определяются несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом и несобственный интеграл с бесконечными верхним и нижним пределами:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx; \quad (2.6)$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \quad (2.7)$$

Формулы (2.5), (2.6), (2.7) кроме определения несобственного интеграла показывают способ его вычисления.

2.6.2 Интегралы от разрывных функций

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \leq x < c$, а при $x = c$ либо не определена, либо терпит разрыв. В этом случае нельзя говорить об интеграле $\int_a^c f(x) dx$ как о пределе интегральных сумм, так как

функция $f(x)$ не является непрерывной на интервале $[a; c]$.

Если существует конечный предел интеграла от разрывной при $x=c$ функции, то он называется несобственным сходящимся интегралом:

$$\lim_{b \rightarrow c-0} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \quad (2.8)$$

В противном случае интеграл называется расходящимся.

Если функция имеет разрыв при $x=a$, то по определению

$$\lim_{b \rightarrow a+0} \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \quad (2.9)$$

Если функция имеет разрыв при $x=c$, где точка c лежит внутри интервала интегрирования $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c-0} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c+0} \int_t^b f(x) dx. \quad (2.10)$$

Пример 2.6 Вычислить несобственные интегралы или установить их

расходимость: а) $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение

а) Интеграл с бесконечным верхним пределом вычисляем по формуле (2.5):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x^2} d(x^2) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[e^{-x^2} \right]_0^b = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[e^{-b^2} - e^0 \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Интеграл сходится.

б) Несобственный интеграл имеет разрыв в нижнем пределе интегрирования функции, интеграл вычисляем по формуле (2.9):

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \rightarrow 0+0} \int_c^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{c \rightarrow 0+0} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_c^4 = \lim_{c \rightarrow 0+0} \left[2 \cdot 4^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot c^{\frac{1}{2}} \right] = 4.$$

Интеграл сходится.

2.8 Интегралы, зависящие от параметра

Рассмотрим интеграл вида $I = \int_a^b f(x; \lambda) dx$, где λ - параметр

(произвольная постоянная), то есть величина в процессе интегрирования постоянная, но, вообще, может принимать различные значения. Тогда результат интегрирования зависит от параметра λ : $I = I(\lambda)$.

Интеграл с параметром в подынтегральной функции $I = \int_a^b f(x; \lambda) dx$

обладает следующими свойствами.

1. Если подынтегральная функция при $x \in [a; b]$ непрерывна относительно параметра λ (бесконечно малым изменениям параметра соответствуют бесконечно малые изменения подынтегральной функции), то и интеграл $I(\lambda)$ непрерывно зависит от параметра λ .

2. Дифференцирование интеграла по параметру λ сводится к дифференцированию подынтегральной функции по параметру λ , то есть

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_a^b f'_\lambda(x; \lambda) dx.$$

3. Интегрирование интеграла $I(\lambda)$ по параметру сводится к интегрированию подынтегральной функции:

$$\int_\alpha^\beta I(\lambda) d\lambda = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x; \lambda) d\lambda \right) dx.$$

Пример 2.7 Изучим на примере интеграла с параметром в подынтегральной функции $I = \int_0^1 (\lambda^2 + 3\lambda^2 x) dx$ выполнение свойств

интеграла. Для этого:

- вычислим интеграл, как функцию параметра λ ;
- определим производную интеграла по параметру;
- проинтегрируем в интервале изменения параметра $\lambda \in \mathbb{R}$; $\int_{\lambda}^{\lambda} \dots$ заданный определенный интеграл.

Решение

$$a) \int_0^1 (\lambda^2 + 3\lambda^2 x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3\lambda^2 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \lambda^2, \quad I = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \lambda^2.$$

Подынтегральная функция $(\lambda^2 + 3\lambda^2 x)$ и интеграл $I = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \lambda^2$ непрерывны относительно параметра λ . Выполняется 1-е свойство.

$$b) \text{ Дифференцируем интеграл по параметру. } I'_\lambda = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \lambda^2 \right)'_\lambda = 3\lambda.$$

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны, } \left(\int_0^1 (\lambda^2 + 3\lambda^2 x) dx \right)'_\lambda &= \int_0^1 (\lambda^2 + 3\lambda^2 x)'_\lambda dx = \\ &= \int_0^1 6\lambda x dx = 6\lambda \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 3\lambda. \text{ Выполняется 2-е свойство.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \text{ Изучаем третье свойство. } \int_2^4 I d\lambda &= \int_2^4 \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \lambda^2 \right) d\lambda = \left(\frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda^3}{2} \right) \Big|_2^4 = \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4^3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{2^3}{2} = 28 \frac{2}{3}. \text{ С другой стороны, } \int_0^1 \left(\int_2^4 (\lambda^2 + 3\lambda^2 x) d\lambda \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^2 \lambda + 3x \frac{\lambda^3}{3} \right) \Big|_2^4 dx = \int_0^1 (\lambda x^2 + 56x) dx = \left(\frac{2}{3} x^3 + 28x^2 \right) \Big|_0^1 = 28 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Выполняется 3-е свойство.

2.9 Приближенные и численные методы интегрирования

2.8.1. Приближенные методы интегрирования

Если подынтегральная функция определенного интеграла не имеет первообразной в элементарных функциях, слишком сложная, или задана табличным способом, определенный интеграл можно вычислить приближенно методами численного интегрирования.

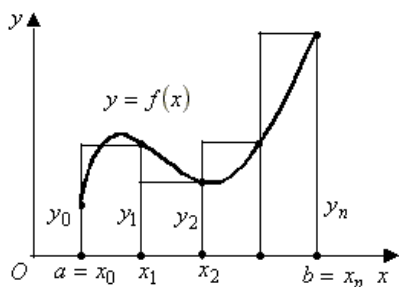
Формулы численного интегрирования дают приближенные значения определенного интеграла, если известны значения подынтегральной функции в некоторых точках (узлах) интервала интегрирования. Формулы могут быть объяснены с точки зрения геометрического смысла определенного интеграла.

Метод прямоугольников. Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Величина интеграла численно равна площади криволинейной трапеции (см. §2.2, рисунки 2.1, 2.2).

Отрезок интегрирования $[a; b]$ разобьём точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на n равных частичных отрезков, длина

каждого из которых равна $h = \frac{b-a}{n}$.



Величина h называется шагом интегрирования.

Значения подынтегральной функции $y = f(x)$ в точках разбиения обозначим $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$. Заменяем криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, состоящей из прямоугольников с одинаковыми основаниями h .

Рисунок 2.8 – Метод прямоугольников

Пусть за высоту каждого i -го прямоугольника принято значение y_i , восстановленное из правого конца его основания, как показано на рисунке 2.8. Тогда площадь ступенчатой фигуры, приближенно равной определенному интегралу, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_1 h + y_2 h + \dots + y_n h = h \sum_{i=1}^n y_i. \quad (2.11)$$

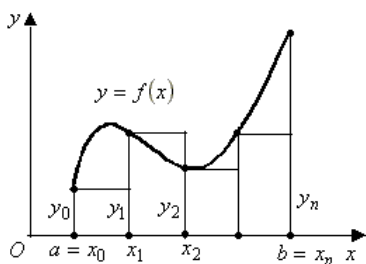


Рисунок 2.9 – Метод прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_0 h + y_1 h + \dots + y_{n-1} h = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i. \quad (2.12)$$

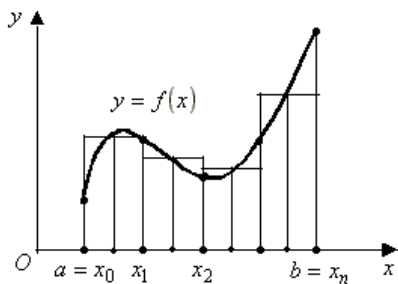


Рисунок 2.10 – Метод прямоугольников

За высоту каждого i -го прямоугольника можно принято значение подынтегральной функции, вычисленное в середине каждого частичного отрезка (рисунок 2.10). Тогда формула численного интегрирования имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right). \quad (2.13)$$

Формулы (2.11), (2.12), (2.13) называются *формулами прямоугольников*.

Метод трапеций.

Площадь криволинейной трапеции можно вычислить приближенно другим способом. Соединим точки графика функции $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ отрезками прямых (рисунок 2.11). При этом каждая частичная криволинейная трапеция заменяется обычной трапецией. Используя формулу вычисления площади трапеции, вычислим приближенно интеграл.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h.$$

Перегруппируем слагаемые в правой части, получим:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \cdot h. \quad (2.14)$$

Формула (2.14) называется *формулой трапеций*.

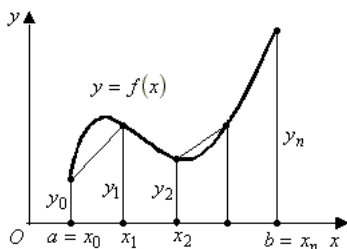


Рисунок 2.11 – Метод трапеций

Метод Симпсона. Пусть отрезок интегрирования $[a, b]$ разбит на $2n$ одинаковых частей точками $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, ..., $x_{2n} = b$, где $h = \frac{b-a}{2n}$. Через каждые три точки (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) , $i = 1, 2, \dots$ проведем график квадратичной параболы. Тогда график функции $y = f(x)$ будет заменен n частями графиков квадратичных парабол. Полученная таким образом кривая более точно заменяет график функции $y = f(x)$, чем ступенчатая или ломаная линии. Так получена *формула Симпсона* для приближенного вычисления интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})].$$

Формулы (2.11)-(2.14) осуществляют вычисление интеграла с погрешностью, пропорциональной h^2 . Например, если число точек деления увеличить в 2 раза, то точность увеличится примерно в 4 раза. Формула Симпсона значительно точнее. Она вычисляет интеграл с погрешностью, пропорциональной h^4 . Это означает, что при увеличении числа точек деления в 2 раза, точность увеличивается в 16 раз, то есть, более чем на порядок.

2.8.2 Вычисление интегралов в математическом пакете Mathcad

Инженерные расчеты невозможно представить без применения математических пакетов программ, одним из которых является Mathcad [5]. В указанном пакете удобно вычислять все типы интегралов. Приведем примеры определения первообразных и вычисления интегралов.

1) Неопределенный интеграл

$$\int \left(x^2 + \cos\left(\frac{x}{3}\right) \right) dx \rightarrow \frac{1}{3} \cdot x^3 + 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot x\right)$$

2) Определенный интеграл

$$\int_1^4 \left(x^2 + \sin(2 \cdot x) \right) dx \rightarrow 21 - \frac{1}{2} \cdot \cos(8) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2)$$

$$\int_1^4 \left(x^2 + \sin(2 \cdot x) \right) dx = 20.865$$

Примеры показывают, что результат вычисления определенного интеграла можно вывести как в аналитическом, так и в численном виде.

3) Примеры вычисления несобственных интегралов, расходящегося и сходящегося.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \rightarrow \infty \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \rightarrow 1$$

Значительным удобством является то, что интегралы в пакете Mathcad записываются так, как они изображаются на бумаге.

4) При вычислении интегралов от рациональных дробей трудоемкую операцию разложения дроби на сумму простейших дробей можно выполнять в MathCAD, см. **Приложение Б**. Рациональная дробь может быть как правильной, так и неправильной. В последнем случае будет выделена целая часть.

2.10 Приложения определенных интегралов

2.9.1 Вычисление площадей

В параграфе 2.2 указано, что если на отрезке $[a; b]$ $f(x) > 0$, то площадь криволинейной трапеции вычисляется как интеграл $S = \int_a^b f(x) dx$.

Если функция $f(x)$ меняет знак на $[a; b]$, то интеграл по всему отрезку разбиваем на сумму частичных отрезков. Интеграл положителен там, где функция положительная и отрицателен там, где функция отрицательная, смотри рисунок 2.12. Чтобы получить сумму площадей, нужно найти сумму абсолютных величин интегралов по частичным отрезкам:

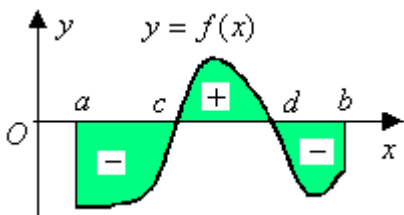
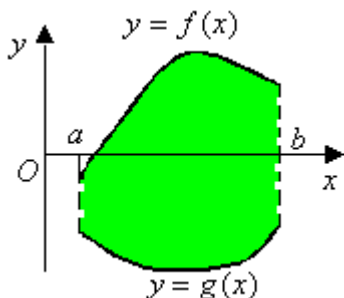


Рисунок 2.12 – Вычисление площади

$$S = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \left| \int_d^b f(x) dx \right|,$$

$$S = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^b f(x) dx.$$

Если нужно вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на отрезке $[a; b]$, причем $f(x) > g(x)$, то



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad (\text{см. рисунок 2.13}).$$

Рисунок 2.13 – Вычисление площади

В полярной системе координат (рисунок 2.14) площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi.$$

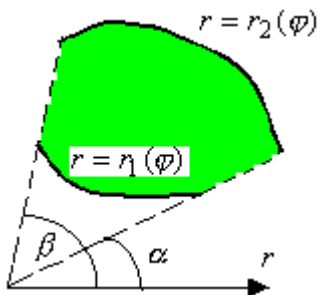
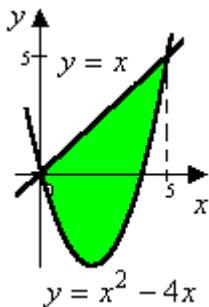


Рисунок 2.14 – Вычисление площади

Пример 2.8 Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2 - 4x$, $y = x$; б) $r = 2\cos 3\varphi$.

Решение



а) Две кривые образуют замкнутую кривую, пересекаясь в точках $x = 0$ и $x = 5$ (см. рисунок 2.15).

$$S = \int_0^5 (-x^2 + 4x) dx = \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)_0^5 = \frac{125}{6}.$$

Рисунок 2.15 – Вычисление площади в декартовой системе координат

б) Кривая задана в полярной системе координат и представляет из себя так называемую «трех лепестковую розу» (см. рисунок 2.16). Для вычисления площади внутри лепестков вычислим площадь половины лепестка при $0 \leq \varphi \leq \pi/6$, умножив результат на 6.

$$\begin{aligned} S &= \frac{6}{2} \int_0^{\pi/6} r^2 d\varphi = 3 \int_0^{\pi/6} 4 \cos^2 3\varphi d\varphi = \\ &= \frac{12}{2} \int_0^{\pi/6} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = \pi \end{aligned}$$

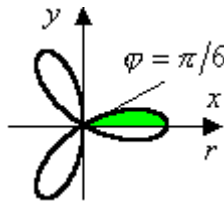


Рисунок 2.16 – Трёх лепестковая роза

2.9.2 Вычисление работы с помощью определенного интеграла

Пусть материальная точка движется по прямой Ox под действием силы $F(x)$, направление которой совпадает с направлением движения точки. Пусть сила $F(x)$ непрерывно изменяется в зависимости от положения материальной точки. Работа A силы $F(x)$ по перемещению материальной точки из положения $x = a$ в положение $x = b$ равна интегралу

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

2.9.3 Вычисление пройденного пути

Если $V(t)$ - скорость материальной точки, зависящая от времени t , то пройденный путь S за отрезок времени $[t_1, t_2]$ равен определенному

интегралу
$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt.$$

Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1 Определение функции нескольких переменных. Области, линии и поверхности уровня

Если каждой паре (x, y) значений двух, независимых друг от друга, переменных величин x и y , из некоторой области их изменения D , соответствует определённое значение величины U , то говорят, что U есть *функция двух переменных x и y , определённая в области D* .

Функция двух переменных обозначается так: $U = f(x, y)$, $z = f(x, y)$. Функция может иметь не только две, но и три и более независимых переменных, например, $U = f(x, y, z, t)$.

Всё новое, что возникает в дифференциальном исчислении при переходе от функции одной переменной к функции нескольких переменных, свойственно уже функции двух переменных. Поэтому рассматриваем функцию двух переменных с кратким обобщением на функции нескольких переменных.

Совокупность пар (x, y) значений x и y , при которых определяется функция $U = f(x, y)$, называется *областью существования* или *областью определения* этой функции. При этом пара (x, y) определяет точку $M(x, y)$ в области существования. Следовательно, область определения – часть плоскости xOy . *Окрестностью* точки $M(x, y)$ является открытый круг малого радиуса с центром в этой точке.

