

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ
И СПОРТА УКРАИНЫ

Севастопольский национальный технический университет

С.Г. ГЛЕЧ, С.Ф. ЛЕДЯЕВ, И.В. ОЛЬШАНСКАЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Рекомендовано

Министерством образования и науки, молодежи и спорта
Украины как учебное пособие для студентов технических
специальностей высших учебных заведений

Севастополь 2012

УДК 519.2

ББК 22.17

Г 53

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф., лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники, заведующий кафедрой прикладной математики НАСУА Госкомстата Украины Ф.В. Моцний;

д-р техн. наук, проф. кафедры высшей математики Севастопольского филиала Европейского университета Ю.М. Осадчий;

д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой высшей математики Ивано-Франковского национального технического университета нефти и газа В.М. Мойсишин.

Научный редактор – д-р физ.-мат. наук, профессор А.Ф. Хрусталёв

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів (лист №1/11-5577 від 04/07/11)

Глеч С.Г.

Г 53 Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие/
С.Г. Глеч, С.Ф. Ледяев, И.В. Ольшанская. – Севастополь: СевНТУ,
2012. – 168 с.

ISBN 978 – 617 – 612 – 013 – 1

В учебном пособии изложены основные понятия теории вероятностей и математической статистики в соответствии с программой подготовки бакалавров, специалистов и магистров всех специальностей технического профиля дневной и заочной форм обучения.

Рассмотрены случайные величины, системы случайных величин, элементы математической статистики. Изложение теоретического материала сопровождается решением задач общего и технического профиля. В конце каждого параграфа приведены контрольные вопросы и задания. Приведены варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы по темам модулей «Случайные события», «Математическая статистика».

Студентам, аспирантам и преподавателям высших учебных заведений технического профиля.

Глеч С.Г.

Г53 Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник/
С.Г. Глеч, С.Ф. Ледяєв, І.В. Ольшанська. – Севастополь: СевНТУ, 2012. –
168 с.

ISBN 978 – 617 – 612 – 013 – 1

У навчальному посібнику викладено основні поняття теорії ймовірностей і математичної статистики згідно програм підготовки бакалаврів, спеціалістів та магістрів усіх спеціальностей технічного профілю денної та заочної форм навчання.

Розглянуто випадкові події, випадкові величини, системи випадкових величин, елементи математичної статистики. Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв'язанням завдань загального та технічного профілю. У кінці кожного параграфа наведені контрольні запитання та завдання. Наведено варіанти індивідуальних завдань для самостійної роботи за темами модулів «Випадкові події», «Випадкові величини», «Математична статистика».

Студентам, аспірантам та викладачам вищих навчальних закладів технічного профілю.

УДК 519.2

ББК 22.17

ISBN 978 – 617 – 612 – 013 – 1

© СевНТУ, 2012

Содержание		
	Введение	5
	Глава 1. Случайные события	6
1.1	Предмет теории вероятностей. Основные понятия. Действия над событиями	6
1.2	Классическая и геометрическая вероятность	12
1.2.1	Классическое определение вероятности	13
1.2.2	Геометрическое определение вероятности	14
1.3	Относительная частота, или статистическая вероятность события	17
1.4	Элементы комбинаторики	19
1.5	Теоремы сложения и умножения вероятностей	25
1.5.1	Теорема сложения вероятностей несовместных событий	25
1.5.2	Теорема сложения вероятностей совместных событий	27
1.5.3	Теорема умножения вероятностей	28
1.5.4	Вероятность появления хотя бы одного события	30
1.6	Формула полной вероятности	33
1.7	Формулы Байеса	35
1.8	Повторение испытаний	39
1.8.1	Формула Бернулли	39
1.8.2	Приближенная формула Пуассона при повторении испытаний	41
1.8.3	Локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа	42
	Глава 2. Случайные величины	45
2.1	Дискретные случайные величины. Законы распределения	45
2.1.1	Биномиальное распределение	47
2.1.2	Распределение Пуассона	48
2.1.3	Геометрическое распределение	49
2.2	Функция распределения	51
2.3	Вероятность попадания случайной величины на заданный участок	54
2.4	Плотность распределения вероятностей	56
2.5	Числовые характеристики случайных величин	60
2.5.1	Математическое ожидание	60
2.5.2	Мода и медиана случайной величины	62
2.5.3	Дисперсия случайной величины	64
2.5.4	Понятие о моментах распределения. Характеристики формы кривой плотности распределения	68
2.6	Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин	77
2.6.1	Равномерный закон распределения случайной величины	77
2.6.2	Показательное (экспоненциальное) распределение	78
2.6.3	Распределение Релея	79
2.7	Нормальный закон распределения (распределение Гаусса)	81
2.8	Закон больших чисел и центральная предельная теорема	88
	Глава 3. Система двух случайных величин	91
3.1	Система случайных величин	91