В области D существует множество точек, в которых функция $U = f(x, y)$, принимает одинаковые значения. Пусть $U = C = \text{Const}$. Тогда уравнение $f(x, y) = C$ определяет линию в плоскости xOy , во всех точках которой $U = C$. Такая линия называется *линией уровня*. Если задана функция трёх переменных $U = f(x, y, z)$, то уравнение $f(x, y, z) = C$ определяет поверхность в пространстве, во всех точках которой $U = C$. Такая поверхность называется *поверхностью уровня*.

Пример 3.1 Пусть $U = x^2 + 2y^2$. Значениям функции $U = 4$, $U = 9$ соответствуют линии уровня $x^2 + 2y^2 = 4$, $x^2 + 2y^2 = 9$. Это эллипсы, канонические уравнения которых

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1, \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{4,5})^2} = 1.$$

3.2 Частные приращения и частные производные. Теорема о равенстве частных смешанных производных

Если независимой переменной x функции $U = f(x, y)$ дать приращение Δx не изменяя при этом вторую переменную y , то функция U получит *частное приращение по x* :

$$\Delta_x U = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично определяется *частное приращение функции U по переменной y* :

$$\Delta_y U = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Частной производной по x функции $U = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения функции по переменной x , к приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю.

Частная производная обозначается одним из символов:

$$U'_x = f'_x(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Таким образом,

$$U'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

Аналогично, частная производная по y

$$U'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y U}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (3.2)$$

Из определений (3.1) и (3.2) следует, что частная производная по одной переменной вычисляется при условии, что другие независимые переменные являются постоянными величинами. Все правила дифференцирования функции одной переменной сохраняются.

Пример 3.2 Дана функция двух переменных, найти её частные производные.

$$U = x^2 y + 2xy - xy^2 + x + 3y.$$

Решение

$$U'_x = 2xy + 2y - y^2 + 1, \quad U'_y = x^2 + 2x - 2xy + 3.$$

Частные производные U'_x, U'_y функции двух переменных в общем случае также являются функциями двух переменных, которые можно дифференцировать по каждой независимой переменной. При этом получим четыре производных *второго порядка*:

$$U''_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad U''_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad U''_{yx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad U''_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Частные производные U''_{xy}, U''_{yx} называют *смешанными*.

$$\text{Пример 3.3} \quad z = x^2 y + \sin(x - 3y).$$

Решение

Определяем первые и вторые частные производные:

$$z'_x = 2xy + 2 \cos(x - 3y), \quad z'_y = x^2 - 3 \cos(2x - 3y);$$

$$z''_{xx} = (2xy + 2 \cos(2x - 3y))'_x = 2y - 4 \sin(2x - 3y);$$

$$z''_{yy} = (x^2 - 3 \cos(2x - 3y))'_y = -9 \sin(2x - 3y);$$

$$z''_{xy} = (2xy + 2 \cos(2x - 3y))'_y = 2x + 6 \sin(2x - 3y);$$

$$z''_{yx} = (x^2 - 3 \cos(2x - 3y))'_x = 2x + 6 \sin(2x - 3y).$$

Равенство в примере двух частных смешанных производных $z''_{xy} = z''_{yx}$ не является случайным. На этот счёт существует *теорема о равенстве частных смешанных производных*:

Теорема. Если функция $U = f(x, y)$ и её частные производные первого и второго порядка определены и непрерывны в некоторой области D , то

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Частные производные обозначаются также символами $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$,

$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, что позволяет указать по какой независимой переменной определяется частная производная.

3.3 Полное приращение и полный дифференциал

Если в функции $U = f(x, y)$ обе независимые переменные получают приращение, то функция получает *полное приращение*

$$\Delta U = f(\overset{\curvearrowright}{x + \Delta x, y + \Delta y}) - f(\overset{\curvearrowright}{x, y}). \quad (3.3)$$

Главная часть полного приращения функции называется *полным дифференциалом функции*, обозначается dU и вычисляется по формуле

$$dU = U'_x \cdot \Delta x + U'_y \cdot \Delta y. \quad (3.4)$$

Полный дифференциал отличается от полного приращения на бесконечно малую высшего порядка малости. При малых значениях Δx , Δy имеет место приближённое равенство $dU \approx \Delta U$, которое используется при приближённом вычислении функции в приращённой точке:

$$f(\overset{\curvearrowright}{x + \Delta x, y + \Delta y}) \approx f(x, y) + U'_x \cdot \Delta x + U'_y \cdot \Delta y. \quad (3.5)$$

Для функции трёх переменных $U = f(x, y, z)$ полный дифференциал вычисляется по формуле

$$dU = U'_x \cdot \Delta x + U'_y \cdot \Delta y + U'_z \cdot \Delta z. \quad (3.6)$$

Пример 3.4 Заменяя приращение функции дифференциалом, приближённо вычислить $\sqrt[2]{0,96}$.

Решение

Вводим функцию двух переменных $U = \sqrt[2]{xy}$. Исходными значениями независимых переменных принимаем $x = 1$, $y = 3$. Тогда их приращения $\Delta x = 0,03$; $\Delta y = -0,04$. Значение функции в исходной точке $U(1;3) = 1^3 = 1$. Полный дифференциал вычисляется в исходной точке.

$$dU = U'_x \cdot \Delta x + U'_y \cdot \Delta y = y \cdot x^{y-1} \cdot \Delta x + x^y \cdot \ln x \cdot \Delta y,$$

$$dU = \left(\begin{matrix} x=1 \\ y=3 \end{matrix} \right) = 3 \cdot 1 \cdot 0,03 + 1 \cdot 0 \cdot (-0,04) = 0,09.$$

Теперь по формуле (3.5) вычисляем заданное число как значение функции в приращённой точке:

$$\sqrt[2]{0,96} \approx U(1;3) + dU = 1 + 0,09 = 1,09.$$

Приращения независимых переменных Δx и Δy называют дифференциалами независимых переменных и обозначают $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Тогда выражение для полного дифференциала примет вид

$$dU = U'_x \cdot dx + U'_y \cdot dy = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy. \quad (3.7)$$

Полный дифференциал функции нескольких переменных, как и дифференциал функции одной переменной, обладает свойством инвариантности формы. Это выражается в том, что формула (3.7) справедлива не только когда переменные x и y - независимые, но и в том случае, когда переменные x и y сами являются функциями независимых переменных.

3.4 Дифференцирование неявной функции

Функция двух независимых переменных x, y называется неявной, если она определяется из неразрешенного уравнения, связывающего аргументы и функцию U : $F(x, y, U) = 0$. Часто разрешить это уравнение невозможно

или нецелесообразно. При этом можно определить частные производные функции.

Пусть задана неявная функция уравнением $F(x, y, U) = 0$. Определяем полный дифференциал от левой и правой частей уравнения. С учетом свойства инвариантности формы полного дифференциала, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial U} dU = 0,$$

откуда
$$dU = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial U} \cdot dx - \frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial U} \cdot dy.$$

Но полный дифференциал функции U определяется по формуле (3.7)

$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$. Приравняем выражения при одинаковых дифференциалах dx и dy :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial U}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial U}. \quad (3.8)$$

Пример 3.5 Определить частные производные первого порядка неявной функции z , заданной уравнением $x^2 + 3y^3 + 3z - e^z = 0$.

Решение

Обозначим $F(x, y, z) = x^2 + 3y^3 + 3z - e^z$.

Тогда $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 9y^2$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 3 - e^z$. Подставляем найденные частные производные в формулы (3.8).

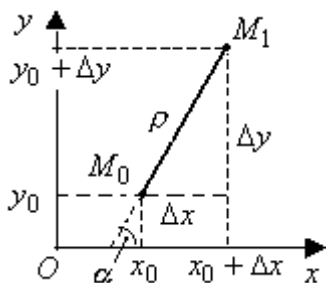
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{2x}{3 - e^z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{9y^2}{3 - e^z}.$$

3.5 Производная по направлению

Частные производные U'_x , U'_y от функции $U = f(x, y)$ определяют скорость изменения функции в направлении осей Ox , Oy . Если требуется знать скорость изменения функции в заданной точке

$M(x_0, y_0)$ в направлении, образующем угол α с осью Ox , то эта задача решается нахождением *производной по направлению*.

Определение. Производной $f'_\alpha \llbracket x_0, y_0 \rrbracket$ функции $U = f(x, y)$ в точке $M_0 \llbracket x_0, y_0 \rrbracket$ в направлении α называется предел отношения



приращения ΔU функции, возникшего при перемещении точки M из положения M_0 вдоль луча, составляющего угол α с положительным направлением оси Ox , к величине ρ такого перемещения, когда ρ стремится к нулю.

$$f'_\alpha \llbracket x_0, y_0 \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\rho}$$

Рисунок 3.1 – К определению производной по направлению

Из рисунка 3.1 следует, что $\Delta x = \rho \cos \alpha$, $\Delta y = \rho \sin \alpha$. Используя эквивалентность полного приращения функции и полного дифференциала, из определения производной по направлению получим:

$$\begin{aligned} f'_\alpha \llbracket x_0, y_0 \rrbracket &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{dU}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f'_x \llbracket x_0, y_0 \rrbracket \Delta x + f'_y \llbracket x_0, y_0 \rrbracket \Delta y}{\rho} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f'_x \llbracket x_0, y_0 \rrbracket \rho \cos \alpha + f'_y \llbracket x_0, y_0 \rrbracket \rho \sin \alpha}{\rho}. \end{aligned}$$

Окончательная формула для

вычисления производной по направлению:

$$f'_\alpha \llbracket x_0, y_0 \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} f'_x \llbracket x_0, y_0 \rrbracket \cos \alpha + f'_y \llbracket x_0, y_0 \rrbracket \sin \alpha. \quad (3.9)$$

Пример 3.6 Вычислить в точке $M(1;2)$ производную от функции $U = xy^2 + 1$ в направлении, составляющем угол $\frac{\pi}{6}$ с осью Ox .

$$\begin{aligned} \text{Решение.} \quad U'_\alpha(M) &= \llbracket x^2 \rrbracket_M \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \llbracket xy \rrbracket_M \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3.6 Градиент и его свойства

Наибольший интерес представляет вопрос о направлении быстрейшего возрастания функции U в точке M . Вопрос просто решается с помощью вектора - градиента функции U .

Градиентом функции $U = f(x, y)$ в данной точке $M(x, y)$ называется вектор, расположенный в плоскости xOy с началом в точке $M(x, y)$

$$\text{grad}U(x, y) = f'_x(x, y) \cdot \vec{i} + f'_y(x, y) \cdot \vec{j}. \quad (3.10)$$

Представим выражение для производной по направлению α (3.9) как результат скалярного произведения двух векторов: вектора градиента (3.10) и вектора $\vec{\tau}_\alpha = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}$, который имеет длину, равную единице и с осью Ox образует угол α . Действительно,

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x_0, y_0) &= \text{grad}U(x_0, y_0) \cdot \vec{\tau}_\alpha = \\ &= f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha. \end{aligned}$$

По определению скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$, запишем

$\text{grad}U(x_0, y_0) \cdot \vec{\tau}_\alpha = |\text{grad}U| \cdot |\vec{\tau}_\alpha| \cdot \cos \varphi = |\text{grad}U| \cdot \cos \varphi$, где φ - угол между векторами. Скалярное произведение принимает наибольшее значение, когда $\cos \varphi = 1$, т.е. когда $\angle \varphi = 0$.

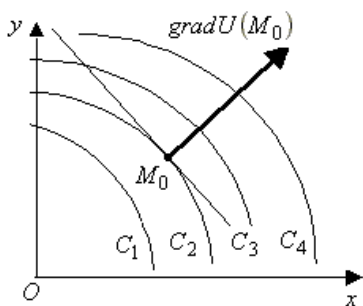


Рисунок 3.2 – Свойства градиента

Иллюстрация свойств градиента – на рисунке 3.2. Показаны линии уровня $U(x, y) = C_1, \dots, U(x, y) = C_4$, причем $C_1 < C_2 < C_3 < C_4$. Через точку M_0 , лежащую на линии с уровнем C_2 проведены касательная и

Тем самым доказано *основное свойство градиента*: направление градиента функции в точке является направлением быстрейшего возрастания функции, его модуль равен наибольшей скорости возрастания U в заданной точке.

Другое свойство градиента: он перпендикулярен касательной линии уровня, проходящей через точку начала градиента.

градиент, которые перпендикулярны друг другу. Градиент направлен в сторону возрастания функции $U(x, y, z)$.

Для функции трех переменных $U = f(x, y, z)$ градиент вычисляется по формуле:

$$\text{grad}U(x, y, z) = f'_x(x, y, z) \cdot \vec{i} + f'_y(x, y, z) \cdot \vec{j} + f'_z(x, y, z) \cdot \vec{k}. \quad (3.11)$$

Пример 3.7 Дана функция $Z = 3x^2y - y^2$, точка $A(-2)$ и вектор $\vec{a}(3;6)$.

Найти: 1) $\text{grad}Z$ в точке A; 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$.

Решение

1) По формуле градиента $\text{grad}Z = Z'_x(x, y) \vec{i} + Z'_y(x, y) \vec{j}$,

$$\text{grad}Z = 6xy \cdot \vec{i} + (x^2 - 2y) \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} x=1 \\ y=-2 \end{pmatrix} = -12\vec{i} + 7\vec{j}.$$

2) Производная по направлению вектора $\vec{a}$ определяется по формуле

$$Z'_\alpha = Z'_x \cdot \cos \alpha + Z'_y \cdot \cos \beta,$$

где α, β - углы между вектором $\vec{a}$ и осями координат Ox, Oy .

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}.$$

$$\text{В нашем случае} \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{9+36}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \beta = \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Ответ:} \quad Z'_\alpha = -12 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 7 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

3.7 Экстремум функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума

Точка M_0 называется точкой максимума функции $U(x, y)$, если значение функции в этой точке больше, чем её значение в любой другой

точке некоторой (хотя бы малой) окрестности точки M_0 . Аналогично (с заменой «больше» на «меньше») определяется *точка минимума* функции.

Точки минимума и максимума объединяются под общим названием *точки экстремума*.

Для функции двух переменных точка M имеет две координаты (x, y) , для функции трёх переменных - три координаты (x, y, z) . При этом окрестностью точки $M(x, y, z)$ является открытый шар с центром в этой точке.

Поиск критических точек, т.е. точек в которых может быть экстремум функции $U = f(x, y)$, производится при помощи *необходимого условия экстремума*:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Решение системы (3.12) определяет координаты критических точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$.

Однако необходимого условия мало для существования точек экстремума. Нужно провести исследование критических точек с использованием *достаточных условий экстремума*.

Для функции двух переменных $U = f(x, y)$ введём обозначения для вторых частных производных в критической точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f''_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

Достаточные условия приводим в таблице 2.

Таблица 2 – Достаточные условия экстремума функции двух переменных

№	Соотношения между A, B, C	Величина A	Вывод о наличии экстремума
1	$AC - B^2 > 0$	$A < 0, (C < 0)$	Максимум в критической точке
2	$AC - B^2 > 0$	$A > 0, (C > 0)$	Минимум в критической точке
3	$AC - B^2 < 0$	A – любое	Нет экстремума
4	$AC - B^2 = 0$	A – любое	Требуется дополнительное исследование

Пример 3.8 Найти экстремум функции двух переменных

$$Z = x^2 - 2xy + 4y^3.$$

Решение

Вычисляем первые частные производные и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ -2x + 12y^2 = 0, \end{cases} \begin{cases} x = y, \\ 6y^2 - y = 0, \end{cases} \begin{cases} x = y, \\ y(6y - 1) = 0. \end{cases}$$

Получаем две критические точки $(0; 0)$ и $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Вычисляем частные производные второго порядка:

$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{xy} = -2, \quad f''_{yy} = 24y.$$

В критической точке $(0, 0)$ $A=2$, $B=-2$, $C=0$. Следовательно, выражение

$$AC - B^2 = -4 < 0.$$

Согласно пункту 3 таблицы 2 в точке $(0, 0)$ экстремума нет.

Исследуем вторую критическую точку $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$: $A=2$, $B=-2$, $C=4$.

$$AC - B^2 = 8 - 4 = 4 > 0.$$

Согласно пункту 2 таблицы 2 в точке $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ функция имеет минимум.

Значение функции в точке минимума – минимум функции:

$$Z_{\min}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = x^2 - 2xy + 4y^3 \Big|_{\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{6}\right)^3 = -\frac{1}{108}.$$

Глава 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

4.1 Основные определения о дифференциальных уравнениях

Дифференциальным называется уравнение, связывающее независимую переменную x , неизвестную функцию y и производные неизвестной функции $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Общий вид дифференциального уравнения:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (4.1)$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение. Например, $y'' + 4y' - 5y = x$ - это уравнение второго порядка; $y''' = \cos x$ - уравнение третьего порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, обращает его в тождество. Например, если $y = \varphi(x)$ - решение уравнения (4.1), то

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Если решение дифференциального уравнения содержит произвольные постоянные, оно называется *общим решением*. *Частное решение* дифференциального уравнения не содержит произвольных постоянных.

4.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка содержит первую производную y' , общий вид уравнения: $F(x, y, y') = 0$.

Дифференциальное уравнение первого порядка может быть задано в одной из двух форм записи. Если уравнение разрешено относительно первой производной, то оно имеет вид:

$$y' = f(x, y). \quad (4.2)$$

Другая форма записи уравнения первого порядка:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (4.3)$$

В зависимости от вида функций $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ различают типы дифференциальных уравнений первого порядка.

Решение уравнения 1-го порядка отыскивается путем интегрирования, поэтому оно содержит произвольную постоянную C и называется в этом случае *общим решением*. Вид общего решения $y = \varphi(x, C)$. Если произвольной постоянной C задать конкретное числовое значение, то решение, полученное из общего, называется *частным решением*.

Определение частного решения из общего с использованием начальных условий называется *задачей Коши* для данного уравнения (см. §4.7).

Существует несколько типов уравнений первого порядка, решение которых можно определить интегрированием. Для этого вначале нужно выявить тип уравнения, а затем применить соответствующий данному типу метод решения.

4.3 Уравнения с разделяющимися переменными

Если в уравнениях (4.2), (4.3) каждую из функций $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ можно представить в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной x или y , то такие уравнения называют уравнениями с *разделяющимися переменными*.

Уравнения могут быть записаны в формах:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad (4.4)$$

$$M(x) \cdot N(y) dx + R(x) \cdot G(y) dy = 0. \quad (4.5)$$

Умножая уравнения (4.4), (4.5) на подходящее выражение, можно добиться разделения переменных (знаками $=$, $+$, $-$) и решения его путём интегрирования.

Пример 4.1 Решить уравнение $yy' = \sin x$.

Решение

Уравнение приводится к виду (4.4) делением обеих частей на y , поэтому это уравнение с разделяющимися переменными. Записав производную через отношение дифференциалов, разделим переменные: $y \frac{dy}{dx} = \sin x$,

$y dy = \sin x dx$. Из равенства дифференциалов следует равенство первообразных с точностью до произвольной постоянной. Интегрируем левую и правую части равенства.

$$\int y dy = \int \sin x dx, \quad \frac{y^2}{2} = C - \cos x.$$

Последнее выражение – общее решение уравнения в неявной форме.

Примечание – общее решение уравнения, полученное в неявном виде, называют общим интегралом уравнения.

4.4 Однородные уравнения

Функция двух переменных $f(x, y)$ называется *однородной k -го измерения* относительно своих аргументов, если для любого $t \neq 0$ выполняется тождество

$$f(tx, ty) \equiv t^k \cdot f(x, y). \quad (4.6)$$

В частности, при $k = 0$ функция $f(x, y)$ называется однородной нулевого измерения.

Дифференциальное уравнение (4.2) называется однородным, если функция $f(x, y)$ - однородная нулевого измерения (для неё выполняется тождество $f(x, y) \equiv f(tx, ty)$). Уравнение (4.3) называется однородным, если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ - однородные одинакового измерения.

Решение однородного уравнения определяется в виде $y = ux$, где u - новая неизвестная функция. При подстановке в уравнения (4.2) и (4.3) выражений $y = ux$, $y' = u'x + u$, $dy = xdu + udx$, эти уравнения преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной u .

Пример 4.2 Решить уравнения:

$$\text{а) } y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}; \quad \text{б) } (x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Решение

а) Уравнение вида (4.2). Проверим выполнение тождества (4.6):

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x \cdot y}; \quad f(tx, ty) = \frac{x^2 + y^2}{tx \cdot ty} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2 \cdot x \cdot y} = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Следовательно, $f(x, y) = f(tx, ty)$, функция $f(x, y)$ - однородная нулевого измерения. Данное уравнение – однородное. Пусть $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$\text{Тогда } u'x + u = \frac{x^2 + u^2 x^2}{xux}, \quad u'x + u = \frac{1 + u^2}{u}, \quad u'x = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dx} x = \frac{1}{u}.$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными, которое затем решаем:

$$u du = \frac{dx}{x}, \quad \int u du = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln C, \quad u^2 = 2 \ln|x| C.$$

$$\text{Переходим к переменной } y: \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2 \ln|x| C, \quad y^2 = 2x^2 \ln|x| C,$$

$$y = \pm \sqrt{2x^2 \ln|x| C}.$$

Последнее выражение – общее решение уравнения.

б) Уравнение вида (4.3). $P(x, y) = x^2 - y^2$, $P(tx, ty) = t^2(x^2 - y^2)$; $Q(x, y) = 2xy$, $Q(tx, ty) = t^2(2xy)$. Таким образом, функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - однородные одного измерения (второго). Следовательно, уравнение – однородное. Пусть $y = ux$, $dy = xdu + udx$.

Тогда $(x^2 - u^2x^2)dx + 2x^2u(xdu + udx) = 0$. Разделим переменные.

$$\frac{dx}{x} = \frac{2u}{1+u^2} du. \quad \text{Интегрируем левую и правую части:}$$

$$\ln|x| = \ln(1+u^2) + C.$$

$$\text{Переходим к переменной } y: \ln|x| = \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + C.$$

Получили общий интеграл заданного дифференциального уравнения.

4.5 Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Линейные уравнения имеют вид:

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (4.7)$$

Они отличаются от других тем, что y и y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь.

Уравнения Бернулли имеют вид

$$y' + p(x)y = f(x)y^n, \quad (4.8)$$

где $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Левые части уравнений (4.7) и (4.8) одинаковой структуры, правая часть (4.8) содержит множителем n -ю степень неизвестной y . Эти уравнения можно решать одним методом, при котором решение определяется в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ - функции, подлежащие определению. Одну из двух новых неизвестных можно выбирать произвольно. Решение линейного уравнения рассмотрим на примере.

Пример 4.3 Решить уравнение $xy' + y = \sin x$.

Решение

Разделив уравнение на x , получим уравнение вида (4.7), поэтому оно линейное. Пусть $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$. Подставим в уравнение $xu'v + xuv' + uv = \sin x$. Сгруппируем второе и третье слагаемые в левой части (можно группировать первое и третье слагаемые)

$$xu'v + u \llbracket v' + v \rrbracket = \sin x.$$

Выберем неизвестную v так, чтобы она была решением уравнения $xv' + v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его относительно неизвестной v :

$$v' = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{x}. \quad \text{При определении } v \text{ примем } C = 0. \text{ Подставим значение } v \text{ в уравнение: } u' = \sin x, \\ du = \sin x dx, \quad u = \int \sin x dx + C, \quad u = C - \cos x.$$

$$\text{Окончательно, } y = uv = \frac{C - \cos x}{x}.$$

4.6 Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение (4.3) называется *уравнением в полных дифференциалах*, если левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции

$$U(x, y): \quad dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad \text{В этом случае } P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad \text{Дифференцируем функцию } P(x, y) \text{ по переменной } y,$$

$$\text{функцию } Q(x, y) \text{ по переменной } x: \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}. \quad \text{С учетом}$$

теоремы о равенстве частных смешанных производных (см. §3.2)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \text{получим условие, выполнение которого указывает, что}$$

уравнение (4.3) является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (4.9)$$

Чтобы найти решение уравнения, определяются интегралы:

$$1. \quad \int P(x, y)dx, \quad \text{при } y = \text{const}; \quad 2. \quad \int Q(x, y)dy, \quad \text{при } x = \text{const}.$$

Произвольные постоянные, зависящие от x, y , опускаются. Затем к слагаемым из результата решения интеграла 1 нужно прибавить слагаемые из результата решения интеграла 2, зависящие только от y и эту сумму

приравнять произвольной постоянной. Полученное выражение – общее решение (общий интеграл) уравнения (4.3).

Пример 4.4 Решить уравнение

$$(x^2 + y^2 + x)dx + (2xy + \ln y + 1)dy = 0.$$

Решение

Проверяем выполнение условия (4.9): $(x^2 + y^2 + x)'_y = 2y$; $(2xy + \ln y + 1)'_x = 2y$. Условие (4.9) выполняется, следовательно, данное уравнение - в полных дифференциалах. Вычисляем интегралы:

$$1) \int (x^2 + y^2 + x)dx = \frac{x^3}{3} + xy^2 + \frac{x^2}{2};$$

$$2) \int (2xy + \ln y + 1)dy = xy^2 + y \ln y.$$

Общее решение:
$$\frac{x^3}{3} + xy^2 + \frac{x^2}{2} + y \ln y = C.$$

Примечание - общее решение можно получить, прибавляя к результату 2 интеграла слагаемые из результата 1 интеграла, зависящие только от x .

4.7 Задача Коши для уравнения 1-го порядка

Задачей Коши для уравнения 1-го порядка называется задача определения частного решения уравнения $F(x, y, y') = 0$ при заданном начальном условии $y(x_0) = y_0$.

Пример 4.5 Решить задачу Коши:

$$xy' + y = xy^2 \ln x, \quad y|_{x=e} = -\frac{1}{e}.$$

Решение

Разделив уравнение на x , получим $y' + \frac{1}{x}y = y^2 \ln x$. Это уравнение вида (4.8), где $n=2$, т.е. уравнение Бернулли. Ищем решение в виде $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим в уравнение $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = u^2v^2 \ln x$. Группируем второе и третье слагаемые в

левой части $u'v + u(v' + \frac{1}{x}v) = u^2 v^2 \ln x$. Выбираем v так, чтобы

выражение в скобках равнялось нулю $v' + \frac{1}{x}v = 0$. Откуда $v = \frac{1}{x}$ (см.

пример 4.3). Подставим в уравнение

$$u' \cdot \frac{1}{x} = u^2 \cdot \frac{1}{x^2} \ln x, \quad \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x} dx, \quad \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x} dx + C$$

$$-\frac{1}{u} = \frac{\ln^2 x}{2} + C, \quad u = -\frac{1}{0,5 \ln^2 x + C}.$$

Общее решение $y = uv = -\frac{1}{x(0,5 \ln^2 x + C)}$.

Подставляем в общее решение начальное условие:

$$-\frac{1}{e} = -\frac{1}{e(0,5 \ln^2 e + C)}, \quad 0,5 + C = 1, \quad C = 0,5.$$

Частное решение: $y = -\frac{1}{x(0,5 \ln^2 x + 0,5)}$.

4.8 Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Все дифференциальные уравнения, порядок которых выше первого, считаются уравнениями высших порядков. Некоторые из них можно решить интегрированием. В общем случае для уравнения вида

$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ общее решение содержит n произвольных постоянных: $y = y(C_1, C_2, \dots, C_n)$. Частное решение уравнения n -го порядка можно получить, если каждой произвольной постоянной задать конкретное числовое значение.

Чтобы из общего решения выделить одно частное решение, необходимо вместе с дифференциальным уравнением задать дополнительные условия. Так, если при некотором фиксированном значении независимой переменной x_0 задать значение неизвестной функции и её производных до $(n-1)$ -й включительно, то такие условия называются *начальными*. Задача

определения частного решения при заданных начальных условиях $y|_{x=0} = y_0, y'|_{x=0} = y_1, \dots, y^{(n-1)}|_{x=0} = y_{n-1}$ называется *задачей Коши*.

Дополнительные условия могут быть заданы при двух и более различных фиксированных значениях независимой переменной. В таком случае задача определения частного решения называется *краевой задачей*.

4.8.1 Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$

Решение уравнения сводится к повторному интегрированию уравнения n раз. При этом общее решение будет содержать n произвольных постоянных.

Пример 4.6 Решить уравнение $y''' = \sin x$.

Решение

Интегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int y''' dx = \int \sin x dx + C_1; \quad y'' = -\cos x + C_1.$$

Интегрируем повторно ещё два раза:

$$\int y'' dx = -\int \cos x dx + \int C_1 dx + C_2; \quad y' = -\sin x + C_1 x + C_2;$$

$$\int y' dx = -\int \sin x dx + C_1 \int x dx + \int C_2 dx + C_3;$$

$$y = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Последняя формула - общее решение уравнения.

4.8.2 Уравнения 2 порядка, не содержащие явным образом искомой функции y

Уравнение вида $y'' = f(x, y')$ решается введением новой переменной $p(x) = y'$. Тогда $y'' = p'(x)$, и исходное уравнение преобразуется в уравнение 1-го порядка относительно неизвестной $p(x)$: $p' = f(x, p)$. Решив это уравнение, получим $p = p(x, C_1)$, затем решаем уравнение $y' = p(x, C_1)$.

Пример 4.7 Решить уравнение $x^4 y'' + x^3 y' = 4$.

Решение

Обозначим $y' = p$, $y'' = p'$. Подставляя эти обозначения в уравнение, получаем линейное уравнение 1-го порядка $x^4 p' + x^3 p = 4$. Пусть $p = u \cdot v$, $p' = u'v + uv'$. Подставим в уравнение 1-го порядка:

$$x^4 u'v + x^4 uv' + x^3 uv = 4, \quad x^4 u'v + x^3 u(xv' + v) = 4,$$

$$xv' + v = 0, \quad \frac{xdv}{dx} = -v, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Подставляя $v = \frac{1}{x}$ в уравнение, находим u .

$$x^4 u' \cdot \frac{1}{x} = 4, \quad du = \frac{4}{x^3} dx, \quad u = -\frac{2}{x^2} + C_1;$$

$$uv = \frac{C_1}{x} - \frac{2}{x^3}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} - \frac{2}{x^3};$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{x} - \frac{2}{x^3} \right) dx = C_1 \ln|x| + \frac{1}{x^2} + C_2.$$

Общее решение $y = C_1 \ln|x| + x^{-2} + C_2$.

4.8.3 Уравнения 2 – го порядка, не содержащие явным образом аргумента x

Уравнения вида $y'' = f(y, y')$ решаются введением новой переменной $p = y'$, которая считается функцией переменной y .

$$\text{Тогда } y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y', \quad y'' = \frac{dp}{dy} p.$$

Пр и м е р 4.8 Решить задачу Коши $y'' = 2y^3$, $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 1$.

Решение

Пусть $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dy} p$. Подставим в уравнение

$$\frac{dp}{dy} p = 2y^3, \quad pdp = 2y^3 dy, \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^4}{2} + C_1, \quad p = \sqrt{y^4 + C_1}.$$

Используем начальные условия для определения C_1 : $1 = \sqrt{1+C_1}$, $C_1 = 0$.

Тогда $y' = \sqrt{y^4}$, $\frac{dy}{dx} = y^2$, $\frac{dy}{y^2} = dx$, $-\frac{1}{y} = x + C_2$.

Подставляя начальные условия, находим C_2 : $-1 = -1 + C_2$, $C_2 = 0$.

Решение задачи Коши: $y = -\frac{1}{x}$.

4.9 Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

4.9.1 Основные определения

Дифференциальное уравнение n -го порядка, вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (4.11)$$

называется линейным. Коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ - функции независимой переменной x , или постоянные числа. Функция независимой переменной $f(x)$ называется правой частью уравнения (4.11).

Если правая часть $f(x) \neq 0$, то уравнение (4.11) называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением, сокращенно ЛНДУ. Если $f(x) = 0$, то уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0 \quad (4.12)$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением, сокращенно ЛОДУ.

Если в уравнениях (4.11) и (4.12) левые части совпадают, то уравнение (4.12) называется ЛОДУ, соответствующим ЛНДУ (4.11).

Для линейного уравнения n -го порядка (однородного или неоднородного) задача Коши формулируется следующим образом: определить частное решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x),$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y|_{x=0} = y_0, y'|_{x=0} = y_1, y''|_{x=0} = y_2, \dots, y^{(n-1)}|_{x=0} = y_{n-1}.$$

4.9.2 Свойства решений ЛОДУ

Теорема 1. Если y_1 и y_2 - решения однородного уравнения (4.12), то сумма $y_1 + y_2$ также решение этого уравнения.