3.2	Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины	92
3.3	Функция распределения двумерной случайной величины	94
3.4	Плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины, её применение и свойства	96
3.5	Условные законы распределения составляющих системы дискретных и непрерывных случайных величин	97
3.6	Зависимые и независимые случайные величины . .	99
3.7	Числовые характеристики системы двух случайных величин	100
	Глава 4. Элементы математической статистики	104
4.1	Основные задачи математической статистики	104
4.2	Генеральная совокупность и выборка. Простая статистическая совокупность. Статистическая функция распределения	105
4.3	Статистический ряд. Графическое представление статистического ряда	106
4.4	Статистические оценки параметров распределения	111
4.5	Точечные оценки математического ожидания и дисперсии	112
4.6	Доверительный интервал и доверительная вероятность .	114
4.7	Статистические гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Статистический критерий. Критические точки	119
4.8	Критерий согласия Пирсона	121
4.9	Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности	122
4.10	Проверка гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности	126
	Глава 5. Задания для самостоятельного решения	129
5.1	Тест	129
5.2	Варианты индивидуальных заданий к модулю «Теория вероятностей»	134
5.3	Варианты индивидуальных заданий к модулю «Случайные величины»	142
5.4	Варианты индивидуальных заданий к модулю «Математическая статистика»	150
	Приложение А. Таблица значений функции $\varphi(x)$	157
	Приложение Б. Таблица значений функции Лапласа	158
	Приложение В. Таблица значений функции t_β	159
	Приложение Г. Таблица значений $q = q(\beta, n)$	160
	Приложение Д. Критические точки распределения «хи-квадрат» .	160
	Библиографический список	161
	Предметный указатель	163
	Именной указатель	167

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие подготовлено в соответствии с учебной программой общего курса «Высшая математика» по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» как один из разделов высшей математики. Модульный принцип структуризации данной учебной дисциплины является составной частью внедрения кредитно-модульной системы учебного процесса Севастопольского национального технического университета. Цель преподавания этой дисциплины – помочь студентам усвоить соответствующий математический аппарат, которого должно быть достаточно для обработки математических моделей, связанных с дальнейшей практической деятельностью специалистов.

Важным элементом изучения данного курса и овладения его методами является самостоятельная работа студентов. Эта работа является непрерывной составной частью выполнения текущих домашних заданий и цикличной работы по выполнению индивидуальных модульных заданий. Результативность самостоятельной работы студентов обеспечивается эффективной системой контроля, которая включает опрос студентов по лекционному материалу, проверку выполнения текущих домашних заданий, решения задач около возле доски, защиту индивидуальных модульных работ.

Данное учебное пособие является составной частью курса «Высшая математика» и завершающим ее разделом «Теория вероятностей и математическая статистика».

Выражаем искреннюю благодарность профессору кафедры высшей математики Национального горного университета Украины Сторчаю Владимиру Федоровичу за полезные замечания, которые учтены в окончательном варианте учебного пособия.

Глава 1. Случайные события

1.1 Предмет теории вероятностей. Основные понятия. Действия над событиями

Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей – наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Случайным называется такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по иному.

Теория вероятностей изучает те случайные явления, которые могут наблюдаться практически неограниченно.

Оказывается, что независимо от конкретной природы многократно повторяющихся случайных явлений, их количество подчиняется определенным *вероятностным закономерностям*.

Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Итак, предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных явлений.

Основные понятия теории вероятностей

Испытание – наличие определённого комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление. Испытанием является, например стрельба в мишень, подбрасывание монеты [13].

Событие – возможный результат испытания. Так при стрельбе в мишень событиями будут попадание и промах; при бросании монеты появление «герба» или «цифры». При бросании игральной кости могут произойти шесть равновероятных исходов, соответствующих выпадению одного, двух, трёх, четырёх, пяти и шести очков.