Доказательство

Подставим в уравнение (4.12) сумму $y_1 + y_2$ и перегруппируем слагаемые в левой части уравнения.

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)^{(n)} + a_1(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + a_n(y_1 + y_2) &= 0, \\ (y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \dots + a_n y_1) + (y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + \dots + a_n y_2) &= 0, \end{aligned}$$

следовательно, $0 = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если $y_1 \in \mathcal{C}^n$ - решение уравнения (4.12), $C = const$, то $C \cdot y_1 \in \mathcal{C}^n$ также решение этого уравнения.

Доказательство

Подставим произведение $C \cdot y_1 \in \mathcal{C}^n$ в уравнение (4.12).

$$\begin{aligned} (Cy_1)^{(n)} + a_1(Cy_1)^{(n-1)} + \dots + a_n(Cy_1) &= 0 \Leftrightarrow \\ Cy_1^{(n)} + a_1 Cy_1^{(n-1)} + \dots + a_n Cy_1 &= 0 \Leftrightarrow \\ C(y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \dots + a_n y_1) &= 0 \Leftrightarrow C \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

Следствие теорем 1 и 2. Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ - решения однородного линейного уравнения n -го порядка (4.12), $C_1, C_2, \dots, C_n$ произвольные постоянные, то выражение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (4.13)$$

также решение этого уравнения.

4.9.3 Линейно независимые функции. Определитель Вронского

Система функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, определенных в интервале $(a; b)$, называется линейно независимой в этом интервале, если ни одну из этих функций нельзя представить в виде линейной комбинации остальных для всех значений $x \in (a; b)$.

С другой стороны, функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно зависимы, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что

для всех значений x в интервале $(a; b)$ выполняется тождественно соотношение

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n \equiv 0.$$

(Если не существуют не равные нулю постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, такие, что выполняется последнее тождество, то функции линейно независимы).

Для определения линейной зависимости, или линейной независимости функций применяется *определитель Вронского*.

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ имеют непрерывные производные до $(n-1)$ -го порядка включительно. Определитель, элементы которого функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ и производные этих функций,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (4.14)$$

называется *определителем Вронского этих функций*.

Определитель Вронского $W(x)$ для функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ обладает следующими свойствами:

- 1) определитель $W(x) \equiv 0$ на интервале $(a; b)$, если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы;
- 2) определитель $W(x) \neq 0$ ни в одной точке интервала $(a; b)$, если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы на этом интервале,

Пример 4.9 Определить, являются ли линейно независимыми функции: а) $\sin ax, \cos ax$; б) e^{ax}, e^{bx} .

Решение

а) Составим определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin ax & \cos ax \\ a \cos ax & -a \sin ax \end{vmatrix} = -a \cdot \sin^2 ax - a \cdot \cos^2 ax =$$

$$= -a(\sin^2 ax + \cos^2 ax) = -a \neq 0.$$

Определитель Вронского не превращается в ноль ни в одной точке числовой оси, следовательно, функции $\sin ax$, $\cos ax$ линейно независимы при $x \in (-\infty; \infty)$.

б) Для функций e^{ax} , e^{bx} определитель Вронского имеет вид:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ ae^{ax} & be^{bx} \end{vmatrix}, \quad W(x) = b \cdot e^{(a+b)x} - a \cdot e^{(a+b)x} = (b-a) \cdot e^{(a+b)x}.$$

Показательная функция $e^{(a+b)x} \neq 0$ ни в одной точке числовой оси. Поэтому, при $a = b$, функции e^{ax} , e^{bx} линейно зависимы; при $a \neq b$ функции e^{ax} , e^{bx} линейно независимы при $x \in (-\infty; \infty)$. Можно показать, что система функций e^{ax} , e^{bx} , ..., e^{cx} линейно независима, если все коэффициенты в показателях функций - различные.

4.10 Структура общего решения линейного однородного уравнения

Любая система n линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения n -го порядка называется *фундаментальной системой*.

Доказано, что для всякого линейного однородного дифференциального уравнения *существует* фундаментальная система решений.

Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения n -го порядка, говорит о том, что при определенных условиях решение уравнения, содержащее n произвольных постоянных, является общим решением уравнения, если для произвольно заданных начальных условий из него можно получить однозначно определенное частное решение.

Поэтому, если мы докажем, что в формуле (4.13), где $y_1, y_2, \dots, y_n$ - фундаментальная система решений уравнения (4.12), произвольные постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$ определяются однозначно при произвольно заданных начальных условиях $y|_{x=0} = y_0$, $y'|_{x=0} = y_1$, $y''|_{x=0} = y_2$, ..., $y^{(n-1)}|_{x=0} = y_{n-1}$, то тем самым докажем, что (4.13) - общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (4.12).

Теорема. Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений однородного линейного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0, \quad (4.15)$$

то общее решение уравнения дается формулой

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n. \quad (4.16)$$

Доказательство

Ранее, в §4.9.2 показано, что выражение (4.16) – решение уравнения (4.15). Покажем, что это решение – общее решение уравнения. Для этого к уравнению (4.15) зададим произвольно начальные условия:

$$y|_{x=0} = y_0, \quad y'|_{x=0} = y_1, \quad y''|_{x=0} = y_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=0} = y_{n-1}. \quad (4.17)$$

Для определения значений постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ решение (4.16) продифференцируем $(n-1)$ раз и подставим $x = x_0$. Получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} y|_{x=0} &= C_1 y_1|_{x=0} + C_2 y_2|_{x=0} + \dots + C_n y_n|_{x=0}; \\ y'|_{x=0} &= C_1 y_1'|_{x=0} + C_2 y_2'|_{x=0} + \dots + C_n y_n'|_{x=0}; \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}|_{x=0} &= C_1 y_1^{(n-1)}|_{x=0} + \dots + C_n y_n^{(n-1)}|_{x=0}. \end{aligned}$$

С учетом обозначений (4.17) последнюю систему запишем в виде

$$\begin{aligned} C_1 y_1|_{x=0} + C_2 y_2|_{x=0} + \dots + C_n y_n|_{x=0} &= y_0; \\ C_1 y_1'|_{x=0} + C_2 y_2'|_{x=0} + \dots + C_n y_n'|_{x=0} &= y_1; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$C_1 y_1^{(n-1)}|_{x=0} + C_2 y_2^{(n-1)}|_{x=0} + \dots + C_n y_n^{(n-1)}|_{x=0} = y_{n-1}.$$

Определитель Δ системы (4.18) – определитель Вронского системы линейно независимых функций, записанный при $x = x_0$, следовательно, $\Delta \neq 0$. По правилу Крамера система имеет единственное решение, зависящее от заданных начальных условий (4.17). Таким образом, формула (4.16) – структура общего решения линейного однородного уравнения n -го порядка.

Примечание – теорема справедлива для произвольных ЛОДУ, как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

Пример 4.10 Уравнение $y'' - y = 0$ имеет два частных решения

$y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$, что легко проверить подстановкой. В примере 4.9 доказано, что такие решения линейно независимы. Они образуют фундаментальную систему заданного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

4.11 ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение

Если ЛОДУ имеет переменные коэффициенты, фундаментальную систему решений найти чрезвычайно сложно. Но если коэффициенты уравнения все постоянные числа, имеется единый метод определения фундаментальной системы, независимый от порядка дифференциального уравнения.

Пусть задано ЛОДУ с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0. \quad (4.19)$$

Чтобы некоторая функция являлась решением этого уравнения и превращала его в тождество $0 = 0$, она должна быть подобна своим производным.

Например, такой функцией является показательная функция e^{kx} , подобная всем своим производным.

Предположим, что решением уравнения (4.19) является функция $y = e^{kx}$. Подставим её уравнение, для чего определим производные до n -ой включительно.

$$y = e^{kx}, y' = k e^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \dots, y^{(n)} = k^n e^{kx} \quad (4.20)$$

При подстановке (4.20) в уравнение (4.19) получим:

$$k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + a_2 k^{n-2} e^{kx} + \dots + a_n e^{kx} = 0, \\ e^{kx} (k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.21) – линейное алгебраическое уравнение n -го порядка. Оно имеет n решений $k_1, k_2, \dots, k_n$ (см. §1.5).

Подставляя эти решения коэффициентом в показатель экспоненты, получим n частных решений ЛОДУ (4.19): $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$.

Уравнение (4.21) называется **характеристическим уравнением**.

Таким образом, чтобы найти частные решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами, нужно составить для него характеристическое уравнение и решить его.

Характеристическое уравнение составляется по следующему **правилу**: сохраняя коэффициенты ЛОДУ $a_1, a_2, \dots, a_n$, нужно заменить функцию y единицей, а все её производные – соответствующими степенями k .

Если все корни характеристического уравнения – действительные и различные, то частные решения ЛОДУ $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, ..., $y_n = e^{k_n x}$ линейно независимы и составляют фундаментальную систему решений. По формуле (4.16) можно записать общее решение дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

Пример 4.11 Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Решение

Составляем для заданного ЛОДУ характеристическое уравнение.

$$k^2 - 4k + 3 = 0.$$

Находим корни квадратного уравнения.

$$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 = 1; 3.$$

Различным и действительным корням характеристического уравнения соответствуют два частных линейно независимых решения дифференциального уравнения, $y_1 = e^{1 \cdot x}$ и $y_2 = e^{3x}$. Составляем общее решение уравнение по формуле (4.16):

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

4.12 Случай комплексных корней характеристического уравнения

Характеристическое уравнение – алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами, оно может иметь комплексные корни, которые присутствуют попарно сопряженными.

Пусть корнями характеристического уравнения

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

являются $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$. Тогда решения ЛОДУ

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$$

имеют вид $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ и $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$. С учетом формулы Эйлера решения можно записать в алгебраической форме

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Обозначим $u = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $v = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Тогда $y_1 = u + iv$.

Подставим решение y_1 в ЛОДУ:

$$(u + iv)^{(n)} + a_1(u + iv)^{(n-1)} + \dots + a_n(u + iv) = 0.$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$(u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + a_2 u^{(n-2)} + \dots + a_n u) + \\ + i(v^{(n)} + a_1 v^{(n-1)} + a_2 v^{(n-2)} + \dots + a_n v) = 0$$

Комплексная функция в левой части последнего выражения равна нулю в том случае, когда её действительная и мнимая части равны нулю:

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + a_2 u^{(n-2)} + \dots + a_n u = 0;$$

$$v^{(n)} + a_1 v^{(n-1)} + a_2 v^{(n-2)} + \dots + a_n v = 0.$$

Следовательно, функции $u = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $v = e^{\alpha x} \sin \beta x$, каждая в отдельности – решения ЛОДУ.

К такому же выводу придем, если в ЛОДУ подставим второе решение y_2 .

Вывод: паре комплексных сопряженных корней характеристического уравнения $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ соответствуют два частных решения линейного однородного уравнения $u = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $v = e^{\alpha x} \sin \beta x$. С помощью определителя Вронского легко убедиться, что u и v – линейно независимые функции.

4.13 Случай кратных действительных корней характеристического уравнения

Для простоты изложения рассмотрим ЛОДУ второго порядка

$$y'' + by' + cy = 0,$$

характеристическое уравнение которого

$$k^2 + bk + c = 0$$

имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2 = k$. Одному корню соответствует частное решение $y_1 = e^{kx}$. Такое же решения для второго корня линейно зависимо от первого. Будем искать второе частное решение, линейно независимое от первого, в виде $y_2 = u(x) e^{kx}$, где $u(x)$ –

неизвестная пока функция. Продифференцируем дважды y_2 и подставим его в ЛОДУ.

$$y_2' = u' \cdot e^{kx} + ku \cdot e^{kx}, \quad y_2'' = e^{kx}(u'' + 2ku' + k^2u);$$

$$e^{kx}(u'' + 2ku' + k^2u) + be^{kx}(u' + ku) + ce^{kx}u = 0;$$

$$e^{kx}(u'' + (2k + b)u' + (k^2 + bk + c)u) = 0.$$

В последнем уравнении $(k^2 + bk + c) = 0$, так как k - корень характеристического уравнения; $(2k + b) = 0$, т.к. $k_1 = k_2 = k = -\frac{b}{2}$.

Чтобы решить уравнение $e^{kx} \cdot u'' = 0$, решаем $u'' = 0$, интегрируя дважды.

$$u' = A, \quad u = Ax + B.$$

В частности можно положить $A = 1, B = 0$. Тогда $u = x$.

Вывод: двум одинаковым корням характеристического уравнения $k_1 = k_2 = k$ соответствуют два линейно независимых частных решения

$$y_1 = e^{kx} \quad \text{и} \quad y_2 = x \cdot e^{kx}.$$

4.14 Фундаментальная система решений ЛОДУ с постоянными коэффициентами

Обобщаем результаты §§4.11-4.13. Если дано ЛОДУ n -го порядка, нужно составить и решить характеристическое уравнение. При этом:

- 1) каждому простому действительному корню k_i соответствует частное решение вида $e^{k_i x}$;
- 2) действительному корню кратности m , $k_1 = k_2 = \dots = k_m$, соответствует m частных решений вида

$$e^{kx}, \quad xe^{kx}, \quad \dots, \quad x^{m-1} \cdot e^{kx};$$

- 3) простой паре комплексных сопряженных корней

$$k_1 = \alpha + i\beta \quad \text{и} \quad k_2 = \alpha - i\beta$$

соответствует пара частных решений

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

- 4) паре комплексных сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ кратности m соответствует m пар частных, линейно независимых решений

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x; x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x; \dots; \\ x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Таким образом, вся сложность определения общего решения однородного уравнения заключается в определении корней характеристического уравнения. Решить «вручную» произвольное алгебраическое уравнение 3-го и выше порядков непросто. В таких случаях следует применять вычислительную технику.

Пример 4.12 Определить общее решение дифференциального уравнения $y^{VII} + 8y^{VI} + 10y^V - 30y^{IV} - 131y^{III} - 118y'' + 220y' + 600y = 0$.

Решение

Запишем характеристическое уравнение ЛОДУ седьмого порядка:

$$k^7 + 8k^6 + 10k^5 - 30k^4 - 131k^3 - 118k^2 + 220k + 600 = 0.$$

Корни алгебраического уравнения 7-го порядка определяем в пакете MatLAB.

Вначале задаются коэффициенты полинома, затем вызывается оператор roots, который определяет нули полинома. Команда disp выводит результаты на экран [4].

```
>> P = [ 8, 10, -30, -131, -118, 220, 600 ]
```

```
>> disp(roots(P))
```

```
-6.0000
-1.0000+2.0000i
-1.0000-2.0000i
-2.0000+1.0000i
-2.0000-1.0000i
2.0000
2.0000
```

Характеристическое уравнение имеет один простой действительный корень -6 , два одинаковых действительных корня 2 , две различные пары комплексных сопряженных корней. Общее решение дифференциального уравнения запишем в виде:

$$y = C_1 e^{-6x} + e^{-x} [C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x] + e^{-2x} [C_4 \cos x + C_5 \sin x] + e^{2x} [C_6 + x C_7].$$

На практике чаще всего приходится решать уравнения 2-го порядка, поэтому ниже приведена таблица общих решений ЛОДУ 2-го порядка.

Таблица 3 - Общее решение ЛОДУ второго порядка

Корни характеристического уравнения	Общее решение ЛОДУ
1 $k_1 \neq k_2$ корни действительные	$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2 $k_1 = k_2$ корни действительные	$\bar{y} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$
3 $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ корни комплексные	$\bar{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
4 $k_{1,2} = \pm \beta i$ корни мнимые	$\bar{y} = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$

Пример 4.13 а) Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 6y = 0$.
 б) Найти частный интеграл уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, удовлетворяющий начальным условиям $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = -1$.

Решение

а) По указанному правилу составляем характеристическое уравнение $k^2 + k - 6 = 0$. Его корни $k_1 = -3$, $k_2 = 2$, что соответствует пункту 1 таблицы 3 общих решений. Общее решение $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$.

б) Корни характеристического уравнения $k^2 - 2k + 1 = 0$ действительные, кратные $k_1 = k_2 = 1$. Согласно пункту 2 таблицы 3 общее решение $y = e^x (C_1 + C_2 x)$. Производная общего решения имеет вид: $y' = e^x (C_1 + C_2 + C_2 x)$. Согласно начальным условиям, при $x=0$ функция $y=1$, её производная равна -1:

$$\begin{cases} e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) = 1, \\ e^0 (C_1 + C_2 + C_2 \cdot 0) = -1, \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 + C_2 = -1, \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -2. \end{cases}$$

Запишем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = e^x (-2x).$$

4.15 Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения

Как указано в §4.9, уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (4.22)$$

называется линейным неоднородным дифференциальным, сокращенно ЛНДУ.

Теорема 1. Если $\bar{y}$ некоторое решение однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0, \quad (4.23)$$

соответствующего неоднородному уравнению (4.22), Y - частное решение неоднородного уравнения (4.22), то сумма $\bar{y} + Y$ также является решением неоднородного уравнения.

Доказательство

Подставим сумму решений $\bar{y} + Y$ в неоднородное уравнение.

$$\begin{aligned} (\bar{y} + Y)^{(n)} + a_1 (\bar{y} + Y)^{(n-1)} + a_2 (\bar{y} + Y)^{(n-2)} + \dots + a_n (\bar{y} + Y) &= f(x), \\ (\bar{y}^{(n)} + a_1 \bar{y}^{(n-1)} + a_2 \bar{y}^{(n-2)} + \dots + a_n \bar{y}) + & \\ + (Y^{(n)} + a_1 Y^{(n-1)} + a_2 Y^{(n-2)} + \dots + a_n Y) &= f(x), \\ 0 + f(x) &= f(x), \quad f(x) = f(x), \text{ что требовалось доказать.} \end{aligned}$$

Следствие теоремы 1. Если $\bar{y}$ - общее решение ЛОДУ (4.23), Y - некоторое частное решение ЛНДУ (4.22), то сумма $\bar{y} + Y$ - общее решение неоднородного уравнения. Последнее утверждение можно доказать, подобно теореме из §4.10.

Вывод: общее решение неоднородного линейного уравнения есть сумма общего решения $\bar{y}$ однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному, и частного решения неоднородного уравнения Y . С учетом формулы (4.16) общее решение ЛНДУ имеет вид:

$$y = \bar{y} + Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + Y. \quad (4.24)$$

Формула (4.24) определяет структуру общего решения ЛНДУ.

Теорема 2. Если правая часть уравнения (4.22) является суммой функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$, то частное решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f_1(x) + f_2(x)$$

есть сумма $Y = Y_1 + Y_2$, где Y_1 - частное решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f_1(x),$$

а решение Y_2 определяется для уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f_2(x).$$

Доказательство

Подставим сумму частных решений $Y_1 + Y_2$ в уравнение

$$\begin{aligned} & (Y_1^{(n)} + a_1 Y_1^{(n-1)} + \dots + a_n Y_1) + \\ & + (Y_2^{(n)} + a_1 Y_2^{(n-1)} + \dots + a_n Y_2) = f_1(x) + f_2(x), \\ & f_1(x) + f_2(x) = f_1(x) + f_2(x), \text{ что требовалось доказать.} \end{aligned}$$

4.16 Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных

Докажем, что можно интегрированием определить частное решение Y ЛНДУ, если найдена фундаментальная система решений соответствующего ЛОДУ. Доказательство проведем на примере ЛНДУ второго порядка

$$y'' + py' + qy = f(x). \quad (4.25)$$

Пусть найдена фундаментальная система решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ соответствующего однородного уравнения. Тогда общее решение однородного уравнения записывается в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Теперь, вместо произвольных постоянных C_1, C_2 подставим неизвестные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, и в виде

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \quad (4.26)$$

определяем общее решение неоднородного уравнения (4.25). Поскольку введены две неизвестных функции, при определении решения мы можем поставить одно дополнительное условие на $C_1(x)$, $C_2(x)$.

Чтобы подставить решение (4.26) в уравнение (4.25), решение дифференцируем.

$$y' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Вводим дополнительное условие:

$$C_1' \overline{C_1} y_1 \overline{C_1} + C_2' \overline{C_2} y_2 \overline{C_2} = 0. \quad (4.27)$$

Тогда

$$y' = C_1 \overline{C_1} y_1' \overline{C_1} + C_2 \overline{C_2} y_2' \overline{C_2}. \quad (4.28)$$

Выражение (4.28) дифференцируем снова:

$$y'' = C_1' \overline{C_1} y_1' \overline{C_1} + C_1 \overline{C_1} y_1'' \overline{C_1} + C_2' \overline{C_2} y_2' \overline{C_2} + C_2 \overline{C_2} y_2'' \overline{C_2}. \quad (4.29)$$

Подставим выражения (4.26), (4.28), (4.29) в уравнение (4.25).

$$\begin{aligned} C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + \\ + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f \overline{C_1} \overline{C_2} \\ C_1 y_1'' + p y_1' + q y_1 + C_2 y_2'' + p y_2' + q y_2 + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f \overline{C_1} \overline{C_2}, \end{aligned}$$

Выражения в скобках равны тождественно нулю, поэтому,

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f \overline{C_1} \overline{C_2}. \quad (4.30)$$

Уравнения (4.27) и (4.30) вместе составляют систему линейных

алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1' \overline{C_1}$, $C_2' \overline{C_2}$:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f \overline{C_1} \overline{C_2} \end{cases} \quad (4.31)$$

Система (4.31) по правилу Крамера имеет единственное решение, так как её определитель – определитель Вронского для двух линейно независимых функций, он не равен нулю:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Определив $C_1' \overline{C_1}$, $C_2' \overline{C_2}$ путем интегрирования найдем $C_1 \overline{C_1}$, $C_2 \overline{C_2}$ и общее решение ЛНДУ (4.25).

Пример 4.14 Определить общее решение уравнения $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

Решение

Однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному, имеет вид: $y'' + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$. Корни характеристического уравнения мнимые $k_{1,2} = \pm i$. Паре корней соответствует фундаментальная система решений $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Составляем систему (4.31).

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases} \Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1.$$

Вспомогательные определители: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 1/\cos x & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x,$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1/\cos x \end{vmatrix} = 1; \quad C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\operatorname{tg} x; \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1.$$

$$C_1 \curvearrowright = -\int \operatorname{tg} x dx + A = \ln|\cos x| + A; \quad C_2 \curvearrowright = \int dx + B = x + B.$$

Здесь A, B - произвольные постоянные. Запишем общее решение уравнения по формуле (4.26):

$$y = C_1 \curvearrowright_1 \curvearrowright C_2 \curvearrowright_2 \curvearrowright = (\ln|\cos x| + A) \cos x + B \sin x, \\ y = (A \cos x + B \sin x) + (\ln|\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x).$$

Выражение в первых скобках – общее решение ЛОДУ, во вторых скобках – частное решение ЛНДУ, зависящее от правой части.

Примечание – метод вариации произвольных постоянных справедлив для любых линейных неоднородных уравнений.

4.17 Неоднородные линейные уравнения со специальной правой частью

Если неоднородное линейное уравнение имеет правую часть $f \curvearrowright$ определенного вида, рассматриваемого ниже, то частное решение Y можно определить, не прибегая к методу интегрирования. Рассматривается два вида правой части, которые называются *специальными*.

$$1) \text{ Правая часть вида } f(x) = e^{\alpha x} P(x), \quad (4.32)$$

где $P \curvearrowright$ – многочлен степени m .

Частное решение нужно искать в виде

$$Y = e^{\alpha x} [A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0] \cdot x^r, \quad (4.33)$$

где неизвестные заранее коэффициенты $A_m, \dots, A_0$ определяются *методом неопределенных коэффициентов*, показатель r равен количеству корней характеристического уравнения, равных коэффициенту в показателе экспоненты.

2) Правая часть вида

$$f(x) = e^{\alpha x} [P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x], \quad (4.34)$$

где $P(x), Q(x)$ – многочлены по степеням x .

Частное решение нужно искать в виде

$$Y = e^{\alpha x} [A(x) \cos \beta x + B(x) \sin \beta x] \cdot x^r. \quad (4.35)$$

При этом многочлены $A(x)$ и $B(x)$ должны быть одинаковой степени, большей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Показатель r равен количеству пар комплексных сопряженных корней характеристического уравнения, у которых действительная часть совпадает с коэффициентом в показателе экспоненты α , а мнимая – с коэффициентом β .

Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ в формулах (4.32) и (4.34) могут не содержать некоторых степеней x . Частное решение (4.33) и (4.35) должно содержать многочлены той же степени со всеми коэффициентами.

Наличие в правой части (4.32) многочлена без экспоненты говорит о том, что показатель у экспоненты равен нулю, и для определения числа r в формуле (4.33) проверяют наличие нулевых корней характеристического уравнения.

Правая часть (4.34) может содержать только одну из функций $\sin \beta x$ или $\cos \beta x$, но частное решение (4.35) должно записываться с обеими этими функциями.

Если правая часть уравнения (4.22) не имеет вид формул (4.32), (4.34) или их суммы, то для определения частного решения ЛНДУ применяется *метод вариации произвольных постоянных*, изученный в §4.16.

Если правая часть ЛНДУ является суммой нескольких функций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x),$$

причем каждая из слагаемых $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) имеет вид формул (4.32), (4.34) или же не подходит под эти формулы, то частное решение уравнения (4.22) – сумма частных решений $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$, причём каждое слагаемое Y_i определяется одним из перечисленных выше методов.

Коэффициенты многочленов $A(x)$ и $B(x)$ определяются методом неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов основан на том, что любое решение дифференциального уравнения превращает его в тождество. Если

решение $\bar{Y}$ подставить в данное ЛНДУ, уравнение превратится в тождество, в котором при одинаковых функциях левой и правой части должны стоять одинаковые коэффициенты. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x или других функциях, получаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов в многочленах $A\bar{C}$ и $B\bar{C}$ из формул (4.33), (4.35).

Пример 4.15 Найти общее решение ЛНДУ:

$$1. y'' + y' - 6y = e^x(x-1); \quad 2. y'' + y = x \sin x + e^{-2x} \cos x.$$

Решение

1. Вначале определяется общее решение соответствующего ЛОДУ (см. пример 4.13а): $\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$. Далее находим частное решение ЛНДУ. Коэффициент в показателе экспоненты в правой части не равен корню характеристического уравнения, следовательно, $Y = e^x(Ax+B)$. Для нахождения неизвестных A, B применяем метод неопределенных коэффициентов.

Подставим $\bar{Y}$ в заданное уравнение. Для этого нужно найти Y', Y'' .

$$Y' = e^x(Ax+B) + e^x A = e^x(Ax+A+B),$$

$$Y'' = e^x(Ax+A+B) + e^x A = e^x(Ax+2A+B).$$

Подставляя Y, Y', Y'' в уравнение, получаем

$$e^x(Ax+2A+B) + e^x(Ax+A+B) - 6e^x(Ax+B) \equiv e^x(x-1).$$

Разделим тождество на e^x , а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$-4Ax + 3A - 4B \equiv x - 1, \quad \begin{cases} -4A = 1, \\ 3A - 4B = -1, \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{16}.$$

Следовательно, искомое общее решение записывается так:

$$y = \bar{y} + Y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + e^x \left(\frac{1}{16} - \frac{x}{4} \right).$$

2. Вначале определяем общее решение соответствующего ЛОДУ. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет мнимые корни $k_1 = i, k_2 = -i$, поэтому (таблица 3, пункт 4)

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частное решение ЛНДУ определяем в виде суммы $Y = Y_1 + Y_2$ где Y_1 определяется из уравнения

$$y'' + y = x \sin x, \quad (*)$$

а Y_2 определяется из уравнения

$$y'' + y = e^{-2x} \cos x. \quad (**)$$

В уравнениях (*) и (**) правая часть имеет вид (4.34). Для частного решения Y_1 показатель $r=1$, так как нулевая действительная часть корня характеристического уравнения совпадает с нулевым коэффициентом показателя экспоненты правой части (экспонента в записи отсутствует), мнимая часть корня равна коэффициенту в аргументе $\sin x$. С учетом примечаний, запишем:

$$\begin{aligned} Y_1 &= ((ax+b)\sin x + (cx+d)\cos x)x, \\ Y_1' &= (-cx^2 + (2a-d)x + b)\sin x + (ax^2 + (b+2c)x + d)\cos x, \\ Y_1'' &= (-ax^2 + (-b-4c)x + 2a-2d)\sin x + \\ &\quad + (-cx^2 + (4a-d)x + 2b+2c)\cos x. \end{aligned}$$

Подставим Y_1, Y_1'' в уравнение (*), тогда после преобразования получим:

$$-4cx \sin x + (2a-2d)\sin x + 4ax \cos x + (2b+2c)\cos x \equiv x \sin x.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях тождества, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -4c = 1, \\ 2a - 2d = 0, \\ 4a = 0, \\ 2b + 2c = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{4}, \\ b = \frac{1}{4}, \\ a = 0, \\ d = 0, \end{cases} \Rightarrow Y_1 = \left(\frac{1}{4} \sin x - \frac{x}{4} \cos x \right) x.$$

Запишем Y_2 и определим коэффициенты ($r=0$):

$$Y_2 = e^{-2x} (A \cos x + B \sin x),$$

$$Y_2' = e^{-2x}((B-2A)\cos x + (-A-2B)\sin x),$$

$$Y_2'' = e^{-2x}((3A-4B)\cos x + (4A+3B)\sin x).$$

Подставим Y_2, Y_2'' в уравнение (**), и разделим на e^{-2x} :

$$(4A - 4B)\cos x + (4A + 4B)\sin x \equiv \cos x,$$

$$\begin{cases} 4a - 4b = 1, \\ 4a + 4b = 0, \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{8}, B = -\frac{1}{8},$$

$$Y_2 = e^{-2x} \left(\frac{1}{8} \cos x - \frac{1}{8} \sin x \right).$$

Искомое общее решение ЛНДУ запишется в виде: $y = \bar{y} + Y_1 + Y_2 =$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\frac{1}{4} \sin x - \frac{x}{4} \cos x \right) x + e^{-2x} \left(\frac{1}{8} \cos x - \frac{1}{8} \sin x \right).$$

4.18 Системы дифференциальных уравнений

4.18.1 Канонические и нормальные системы

При решении многих задач требуется найти функции y_1 , y_2 , ..., y_n , которые удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений. Порядок уравнений, входящих в систему может быть любой.

Система дифференциальных уравнений, разрешенная относительно старших производных, называется *канонической* системой. Она имеет вид:

[illegible]

Порядком системы называется число $p = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

Система дифференциальных уравнений первого порядка, где x - независимая переменная, $y_1, y_2, \dots, y_n$ - неизвестные функции от x , называется нормальной системой и записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\
 y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n),
 \end{aligned}$$

Число n называется *порядком* нормальной системы.

4.18.2 Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Система уравнений вида

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\
 \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(x),
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

называется линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений в нормальном виде.

Здесь $y_1, \dots, y_n$ – неизвестные функции, $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ – коэффициенты, $f_1(x), \dots, f_n(x)$ – заданные функции независимой переменной x (правые части уравнений системы).

Неоднородной системе (4.36) соответствует однородная линейная система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\
 \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\
 &\vdots \\
 \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Как однородные, так и неоднородные системы дифференциальных уравнений можно решать путём преобразования их к одному дифференциальному уравнению. Другой метод решения – метод Эйлера рассмотрен в учебном пособии [2].

4.18.3 Преобразование уравнения в нормальную систему

Любую каноническую систему можно привести к *эквивалентной* (имеющей такое же решение) нормальной системе.

Любое линейное неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка можно представить линейной нормальной системой n уравнений, если ввести новые неизвестные функции (всего $n-1$ функций). Метод преобразования уравнения в нормальную систему покажем на примере уравнения 3-го порядка.

Пусть задано уравнение $y''' + ay'' + by' + cy = f(x)$ и начальные условия $y(0) = \bar{y}_0$, $y'(0) = \bar{y}_1$, $y''(0) = \bar{y}_2$.

Введем обозначения: $y = y_1$, $y' = y_1' = y_2$, $y'' = y_2' = y_3$.