Случайным событием называют любое возможное множество исходов. Так при бросании игральной кости выпадении четного числа очков, то есть появление либо грани с двумя очками, либо с четырьмя, либо с шестью очками, является случайным событием. Также выпадение грани с тремя очками является случайным событием. Появление любого числа очков (1, 2, 3, 4, 5, 6) также является случайным событием. Это случайное событие обладает одной особенностью, оно обязательно наступает и поэтому называется *достоверным событием* [9].

Классификация случайных событий

1. Событие называют *достоверным*, если при испытании оно обязательно произойдет. Достоверное событие обозначим U .

2. Событие называют *невозможным*, если при испытании оно заведомо не произойдет. Невозможное событие обозначим V .
3. Событие называют *случайным*, если при испытании оно может произойти, а может и не произойти. Случайные события обозначают $A, B, C, \dots$
4. События называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.
5. События называют *единственно возможными*, если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием.
6. События называют *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.
7. События $A, B, C, \dots$ образуют *полную группу событий*, если в результате испытания произойдет одно из них. При этом события попарно несовместны и единственно возможны. События, образующие полную группу событий, называют *элементарными*.
8. Группу событий, составную часть полной группы событий, называют *случаями (исходами, шансами)*.
9. Случаи, при которых события происходят, называют *благоприятствующими* появлению этих событий.
10. Два единственно возможных события, образующие полную группу событий, называются *противоположными*. Два противоположных события обозначают A и $\bar{A}$. Например, если A - событие (попадание в мишень при стрельбе), то ему противоположное $\bar{A}$ (промах при стрельбе по мишени).

Действия над событиями

Определение. Суммой двух событий A и B называется событие C , состоящее в выполнении события A или события B , или обоих событий вместе.

Обозначается сумма событий $C = A + B$, или $C = A \cup B$.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении *хотя бы одного из этих событий*.

Обозначается: $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$.

Из определения следует, что сумма противоположных событий – достоверное событие: $A + \bar{A} = U$.

Определение. Произведением двух событий A и B называется событие C , состоящее в совместном появлении события A и события B .

Обозначается произведение событий $C = A \cdot B$ или $C = A \cap B$. Произведение противоположных событий – невозможное событие: $A \cdot \bar{A} = V$.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Обозначается

произведение нескольких событий $\prod_{i=1}^n A_i$ или $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

Рассмотрим графическую иллюстрацию приведенных основных определений.

Каждый неразложимый на составляющие исход испытания назовем *элементарным событием*. Обозначим через $\Omega = \{\omega\}$ множество всех элементарных событий. Это множество называется *пространством элементарных событий*.

Для наглядности будем изображать пространство Ω в виде прямоугольника на плоскости, а элементы пространства, элементарные события ω_i – точками в этой области (рисунок 1.1). Пространство Ω представляет все возможные исходы испытания.

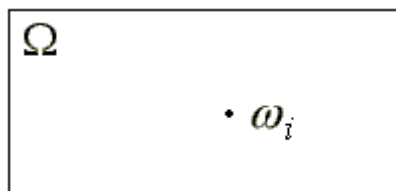


Рисунок 1.1 – Пространство Ω

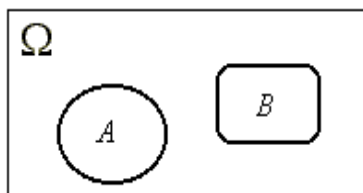


Рисунок 1.2 – Несовместные события

Любое подмножество A пространства Ω ($A \subset \Omega$) называется событием A , подмножество $B \subset \Omega$ называется событием B (рисунок 1.2). Это означает, что если в результате испытания произойдет элементарное событие из подмножества A , то и

произойдет событие A (графически – в результате испытания проявится точка из области A на рисунке 1.2).

На рисунке 1.2 сумма двух событий A и B означает проявление точки ω_i или в подмножестве A или в подмножестве B . События A и B являются *несовместными*.

На рисунке 1.3 сумма двух событий A и B означает проявление точки ω_i или в подмножестве A или в подмножестве B , или в общей части подмножеств. События A и B являются *совместными*.

Рисунок 1.4 иллюстрирует сумму событий $A + B + C + D$. Сумма указанных событий заключается в проявлении точки ω_i в закрашенной области.

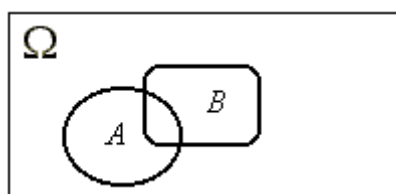


Рисунок 1.3 – Совместные события

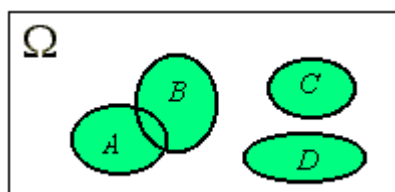


Рисунок 1.4 – Сумма событий

На рисунке 1.5 показано, что произведение двух событий $A \cdot B$ означает проявление точки ω_i в общей, закрашенной области.

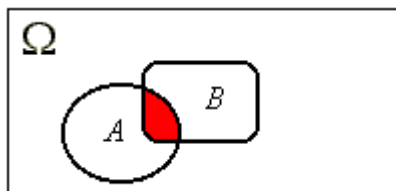


Рисунок 1.5 – Произведение событий

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. На рисунке 1.6 проявление точки ω_i в закрашенной области означает произведение $A \cdot B \cdot C$.

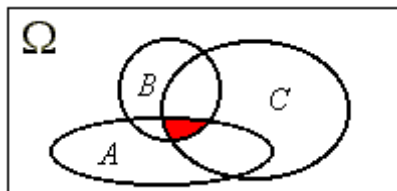
Рисунок 1.6 – Произведение $A \cdot B \cdot C$

Иллюстрация противоположных событий – на рисунке 1.7.

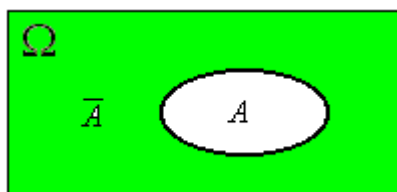


Рисунок 1.7 – Противоположные события

На рисунке 1.8 показана полная группа несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$. Здесь события попарно несовместны, $A_i \cdot A_k = \emptyset$ ($i \neq k$).

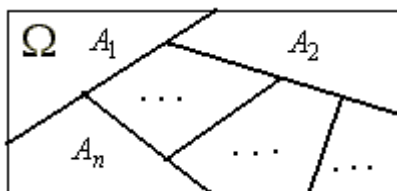


Рисунок 1.8 – Полная группа событий

Пусть A, B и C – произвольные случайные события, $\emptyset$ – невозможное событие. Введенные операции над событиями удовлетворяют таким законам.

1. $\overline{\overline{A}} = A$ - закон двойного отрицания.
2. $A + B = B + A$ - коммутативный закон сложения.
3. $A \cdot B = B \cdot A$ - коммутативный закон умножения.
4. $(A + B) + C = A + (B + C)$ - ассоциативный закон сложения.
5. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ - ассоциативный закон умножения.
6. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ - первый дистрибутивный закон.
7. $A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C)$ - второй дистрибутивный закон.

8. $A + A = A$.
9. $A \cdot A = A$.
10. $A + \bar{A} = \Omega$.
11. $A \cdot \bar{A} = V$.
12. $A + \Omega = \Omega$.
13. $A \cdot \Omega = A$.
14. $A + V = A$.
15. $A \cdot V = V$.
16. $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ - закон двойственности.
17. $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ - закон двойственности.

Примечание – все выше приведенные определения справедливы, если события принадлежат одному пространству элементарных событий. Если же событие A принадлежит пространству Ω_1 , событие B принадлежит другому пространству Ω_2 , то ни о сумме, ни о произведении событий A и B речи быть не может.

Пример 1. По мишени делается два выстрела. Обозначим A - событие, заключающееся в попадании в мишень при первом выстреле; B - попадание в мишень при втором выстреле. Им противоположные события $\bar{A}$ - промах при первом выстреле, $\bar{B}$ - промах при втором выстреле.

Комбинируя простые события A и B , и им противоположные, можно представить более сложные события, а именно:

1. хотя бы одно попадание при двух выстрелах $A + B$;
2. попадание в мишень и при первом и при втором выстрелах $A \cdot B$;
3. промах и при первом и при втором выстрелах $\bar{A} \cdot \bar{B}$;
4. попадание в мишень только один раз при двух выстрелах $A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$.