Запишем уравнение с учетом обозначений: $y_3' + ay_3 + by_2 + cy_1 = f(x)$,

откуда $y_3' = -ay_3 - by_2 - cy_1 + f(x)$. Получили три уравнения 1-го порядка, которые запишем линейной нормальной системой:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = -cy_1 - by_2 - ay_3 + f(x) \end{cases}$$

Начальные условия к полученной линейной нормальной системе имеют вид:

$$y_1(0) = \bar{y}_1, \quad y_2(0) = \bar{y}_2, \quad y_3(0) = \bar{y}_3.$$

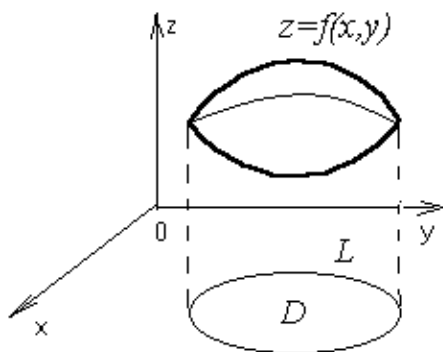
Примечание – важно иметь возможность преобразовать каноническую систему или одно уравнение высшего порядка в нормальную систему, так как численные методы решения дифференциальных уравнений применимы лишь для нормальных систем уравнений.

Глава 5. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.1 Объём цилиндрического тела. Двойной интеграл

Пусть в некоторой замкнутой области D плоскости xOy определена ограниченная функция $z = f(x, y)$, причём $f(x, y) \geq 0$. К определению двойного интеграла приходим, вычисляя объём фигуры, основание которой - область D ; сверху фигура ограничена поверхностью, уравнение которой $z = f(x, y)$; боковая поверхность - цилиндрическая, образованная прохождением прямой, параллельной оси Oz вдоль границы L области D . Такая фигура называется *цилиндрическим телом* (рисунок 5.1).

Объём цилиндрического тела можно вычислить приближённо, заменив его ступенчатой фигурой следующим образом.



1. Область D произвольным образом разбивается на конечное число n элементарных областей (ячеек) $D_1, D_2, \dots, D_n$, площади которых

обозначим соответственно $\Delta S_1,$

$\Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Диаметр ячейки называют наибольшее расстояние между двумя точками на её границе и обозначают $\text{diam} D_i$.

Рисунок 5.1 - Цилиндрическое тело

2. Выберем в каждой ячейке D_i произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$ и вычислим в ней значение $f(x_i, y_i)$. Составим сумму вида:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i. \quad (5.1)$$

Каждое слагаемое в сумме (5.1) вычисляет объём прямого цилиндра с основанием D_i и высотой $f(x_i, y_i)$.

Сумма (5.1) называется *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ по области D . Предел интегральной суммы (5.1) при

$\max_{i=1, \dots, n} \text{diam} D_i \rightarrow 0$ называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (5.2)$$

$$\max_{i=1, \dots, n} \text{diam} D_i \rightarrow 0$$

В обозначении двойного интеграла D – область интегрирования, $f(x, y)$ – подынтегральная функция, dS – дифференциал площади, который можно заменить произведением дифференциалов независимых переменных $dx dy$.

Формула (5.2) позволяет вычислить объём цилиндрического тела при $f(x, y) \geq 0$, в чём и заключается геометрический смысл двойного интеграла.

В общем случае, если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D , то двойной интеграл существует (существует предел интегральной суммы (5.2)) и не зависит от способа разбиения области D на частичные и от выбора точек $M_i(x_i, y_i)$ в них.

5.2 Основные свойства и приложения двойного интеграла

1. Линейные свойства двойного интеграла:

$$\begin{aligned} \iint_D C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y) dS &= \\ &= C_1 \iint_D f_1(x, y) dS + C_2 \iint_D f_2(x, y) dS. \end{aligned}$$

2. Если область D разделена на несколько частей $D_1, D_2, \dots, D_k$ без общих внутренних точек, то

$$\iint_D f(x, y) dS = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} f(x, y) dS.$$

3. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D , то в этой области найдётся такая точка (x_0, y_0) , что:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) S_D,$$

где S_D - площадь области D (теорема о среднем в двойном интеграле).

4. Если m , M - наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции $f(x, y)$ в области D , то справедливо двойное неравенство (оценка двойного интеграла):

$$m \cdot S_D \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S_D.$$

С помощью двойных интегралов можно вычислить следующие величины.

Площадь плоской фигуры D :
$$S_D = \iint_D dx dy. \quad (5.3)$$

Если D - плоская пластинка с поверхностной плотностью $\mu(x, y)$, то по следующим формулам определяются:

а) масса пластинки
$$m = \iint_D \mu(x, y) dx dy; \quad (5.4)$$

б) статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy :

$$S_x = \iint_D y \cdot \mu(x, y) dx dy; \quad S_y = \iint_D x \cdot \mu(x, y) dx dy; \quad (5.5)$$

в) координаты центра масс пластинки:

$$x_C = \frac{S_x}{m}; \quad y_C = \frac{S_y}{m}; \quad (5.6)$$

г) моменты инерции пластинки D относительно осей координат и начала координат:

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy, \quad I_0 = I_x + I_y. \quad (5.7)$$

5.3 Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

5.3.1 Вычисление двойного интеграла на прямоугольнике со сторонами, параллельными осям координат

Пусть область D заданы прямоугольником в виде $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Разобьем область на частичные прямыми $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n = b$, а также $y = y_0 = c$, $y = y_1$, $y = y_2$, ..., $y = y_m = d$.

Область D разбита на частичные области прямоугольной формы D_{ij} , где $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,m$. Площадь частичной области D_{ij} обозначим ΔS_{ij} . Эта площадь равна произведению сторон, длины которых обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Следовательно, $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$.

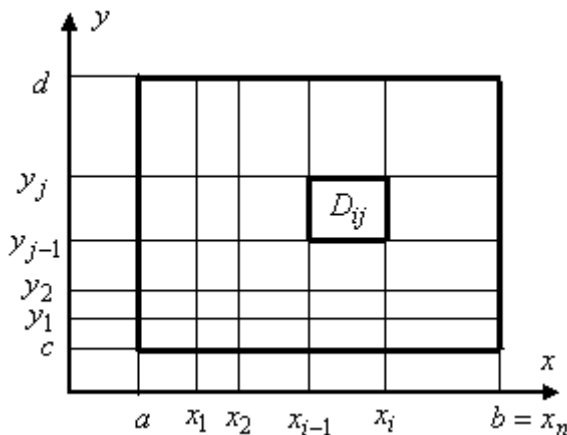


Рисунок 5.2 – Прямоугольная область интегрирования

В каждой частичной области выбираем в произвольном месте точку с координатами $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$, в которой вычисляем значение подынтегральной функции и составляем интегральную сумму вида (5.1): $\sum f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta S_{ij}$. Двойной интеграл равен пределу интегральных сумм при $\Delta S_{ij} \rightarrow 0$, при этом $\Delta x_i \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и $\Delta y_j \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x, y) ds &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta S_{ij} = \\
 &\quad (\text{суммируем вначале по столбцам, потом по строкам}) \\
 &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \left(\lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta y_j \right) \Delta x_i = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \left(\int_c^d f(\bar{x}_i, y) dy \right) \Delta x_i = \\
 &\quad (\text{каждый интеграл в скобках – некоторое значение } F(\bar{x}_i)) \\
 &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.
 \end{aligned}$$

Вывод: чтобы вычислить двойной интеграл по прямоугольной области, нужно:

- 1) дифференциал площади представить в виде произведения дифференциалов независимых переменных $dS = dxdy$;
- 2) двойной интеграл представить **в виде повторного интеграла** с расстановкой пределов интегрирования в каждом интеграле, как в определённом интеграле

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

При вычислении пределов интегральных сумм, последовательность суммирования можно изменить и суммировать вначале по строкам, потом по столбцам. Тогда внутренний интеграл будет по переменной x , а внешний по переменной y (значение двойного интеграла при этом не изменится):

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

После вычисления внутреннего интеграла образуется обычный определённый интеграл.

Пример 5.1 Вычислить двойной интеграл $\iint_D y \sin x dxdy$, если область

интегрирования определяется неравенствами $0 \leq x \leq \pi$, $\pi/2 \leq y \leq \pi$.

Решение

Выберем последовательность интегрирования x , y и запишем повторный интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_D y \sin x dxdy &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^{\pi} y \sin x dx \right) dy = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(-y \cos x \Big|_0^{\pi} \right) dy = \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} y (\cos \pi - \cos 0) dy = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} y dy = y^2 \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{3}{4} \pi^2. \end{aligned}$$

5.1.2 Вычисление двойного интеграла на произвольной плоской области

Область D называется *правильной относительно оси Ox* , если прямая, параллельная этой оси, проходящая через внутреннюю точку области D , пересекает границу области в двух точках. Аналогично определяется правильная область относительно оси Oy .

Область D , правильную относительно как Ox , так и Oy , называют просто *правильной областью*.

Если область D – правильная относительно Oy (рисунок 5.3), двойной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (5.8)$$

Правую часть формулы (5.8) называют *повторным (двукратным) интегралом*.

Вычисление повторного интеграла начинаем с вычисления внутреннего

интеграла $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, в котором переменную x надо принять при интегрировании за постоянную величину. После подстановки пределов интегрирования в первообразную получаем некоторую функцию от x , которую затем интегрируем на отрезке $[a; b]$.

Если область D является правильной относительно оси Ox (рисунок 5.4), двойной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (5.9)$$

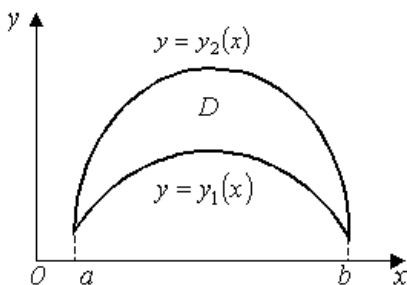


Рисунок 5.3 – Область, правильная относительно оси Oy

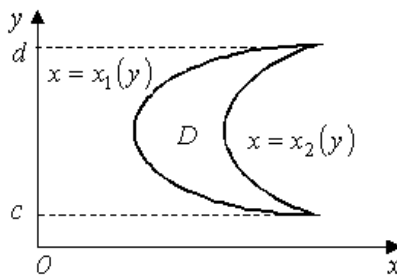


Рисунок 5.4 – Область, правильная относительно оси Ox

Если область D – просто правильная, можно применять как формулу (5.8), так и формулу (5.9). При этом переход от одной формулы к другой называют *изменением порядка интегрирования*.

Сам процесс перехода от двойного интеграла к повторному и расстановка пределов интегрирования для внешнего и внутреннего интегралов называют *приведением двойного интеграла к повторному*.

Правило расстановки пределов.

1. В пределах внутреннего интеграла (интеграла по первой переменной) в общем случае стоят функции второй переменной, определяемые из уравнений границ области интегрирования.
2. В пределах внешнего интеграла (по второй переменной) стоят постоянные числа, равные предельным значениям проекции области интегрирования на соответствующую ось.

В результате вычисления двойного интеграла получается некоторое постоянное число.

Если область не является правильной ни относительно оси Ox , ни относительно оси Oy , её разбивают на конечное число областей $D_1, D_2, \dots, D_k$, правильных относительно одной из осей и при вычислении применяют свойство 2.

Пример 5.2 Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+y) dx dy$ двумя способами, если граница области D задана уравнениями:

$$\text{а) } y = x^2; \quad x = y^2; \quad \text{б) } y = -x; \quad y = 1; \quad y = x^2.$$

Решение

а) Построив кривые, получим область D (рисунок 5.5). Область правильная. Применим формулу (5.8), когда во внутреннем интеграле переменная интегрирования y . Уравнения границ области должны быть выражены в виде $y = y(x)$. Поэтому уравнение верхней границы области

$x = y^2$ преобразуем к виду $y = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y) dy = \int_0^1 dx \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} = \\ &= \int_0^1 \left(2x\sqrt{x} + \frac{x}{2} - 2x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

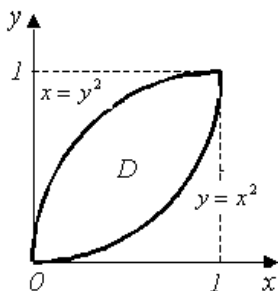


Рисунок 5.5 – Область интегрирования к примеру 5.2,а

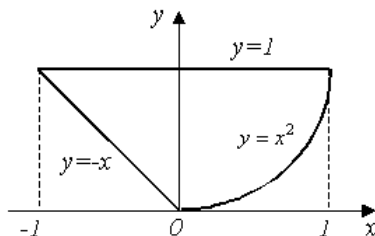


Рисунок 5.6 – Область интегрирования к примеру 5.2,б

Изменим порядок интегрирования и применим формулу (5.9). Теперь первое интегрирование проходит по переменной x , поэтому уравнения границ области интегрирования должны быть выражены в виде $x = y^2$ и $x = \sqrt{y}$:

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x+y) dx = \int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2} + xy \right) \Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\sqrt{y} - y^4 - y^3 \right) dy = \frac{y^2}{2} + \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

б) Область D построена на рисунке 5.6. Область D правильная. Выбираем для интегрирования формулу (5.9):

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{-y}^{\sqrt{y}} (x+y) dx = \int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2} + xy \right) \Big|_{-y}^{\sqrt{y}} = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\sqrt{y} - y^2 + y^2 \right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Изменим порядок интегрирования. При этом нижняя граница области D задана двумя аналитическими выражениями $y = -x$, $y = x^2$. В этом случае область D нужно разбить на две области D_1 , D_2 с помощью прямой, проходящей по оси Oy . На основании свойства 2 двойного интеграла получаем:

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) dx dy &= \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 (x+y) dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x+y) dy = \\ &= \int_{-1}^0 dx \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-x}^1 + \int_0^1 dx \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^1 = \\ &= \int_{-1}^0 \left(2x + \frac{1}{2} + 2x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(2x + \frac{1}{2} - 2x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

5.4 Двойной интеграл в полярных координатах

Если область интегрирования D – круг или часть круга, то обычно двойной интеграл вычислить легче, если перейти к полярным координатам. Полярный полюс помещается в начало декартовых координат, полярная ось направлена вдоль оси Ox . Формулы перехода к полярным координатам:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (5.10)$$

5.4.1 Дифференциал площади в полярной системе координат

Разобьём область интегрирования D на частичные концентрическими окружностями с уравнениями $r = r_0$, $r = r_1$, $r = r_2$, ..., $r = r_n$ и лучами $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$, ..., $\varphi = \varphi_m$ (рисунок 5.7). Площадь частичной области D_{ij} обозначим ΔS_{ij} . Величину площади ΔS_{ij} вычислим как разность площадей двух секторов. Обозначим $\Delta r = r_i - r_{i-1}$, $\Delta \varphi = \varphi_j - \varphi_{j-1}$.

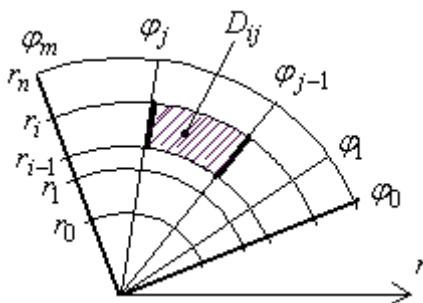


Рисунок 5.7 – Вычисление площади частичной области в полярной системе координат

$$\Delta S_{ij} = \frac{1}{2}(r_{i-1} + \Delta r)^2 \Delta \varphi - \frac{1}{2}r_{i-1}^2 \Delta \varphi = r_{i-1} \Delta r \Delta \varphi + \frac{1}{2} \Delta r^2 \Delta \varphi.$$

Если $\Delta r \rightarrow 0$ и $\Delta \varphi \rightarrow 0$, то дифференциал площади dS равен главной части суммы бесконечно малых, следовательно $dS = r \Delta r \Delta \varphi$. Так как дифференциалы независимых переменных равны их приращениям, то окончательно формула дифференциала площади в полярной системе имеет вид:

$$dS = r dr d\varphi. \quad (5.11)$$

С учётом формул (5.10), (5.11) находим:

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Когда двойные интегралы в полярных координатах выражаются через повторные интегралы, всегда первая переменная интегрирования r , а вторая переменная интегрирования φ . Различают два основных случая.