Контрольные вопросы

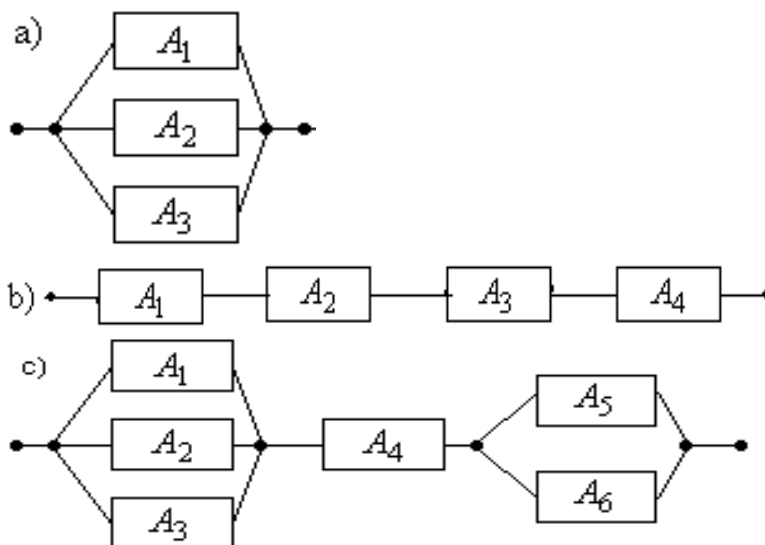
1. Что называется событием, элементарным событием, пространством элементарных событий? Приведите пример опыта (испытания), в результате которого может появиться или не появиться какое-то случайное событие.
2. Какие события называют совместными, не совместными, достоверными, невозможными, противоположными?
3. Какие события образуют полную группу?
4. Что называется суммой событий, произведением событий?

5. Приведите примеры сложения двух несовместных событий и двух событий, которые могут произойти одновременно.
6. Приведите пример произведения двух событий. Приведите пример двух событий, произведение которых является невозможным событием, но которые принадлежат одному множеству элементарных событий.

Задача

Пусть события $A_1, A_2, \dots, A_6$ обозначают безотказную работу соответствующих элементов $A_1, A_2, \dots, A_6$ на схемах а, б, в. При безотказной работе элемента электрический сигнал проходит через элемент.

Если элементы расположены последовательно, сигнал проходит по схеме при безотказной работе всех элементов. Если элементы расположены параллельно, сигнал проходит через схему, если работает хотя бы один элемент. Комбинируя события $A_1, A_2, \dots, A_6$ и их противоположные, представьте для каждой схемы а, б, в событие: сигнал проходит через схему.



1.2 Классическая и геометрическая вероятность

Построение логически полноценной теории вероятностей основано на аксиоматическом определении случайного события и его вероятности. В системе аксиом, предложенной А. Н. Колмогоровым в 1933 году [8], неопределяемыми понятиями являются элементарное событие и вероятность. Приведем аксиомы, определяющие вероятность:

1. Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $0 \leq P(A) \leq 1$. Это число называется вероятностью события A .

2. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1$$

3. Вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k).$$

Исходя из этих аксиом, свойства вероятностей и зависимости между ними выводят в качестве теорем.

1.2.1 Классическое определение вероятности

Если множество Ω состоит из n равновозможных элементарных событий, то

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.1)$$

где m - число элементарных событий, входящих в событие A .

Иначе: вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих событию исходов m при одном испытании к числу всех равновозможных исходов n .

Пример 2. В урне находится 15 шаров одинакового диаметра: 4 красных, 5 синих, 6 белых. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет синим.

Решение

Анализ условия задачи. Появление шаров из урны, это:

- 1) полная группа событий (множество Ω), так как при одном испытании (выемке шара) обязательно появится шар;
- 2) появления шаров – равновозможные события (шары одинакового размера и их цвет не виден при выемке).

Вывод – выполнение условий 1 – 2 позволяет применить формулу (1.1).

Обозначим событие A - появление синего шара. По условию задачи $n=15$, $m=5$, $\Rightarrow P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

1.2.2 Геометрическое определение вероятности

Пусть в результате испытания точка с одинаковой вероятностью обязательно может попасть в любое место некоторой области G . Считаем, что событие A произошло, если точка при этом попадает в область g , $g \subset G$. Геометрической вероятностью события A называют вероятность, вычисленную по формуле

$$P(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}. \quad (1.2)$$

Под мерой понимают длину, площадь, объём в одно-, двух- и трёхмерном случаях соответственно.