1) Полярный центр лежит за пределами области интегрирования, рисунок 5.8. В этом случае расстановка пределов показана в формуле (5.12).

$$\iint_D f(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(r, \varphi) r dr. \quad (5.12)$$

2) Если полярный центр лежит внутри области D , Оли окружен областью, то расстановка пределов соответствует рисунку 5.9 и показана в формуле (5.13):

$$\iint_D f(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r f(r, \varphi) r dr. \quad (5.13)$$

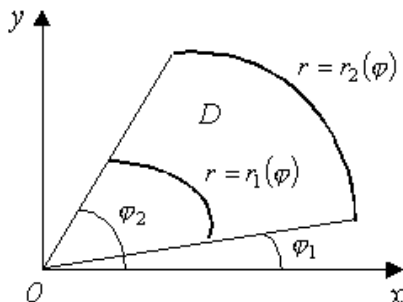


Рисунок 5.8 - Область интегрирования, не содержащая начало координат

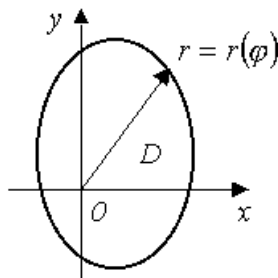


Рисунок 5.9 - Область интегрирования, содержащая начало координат

Пример 5.3 Изобразить на плоскости фигуру D . Вычислить массу пластины D с поверхностной плотностью распределения $\mu = \mu(x, y)$. Рекомендуется использовать полярную систему координат.

$$D: x^2 + y^2 \geq 1; \quad x^2 - 2x + y^2 \leq 0;$$

$$y \geq 0; \quad y \leq x. \quad \mu = y.$$

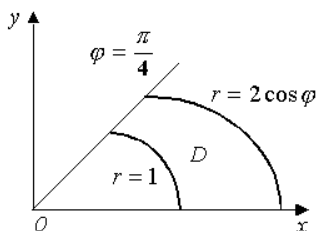
Решение

Границы области D : окружность радиуса 1 с центром в начале координат $x^2 + y^2 = 1$; окружность со смещённым центром $(x-1)^2 + y^2 = 1$; прямые $y = 0$ и $y = x$. Изображение области D – на рисунке 5.10.

Используя формулы (5.10), преобразуем уравнения границ в полярную систему координат:

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1; \quad x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \cos \varphi;$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0; \quad y = x \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$



Массу пластинки с заданной поверхностной плотностью вычисляем по формуле (5.4) с учетом формул (5.10) и (5.11):

Рисунок 5.10 – К примеру 5.3

$$\begin{aligned}
m &= \iint_D \mu(\mathbf{r}; y) ds = \iint_D y ds = \iint_D r^2 \sin \varphi dr d\varphi = \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \int_1^{2\cos \varphi} r^2 dr = \\
&= \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \left(\frac{r^3}{3} \right) \Big|_1^{2\cos \varphi} = \int_0^{\pi/4} \frac{8}{3} \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi - \\
&\quad - \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3} \sin \varphi d\varphi = -\frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \varphi d\cos \varphi - \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi = \\
&= -\frac{8}{3} \cdot \frac{\cos^4 \varphi}{4} \Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{3} \cos \varphi \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{6} (1 + \sqrt{2}) . \text{ Ответ: } m = \frac{1}{6} (1 + \sqrt{2}) .
\end{aligned}$$

5.5 Определение тройного интеграла

Пусть в замкнутой пространственной области V определена непрерывная функция трёх переменных $f(\mathbf{r}; y, z)$. Разобьём область V на частичные, объёмы которых обозначим $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. Выберем в каждой частичной области произвольную точку $(\mathbf{r}_i, y_i, z_i)$, в которой вычислим значение функции $f(\mathbf{r}_i, y_i, z_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$. Составим сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}_i, y_i, z_i) \Delta V_i, \quad (5.14)$$

которая называется *интегральной суммой для тройного интеграла*.

Предел интегральной суммы (5.14) при $n \rightarrow \infty$ и $\max \text{diam} \Delta V_i \rightarrow 0$, не зависящий от способа разбиения области V на частичные и от выбора точек $(\mathbf{r}_i, y_i, z_i)$, называется *тройным интегралом от функции $f(\mathbf{r}; y, z)$ по области V* и обозначается

$$\iiint_V f(\mathbf{r}; y, z) dv.$$

В тройном интеграле $\int \int \int f(x, y, z) \, dv$ называется подынтегральной функцией, dv называется дифференциалом объёма.

Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Приложения тройного интеграла

С помощью тройного интеграла наряду с другими величинами можно вычислить:

1) объём области V по формуле
$$V = \iiint_V dv; \quad (5.15)$$

2) массу m тела V с переменной плотностью $\mu = \mu(x, y, z)$ по формуле

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z) \, dv. \quad (5.16)$$

5.6 Вычисление тройного интеграла в декартовых и других координатах

Тройной интеграл в декартовых координатах

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трёх однократных интегралов. При этом дифференциал объёма равен произведению дифференциалов независимых переменных $dv = dx dy dz$. Область интегрирования называется *правильной*, если

прямая, проходящая через произвольную внутреннюю точку области интегрирования параллельно каждой оси координат пересекает границу области в двух точках. В правильной области можно выбрать любую последовательность интегрирования по переменным x, y, z . Вычисление начинается с построения рисунка области интегрирования по заданным

уравнениям границ области. Выбрав первую переменную интегрирования, нужно построить проекцию области интегрирования на плоскость двух других переменных. Например, если первое интегрирование производится по переменной z , то будет нужна проекция области на плоскость xOy .

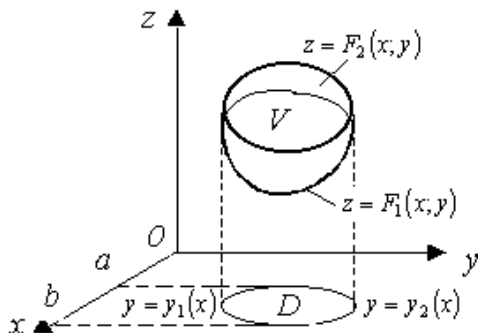


Рисунок 5.11- Пространственная область интегрирования V и её проекция D

Пусть поверхность, ограничивающая область V снизу, имеет уравнение $z = F_1(x, y)$, а поверхность, ограничивающая область V сверху $z = F_2(x, y)$ (рисунок 5.11). Проекцию области V на плоскость xOy обозначим D . Она имеет уравнения границ $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. Тогда тройной интеграл по области V равен *трёхкратному* интегралу:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{F_1(x, y)}^{F_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (5.17)$$

По формуле (5.17) можно сформулировать *правило расстановки пределов в трёхкратном интеграле*:

- 1) в пределах интеграла по первой переменной в общем случае стоят функции двух других переменных;
- 2) в пределах интеграла по второй переменной в общем случае стоят функции третьей переменной;
- 3) в пределах интеграла по третьей переменной всегда стоят числа, равные предельным значениям проекции области V на соответствующей оси.

В частном случае, когда границами области V являются плоскости, параллельные координатным плоскостям, в пределах всех однократных интегралов стоят постоянные величины.

Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Цилиндрические координаты при вычислении тройного интеграла удобно применять тогда, когда область V проектируется на одну из координатных плоскостей в круг или часть круга. Если этой координатной плоскостью является плоскость xOy , то цилиндрические координаты r, φ, z связаны с прямоугольными координатами x, y, z соотношениями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad (5.18)$$

где $r \geq 0$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $-\infty < z < +\infty$.

Дифференциал объёма в цилиндрических координатах выражается как

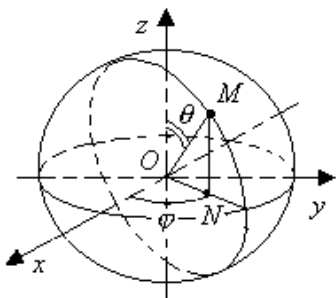
$$r dr d\varphi dz.$$

Формула замены переменных в тройном интеграле имеет вид:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz. \quad (5.19)$$

Тройной интеграл в сферических координатах

Если область V ограничена сферой или частью сферы, тройной интеграл вычислить проще переходом к сферическим координатам.



Сферические координаты точки M - три числа ρ, φ, θ , определяющие положение этой точки в пространстве. Пусть центр сферы радиуса ρ , точка O , совпадает с началом декартовых координат $Oxyz$. Тогда $OM = \rho$ есть расстояние точки M от точки O . Угол $\theta = \angle MOz$, т.е. угол, составленный радиус-вектором OM с положительным направлением оси Oz .

Рисунок 5.12 – Сферические координаты

Угол $\varphi = \angle xON$, где N проекция M на плоскость xOy . Связь между прямоугольными декартовыми координатами x, y, z точки M и её сферическими координатами ρ, φ, θ определяется соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta, \quad (5.20)$$

где $\rho \geq 0$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq \theta \leq \pi$.

Дифференциал объёма в сферических координатах выражается как

$$\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Формула замены переменных в тройном интеграле имеет вид:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \quad (5.21)$$

Пример 5.4 Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать рисунок данного тела и его проекции на плоскость xOy .

a) $z = 0, \quad 2x + z = 4, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x};$

b) $x^2 + y^2 = 9, \quad z \geq 0, \quad z \leq y + 3;$

$$\text{с) } x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \\ z \geq 0, \quad y = x, \quad x \geq 0.$$

Примечания к построению рисунка тела.

Плоскость в пространстве задаётся общим уравнением вида $Ax + By + Cz + D = 0$. Если $D=0$, то плоскость проходит через начало координат. Если равен нулю один из коэффициентов A, B, C , то плоскость параллельна оси отсутствующей переменной. Если два коэффициента из трёх (A, B, C) равны нулю, то плоскость параллельна координатной плоскости, проходящей через оси отсутствующих переменных.

Если уравнение поверхности не содержит одну из трёх независимых переменных, это является признаком того, что поверхность – цилиндрическая, с образующей, параллельной оси отсутствующей переменной. Заданное уравнение при этом – уравнение направляющей линии.

Уравнение сферы радиусом R с центром в начале координат имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Решение

а) С учётом примечаний, определяем виды заданных поверхностей. Так уравнение $z = 0$ определяет координатную плоскость xOy . Уравнение $2x + z = 4$, это уравнение плоскости, проходящей параллельно оси Oy . Уравнения $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ задают две цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси Oz . Объёмное тело и его проекция на плоскость xOy показаны на рисунке 5.13. Объём тела определяем по формуле (5.15):

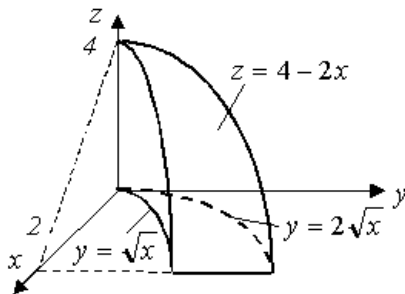


Рисунок 5.13 - Область V и её проекция D к примеру 5.4а

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{4-2x} dz = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-2x) dy = \\
 &= \int_0^2 (4-2x) (2\sqrt{x} - \sqrt{x}) dx = \int_0^2 (4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{32}{15} \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

б) Одна из граничных поверхностей тела – цилиндрическая, так что проекцией тела на плоскость xOy является круг $x^2 + y^2 = 9$ радиусом 3. Две другие граничные поверхности – плоскости $z = 0$ и $z = y + 3$ (рисунок 5.14). Для вычисления объёма тела применяем формулу (5.15) в цилиндрической системе координат:

$$V = \iiint_V r dr d\varphi dz.$$

Порядок интегрирования в цилиндрических координатах всегда один и тот же: z, r, φ . Приведём тройной интеграл к повторному используя формулы (5.18) и вычислим:

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r dr \int_0^{r \sin \varphi + 3} dz = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r(r \sin \varphi + 3) dr = \int_0^{2\pi} \left(9 \sin \varphi + \frac{27}{2} \right) d\varphi = 27\pi.
 \end{aligned}$$

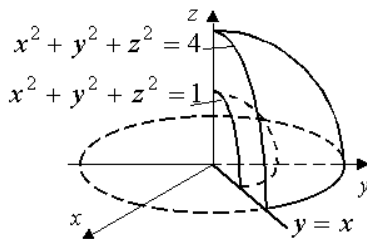
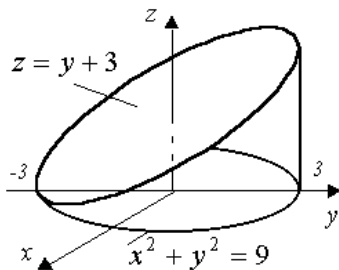


Рисунок 5.14 - Область V к примеру 5.4б Рисунок 5.15 - Область V к примеру 5.4с

с) Две поверхности, ограничивающие тело – сферы с радиусом 1 и 2: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. В качестве остальных границ служат плоскости $z = 0$, $y = x$, $x = 0$. Тело представлено на рисунке 5.15. Для вычисления объёма применяют формулу (5.15) в сферической системе координат.

Применяя формулы (5.20), найдём уравнения границ тела и приведём тройной интеграл к повторному:

$$V = \iiint_V \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 \rho^2 d\rho =$$

$$= \left[-\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\varphi \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{7\pi}{12}.$$

5.7 Вычисление кратных интегралов в пакете Mathcad

При вычислении кратных интегралов в математическом пакете Mathcad главная сложность, расстановка пределов в повторном интеграле, остается заботой пользователя [5].

Покажем примеры вычисления кратных интегралов в пакете Mathcad. Чтобы легче было ориентироваться в полученных результатах, будем вычислять интегралы, рассмотренные ранее в примерах 5.1, 5.2, 5.3.

Пример 1 (Mathcad) Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x + y) dx dy$

двумя способами, если граница области D задана уравнениями:

$$\text{а) } y = x^2; \quad x = y^2; \quad \text{б) } y = -x; \quad y = 1; \quad y = x^2.$$

Решение в Mathcad

$$\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (2 \cdot x + y) dy \right] dx \rightarrow \frac{9}{20} \quad \int_0^1 \left[\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (2 \cdot x + y) dx \right] dy = 0.45$$

Пример 2 (Mathcad) В примере требуется вычислить массу пластины. После перехода в полярную систему координат и расстановки пределов интегрирования получен повторный интеграл

$$m = \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \int_1^{2 \cos \varphi} r^2 dr.$$

Вычисления выполняем в Mathcad

$$m := \int_0^{\pi/4} \left(\int_1^{2 \cos \varphi} r^2 \cdot \sin \varphi dr \right) d\varphi \quad m \rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2} \quad m = 0.402$$

Результат вычисления выведен в аналитической и числовой формах.

Пример 3 (Mathcad)

Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

Тройные интегралы записаны в виде повторных и расставлены пределы интегрирования. Далее указаны интегралы и их вычисление в Mathcad.

а) Интеграл в декартовых координатах

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{4-2x} dz$$

$$V := \int_0^2 \left[\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \left(\int_0^{4-2x} 1 dz \right) dy \right] dx \quad V \rightarrow \frac{32}{15} \cdot \sqrt{2}$$

б) Интеграл в цилиндрических координатах

$$V = \iiint_V r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r dr \int_0^{r \sin \varphi + 3} dz$$

$$V := \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\sin|\phi|+3} r \, dz \, dr \, d\phi \quad V = 84.823 \quad V \rightarrow 27 \cdot \pi$$

с) Интеграл в сферической системе координат

$$V = \iiint_V \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 \rho^2 \, d\rho$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \rho^2 \cdot \sin|\theta| \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \rightarrow \frac{7}{12} \cdot \pi$$

Примечание – при вычислении интегралов в пакете Mathcad сохранены обозначения цилиндрических и сферических координат, что, вообще говоря, не обязательно.

5.8 Криволинейный интеграл первого рода

Пусть на плоскости xOy расположена кривая MN , гладкая (касательная к кривой непрерывно изменяется вдоль кривой) или кусочно-гладкая (составленная из гладких участков). Функция $z = f(x, y)$ определена и ограничена на кривой MN . Составляется интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i, \quad (5.22)$$

где n - число частичных кривых, на которые разделена кривая MN ;

(x_i, y_i) - некоторая точка, взятая на i -ой частичной кривой; Δl_i - длина i -ой частичной кривой, $i = 1, 2, \dots, n$.

Предел интегральной суммы (5.22) при условии, что все длины $\Delta l_i \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой MN и обозначается как

$$\int_{MN} f(x, y) dl, \quad (5.23)$$

где MN- линия интегрирования; dl - дифференциал длины дуги.

Другое название интеграла (5.23) – криволинейный интеграл от функции $f(x, y)$ по длине дуги MN.

Кривая MN может быть замкнутой линией L. Для обозначения криволинейного интеграла в этом случае используют символ $\oint_L$.