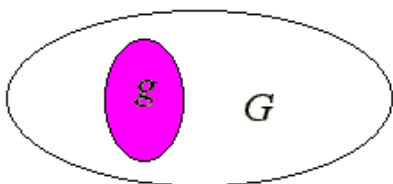
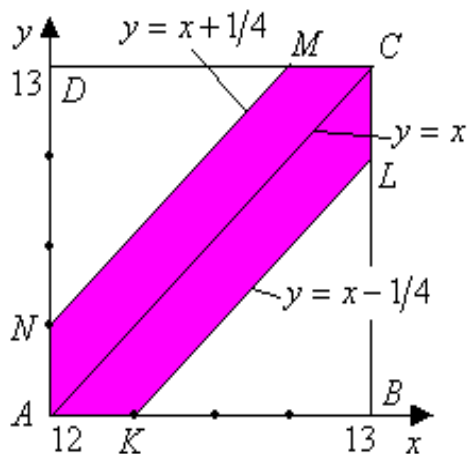


Рисунок 1.9 – Геометрическое определение вероятности

На рисунке 1.9 пространство Ω – совокупность всех точек области G и состоит из бесконечного множества элементарных событий. Понятие «геометрической вероятности» можно рассматривать как обобщение понятия «классической вероятности» на случай с бесконечным числом исходов.

Использование геометрического определения вероятности покажем на примере «задачи о встрече».

Пример 3. «Задача о встрече».



Два человека условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший человек ждет другого в течение четверти часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый наудачу, независимо от другого, выбирает момент своего прихода.

Рисунок 1.10 – Задача о встрече

Решение

Обозначим X и Y - моменты прихода на встречу первого и второго человека, $12 \leq x \leq 13$, $12 \leq y \leq 13$. Так как моменты прихода равно возможны между 12 и 13 часами, то точка $M(x, y)$ с одинаковой вероятностью попадет в квадрат $ABCD$, показанный на рисунке 1.10.

Точки, лежащие на диагонали AC квадрата с уравнением $y = x$ соответствуют одновременному появлению в условленном месте обоих встречающихся. Линия NM с уравнением $y = x + 1/4$ соответствует тому, что второй человек приходит на четверть часа позже первого. Линия KL с уравнением $y = x - 1/4$ соответствует тому, что второй человек приходит на четверть часа раньше первого. Встреча состоится, если точка $M(x, y)$ попадет в область между линиями $y = x + 1/4$ и $y = x - 1/4$. Условия геометрической вероятности соблюдаются, можно применить формулу (1.2). Площадь области G (площадь квадрата $ABCD$) равна единице. Область g - закрашенная на рисунке 1.10. Площадь области g определяем, вычитая из площади квадрата $ABCD$ площади двух треугольников,

$$S_g = S_{ABCD} - (S_{KBL} + S_{NMD}).$$

Если A - событие, заключающееся в состоявшейся встрече, то

$$P(A) = \frac{\text{площадь } g}{\text{площадь } G} = \frac{1 - 9/16}{1} = \frac{7}{16}.$$

Ответ: $P(A) = \frac{7}{16}.$

Пример 4.

Спутник Земли движется по орбите, расположенной между 60° северной широты и 60° южной широты. Определить вероятность того, что спутник упадет на поверхность Земли выше 30° северной широты [15].

Решение

Будем исходить из того, что математической моделью Земли есть шар, радиус которого обозначим через R и падение спутника равновозможно в любом месте шарового пояса между 60° северной широты и 60° южной широты. Поскольку площадь S шарового пояса между указанными широтами равняется $S = 2\pi R(2H)$, где (рисунок 1.11) $H = R \sin 60^\circ$ – половина высоты шарового пояса. А площадь s шарового пояса выше 30° северной широты и ниже 60° северной