5.9 Основные свойства и приложения криволинейного интеграла первого рода

1. Линейные свойства:

$$\int_{MN} C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y) dl = C_1 \int_{MN} f_1(x, y) dl + C_2 \int_{MN} f_2(x, y) dl.$$

2. Если линия L состоит из частей L_1, L_2 , то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl.$$

3. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл не изменяет своего значения, т.е. если под MN и NM понимать разнонаправленные линии, то

$$\int_{MN} f(x, y) dl = \int_{NM} f(x, y) dl.$$

Это свойство характерно только для криволинейного интеграла 1-го рода, ввиду того, что $dl > 0$ при любом движении вдоль кривой MN.

С помощью криволинейных интегралов 1-го рода можно вычислять следующие геометрические и физические величины:

1) длина кривой MN

$$l = \int_{MN} dl; \quad (5.24)$$

2) если кривая MN - материальная линия с распределённой плотностью $\mu(x, y)$, то

$$\text{а) масса кривой} \quad m = \int_{MN} \mu(x, y) dl; \quad (5.25)$$

б) координаты центра тяжести кривой

$$x_c = \frac{1}{m} \int_{MN} x \cdot \mu(x, y) dl, \quad y_c = \frac{1}{m} \int_{MN} y \cdot \mu(x, y) dl \quad (5.26)$$

в) моменты инерции кривой относительно осей координат и начала координат

$$I_x = \int_{MN} y^2 \mu(x, y) dl; \quad I_y = \int_{MN} x^2 \mu(x, y) dl; \quad I_O = I_x + I_y. \quad (5.27)$$

5.10 Вычисление криволинейных интегралов 1-го рода

Чтобы вычислить криволинейный интеграл 1-го рода, его нужно преобразовать в определённый интеграл с помощью уравнения кривой интегрирования, при этом:

1) если кривая MN задана уравнением $y = \varphi(x)$ ($a \leq x \leq b$), то

$$dl = \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx,$$

$$\int_{MN} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx; \quad (5.28)$$

2) если кривая MN задана уравнением $x = \phi(y)$ ($c \leq y \leq d$), то

$$\int_{MN} f(x, y) dl = \int_c^d f(\phi(y), y) \sqrt{1 + (\phi'(y))^2} dy; \quad (5.29)$$

3) если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, ($\alpha \leq t \leq \beta$), то

$$\int_{MN} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt; \quad (5.30)$$

4) если кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$ ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$), то

$$\int_{MN} f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi; \quad (5.31)$$

5) если криволинейный интеграл задан на пространственной кривой MN и подынтегральная функция зависит от трёх переменных $f(x, y, z)$, то, задавая кривую параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), вычисление производим по формуле

$$\int_{MN} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (5.32)$$

Пример 5.5 Вычислить криволинейный интеграл первого рода

- a) $\int_{MN} (x - y) dl$, $MN: y = x - 1$, $M(0; 0)$, $N(1; 1)$;
 б) $\int_L (y^2 - x^2) dl$, $L: x = 4 \sin t$, $y = 4 \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

Решение

а) Судя по уравнению кривой интегрирования, интеграл нужно вычислять по формуле (5.28): $dl = \sqrt{1 + ((x - 1)')^2} = \sqrt{1 + 1} dx = \sqrt{2} dx$.

$$\int_{MN} (x - y) dl = \int_1^2 (x - x + 1) \sqrt{2} dx = \sqrt{2} \int_1^2 dx = \sqrt{2}.$$

с) В этом пункте кривая задана параметрическими уравнениями, поэтому интеграл вычисляем по формуле (5.30):

$$\begin{aligned} \text{д) } dl &= \sqrt{((4 \sin t)')^2 + ((4 \cos t)')^2} dt = \sqrt{16(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = 4 dt. \\ \int_L (y^2 - x^2) dl &= \int_0^{\pi/4} 16(\cos^2 t - \sin^2 t) 4 dt = 64 \int_0^{\pi/4} \cos 2t dt = 32 \sin 2t \Big|_0^{\pi/4} = 32. \end{aligned}$$

5.11 Криволинейный интеграл второго рода

Пусть по кривой MN , расположенной в плоскости xOy , движется материальная точка $P(x, y)$, к которой приложена сила $\vec{F}$, изменяющаяся по величине и направлению при перемещении точки. Физическая задача вычисления работы силы $\vec{F}$ при перемещении точки P из положения M в положение N приводит к понятию криволинейного интеграла второго рода. Для этого кривая MN разбивается на n произвольных частей точками $M = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = N$. Направленные отрезки $M_{i-1}M_i$ обозначим векторами $\vec{\Delta l}_i$, величину силы $\vec{F}$ в точке M_i обозначим $\vec{F}_i$.

Тогда скалярное произведение $\vec{F}_i \cdot \Delta \vec{l}_i$ - приближённое выражение работы силы $\vec{F}$ вдоль дуги $M_{i-1}M_i$. Работа на всей кривой MN

$$A \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{l}_i. \quad (5.33)$$

Пусть $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, $\Delta \vec{l}_i = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$, где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ - проекции вектора $\vec{F}$ на оси координат, Δx_i , Δy_i - проекции вектора $\Delta \vec{l}_i$. Запишем скалярное произведение в формуле (5.33) через проекции векторов:

$$A \approx \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i. \quad (5.34)$$

Предел интегральной суммы (5.34) при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных дуг кривой MN $\Delta l \rightarrow 0$ называется *криволинейным интегралом от функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ вдоль кривой MN по координатам x, y* (иначе - *криволинейным интегралом второго рода*).

Обозначается такой интеграл $\int_{MN} Pdx + Qdy$ и численно равен работе

силы $\vec{F}$ на пути MN.

Криволинейные интегралы второго рода обладают такими же свойствами 1, 2, как и интегралы первого рода. В отличие от последних они зависят от направления обхода кривой. Если изменить направление обхода, то интеграл меняет знак:

$$\int_{MN} Pdx + Qdy = - \int_{NM} Pdx + Qdy.$$

Если контур интегрирования L замкнут, то *положительным направлением обхода* считается движение против часовой стрелки. При этом область, заключённая внутри контура остаётся слева по ходу движения.

Чтобы вычислить криволинейный интеграл второго рода, его нужно преобразовать в определённый с помощью уравнения кривой интегрирования. При этом:

- 1) если кривая MN задана уравнением $y = y(x)$, то

$$\int_{MN} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_M}^{x_N} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)) dx; \quad (5.35)$$

2) если кривая MN задана уравнением $x = x(y)$, то

$$\int_{MN} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{y_M}^{y_N} (P(x(y), y) x'(y) + Q(x(y), y)) dy; \quad (5.36)$$

3) если кривая MN задана параметрическими уравнениями

$x = x(t), y = y(t)$ и при перемещении из точки M в точку N параметр t меняется от α до β , то

$$\int_{MN} P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt. \quad (5.37)$$

Важно подчеркнуть, что в нижнем пределе определённых интегралов (5.35) и (5.36) стоит координата точки начала, а в верхнем пределе стоит координата точки конца кривой интегрирования.

Криволинейный интеграл второго рода может быть задан на пространственной кривой, и тогда он имеет вид

$$\int_{MN} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Его можно преобразовать в определённый интеграл, если кривая интегрирования задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Пример 5.6 Вычислить работу силы $\vec{F}$ при перемещении точки по ломаной линии MNV . $\vec{F} = x^2 + 2y\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$, координаты точек $M(1; 2)$, $N(1; 5)$, $V(6; 7)$

Решение. Криволинейный интеграл второго рода $\int_{MN} P dx + Q dy$

численно равен работе силы $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ на пути MN. На этом физическом смысле криволинейного интеграла второго рода основано задание. Интеграл по ломанной линии MNV вычисляем суммой двух

интегралов: по отрезку прямой MN и отрезку NV . Определим уравнение прямой интегрирования MN , как уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - 3}{-1 - 3} = \frac{y - 1}{5 - 1}, \quad 3 - x = y - 1, \quad y = 4 - x.$$

Таким образом, $y = 4 - x$, $dy = -dx$.

Работу вычисляем по формуле $A_1 = \int_{MN} Pdx + Qdy$,

где $P = x + 2y$, $Q = x^2 - y$. Криволинейный интеграл вычисляем по формуле (5.35):

$$A_1 = \int_3^{-1} (x + 2(4 - x))dx + (x^2 - 4 + x)(-dx) = \int_3^{-1} (2 - 2x - x^2)dx = -\frac{92}{3}.$$

Затем определяем уравнение прямой, проходящей через точки N , V .

Получим $y = 2x + 7$, $dy = 2dx$. Применяем формулу (5.35):

$$A_2 = \int_{-1}^0 (x + 2(2x + 7))dx + (x^2 - 2x - 7)(2dx) = \int_{-1}^0 (x^2 + x)dx = \frac{1}{6}.$$

Вся работа равна сумме двух интегралов: $A = A_1 + A_2 = -\frac{61}{2}$.

5.12 Формула Грина

Формула Грина связывает между собой криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутой кривой L с двойным интегралом по области D , лежащей внутри контура L (см. рисунок 5.16).

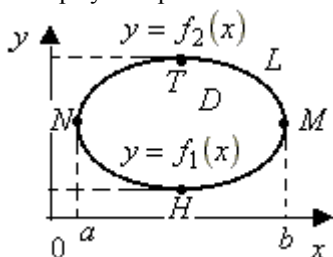


Рисунок 5.16 – Область D с границей L

Пусть в замкнутой области D заданы непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, имеющие непрерывные частные производные. Вычислим интеграл

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b \left(P(x, y) \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} \right) dx = (\text{расстановка пределов в повторном интеграле соответствует рисунку 5.16)} =$$

$$= \int_a^b (P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))) dx = \int_a^b P(x, f_2(x)) dx - \int_a^b P(x, f_1(x)) dx.$$

Интеграл $\int_a^b P(x, f_2(x)) dx$ можно рассматривать как криволинейный

второго рода от функции $P(x, y)$ по кривой NTM , в котором вторая независимая переменная y выражена через x с помощью уравнения кривой интегрирования (см. рисунок 5.16). Таким образом,

$$\int_a^b P(x, f_2(x)) dx = \int_{NTM} P(x, y) dx. \text{ Также, } \int_a^b P(x, f_1(x)) dx = \int_{NHM} P(x, y) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_{NTM} P(x, y) dx - \int_{NHM} P(x, y) dx = \\ &= - \int_{NHM} P(x, y) dx - \int_{MTN} P(x, y) dx = - \oint_L P(x, y) dx. \end{aligned}$$

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \oint_L P(x, y) dx. \quad (5.39)$$

В последнем интеграле по замкнутому контуру движение происходит против часовой стрелки.

Аналогичным образом доказывается, что

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy. \quad (5.40)$$

Из равенства (5.40) вычтем равенство (5.39). Получим:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \text{ или}$$

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5.41)$$

Формула (5.41) называется формулой Грина.

С помощью формулы Грина значение криволинейного интеграла по замкнутому контуру можно найти, вычислив двойной интеграл.

Пример 5.7 Вычислить интеграл

$$I = \oint_L \left(e^{x^2} - x^2 y + 3 \sin x \right) dx + \left(4\sqrt[3]{1+y^2} + xy^2 - \cos y^2 \right) dy,$$

где L – пробегаяемая в положительном направлении окружность радиуса 2 с центром в начале координат.

Решение

В данном интеграле функция $P = e^{x^2} - x^2 y + 3 \sin x$, $P'_y = -x^2$.

$$Q = 4\sqrt[3]{1+y^2} + xy^2 - \cos y^2, \quad Q'_x = y^2.$$

Следовательно, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 + x^2$. По формуле (5.41) получим

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

где D - круг радиуса 2 с центром в начале координат. Двойной интеграл вычислим в полярных координатах.

$$I = \iint_D (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{2^4}{4} = 8\pi.$$

Без применения формулы Грина данный интеграл вычислить невозможно, так как невыполнимо интегрирование функций e^{x^2} , $\cos y^2$.

5.13 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от вида пути интегрирования

Пусть криволинейный интеграл $\int_{MN} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависит

от кривой MN , связывающей точки M и N , а зависит лишь от координат этих точек. Для двух произвольных кривых MaN , NbM , связывающих

указанные точки (см. рисунок 5.17), будет выполняться равенство:

$$\int_{MaN} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{MbN} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

MaN

MbN

Перенесем интеграл из правой части в левую: $\int_{MaN} - \int_{MbN} = 0$,

$\int_{MaN} + \int_{NbM} = 0$. Две кривые MaN , NbM образуют замкнутую кривую,

которую обозначим L .

Следовательно, $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

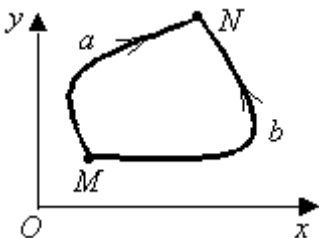


Рисунок 5.17 – Кривые интегрирования

Таким образом, утверждение «криволинейный интеграл не зависит от формы кривой MN» эквивалентно утверждению «интеграл по замкнутому контуру равен нулю». При каких условиях выполняются указанные утверждения, объясняет следующая теорема.

Теорема. Пусть во всех точках некоторой области D функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны.

Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру L , лежащему в области D , был равен нулю, т.е. чтобы

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (5.42)$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (5.43)$$

во всех точках области D .

Доказательство

Для произвольного замкнутого контура L в области D (см. рисунок 5.17) запишем формулу Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Если выполняется условие (5.43), то двойной интеграл в левой части формулы равен нулю и, следовательно,

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Тем самым мы доказали достаточность условия (5.43).

Доказательство необходимости условия (5.43). Предположим, что криволинейный интеграл равен нулю, т.е. выполняется равенство (5.42), но при этом в некоторой точке $M(x_0, y_0)$ внутри контура L условие (5.43) не выполняется. Пусть в этой точке $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$.

Так как частные производные непрерывны, то вместе с точкой $M(x_0, y_0)$ существует её окрестность $\bar{D}$, в которой $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$. Тогда

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\bar{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy > 0.$$

В силу формулы Грина и $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy > 0$, что противоречит сделанному допущению $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$.

Теорема доказана. Эта теорема лежит в основе важных теорем теории функций комплексной переменной.

Конец материала второго семестра,
ура!

Приложение А – таблица производных

$$1. (x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \neq 0.$$

$$2. (e^x)' = e^x.$$

$$4. (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$6. (\sin x)' = \cos x$$

$$8. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$10. \operatorname{arcsin} x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12. \operatorname{arctg} x' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$14. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch}(x).$$

$$16. \operatorname{th} x' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

$$7. (\cos x)' = -\sin x$$

$$9. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$11. \operatorname{arccos} x' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$13. \operatorname{arcctg} x' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$15. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh}(x).$$

$$17. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}.$$

Приложение Б – разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей в пакете MathCAD

При вычислении интегралов от рациональных дробей трудоемкую операцию разложения дроби на сумму простейших дробей можно выполнять в MathCAD. Рациональная дробь может быть как правильной, так и неправильной. В последнем случае будет выделена целая часть.

Знаменатель рациональной дроби нужно разложить на произведение линейных множителей, соответствующих действительным его корням, и на квадратные трёхчлены, соответствующие комплексным сопряженным корням знаменателя.

Набираем рациональную дробь, не забывая вводить знак умножения (*), затем выделяем переменную x и щелкаем по строке **Convert to Partial Fraction** в пункте **Variable** меню **Symbolics**. Получим:

$$\frac{x^6 + 5 \cdot x^5 + 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + 7 \cdot x^2 - x + 4}{x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 5)}$$

$$x + 9 - \frac{2}{5 \cdot x^2} - \frac{13}{(50 \cdot x)} + \frac{143}{[10 \cdot (x - 2)]} + \frac{1}{25} \cdot \frac{(-328 + 399 \cdot x)}{[x^2 - 2 \cdot x + 5]}$$

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие для студентов вузов.-12-е изд./ Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1985. – Т.1.-456 с. Т.2. -576 с.
2. Ледяев С.Ф. Основы высшей математики: учеб. пособие/ С.Ф. Ледяев, Ю.М. Рудов. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – 278 с.
3. Ледяев С.Ф. Лекции по высшей математике в первом семестре.- 6-е изд./ С.Ф. Ледяев/ - Севастополь, 2009 г. -115 с.
4. Лазарев Ю.Ф. MatLAB 5.x/ Ю.Ф. Лазарев – Киев: Издательская группа БНУ, 2000. –384 с.
5. Плис А.И. MATHCAD 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие/ А.И. Плис, Н.А. Сливина. - М.: Финансы и статистика, 2000.- 656 с.