широты будет равна $s = 2\pi Rh$, где $h = R \sin 60^\circ - \frac{R}{2}$ тогда искомая вероятность будет равна

$$P = \frac{s}{S} = \frac{(3 - \sqrt{3})}{6} = 0,2113.$$

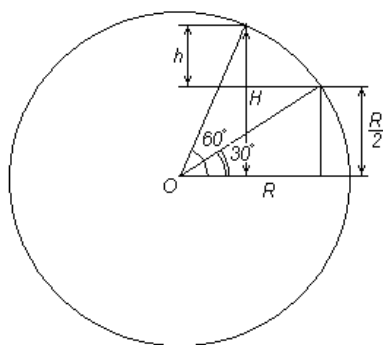


Рисунок 1.11. Модель пересечения Земли меридианной плоскостью

Контрольные вопросы

1. Что понимается под вероятностью события?
2. В каких пределах изменяется вероятность?
3. Какова вероятность достоверного, невозможного событий?
4. Сформулируйте классическое определение вероятности.
5. Сформулируйте геометрическое определение вероятности.

Задачи

1. Подбрасывается игральный кубик с цифрами на гранях 1, 2, 3, 4, 5, 6. Какова вероятность: а) выпадения четного числа; б) выпадения числа, кратного трем?
2. На пять лотерейных билетов из 120 выпадает выигрыш. Какова вероятность выигрыша при покупке одного билета?
3. Стол имеет форму квадрата со стороной 1 м. На столе нарисован круг диаметром 0,5 м. Какова вероятность того, что шарик, брошенный сверху на стол, попадет в круг (при условии, что шарик с одинаковой вероятностью попадает в любую точку стола)?
4. После бури на участке между 50-м и 80-м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Какова вероятность, что обрыв произошёл между 60-м и 65-м километрами линии, если прочность провода одинакова по всей линии?
5. Цифры 1, 2, 3, ..., 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке четное.

6. Внутри прямоугольника 5 на 4 см находится круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

7. На отрезок ОА длины L поставлена наугад точка В. Найти вероятность того, что меньший из отрезков ОВ и ВА имеет длину, меньшую, чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна его длине и не зависит от его расположения.

8. На отрезок $[-2;3]$ ставится наугад точка. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до начала координат меньше 1?

9. Внутрь круга с радиусом 2 м брошена точка. Найти вероятность того, что эта точка будет принадлежать вписанному в круг квадрату. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна его площади и не зависит от расположения.

10. На плоскости начерчены две концентрические окружности с радиусами 5 и 10 м. Какова вероятность того, что точка поставленная в большой круг попадет в кольцо, образованное окружностями?

11. Два парохода должны подойти к одному причалу. Время прихода пароходов независимо и равновозможно в течение суток. Найти вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода 1 час, а второго – 2 часа.

12. Наугад выбраны два положительных числа, каждое из которых не превышает 3. Какова вероятность того, что их сумма будет не больше 1?

13. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что: а) сумма очков на выпавших гранях равна 7; б) сумма очков на выпавших гранях равна 5, а произведение 4?1

Ответы: 1) а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{24}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{4}{9}$; 6) $0,1125\pi$; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{2}{5}$; 9) $\frac{2}{\pi}$; 10) 0,75; 11) $\frac{139}{1152}$; 12) $\frac{1}{18}$; 13) а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{18}$.

1.3 Относительная частота, или статистическая вероятность события

Далеко не всякий опыт можно свести к схеме формул (1.1) или (1.2) и тогда вероятность события не может быть определена теоретическим путем, как в примерах 2, 3 или в задачах к §1.2. Например, вероятность таких событий, как «попадание в цель при выстреле», «сбой в работе компьютера в течение часа» не может быть определена по указанным формулам. Вместе с тем, перечисленные события обладают

определенной степенью объективной возможности, которую можно измерить численно.

Экспериментальное определение вероятности события A заключается в проведении серии n опытов, в каждом из которых происходит или не происходит событие A . Если событие произошло в m опытах, то отношение m/n называется относительной частотой появления события A . Повторение серии испытаний (n_1, m_1) даст, в общем случае, другой результат $m_1/n_1 \neq m/n$. Однако, при увеличении числа опытов относительная частота события проявляет тенденцию стабилизироваться, приближаясь к некоторой постоянной величине.

Пример 5. Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появления «герба». Результаты нескольких опытов приведены в таблице 1.1.

Вероятность появления «герба» при одном подбрасывании определяется по классической вероятности и равна 0,5. Результаты, приведенные в таблице 1.1, убеждают в том, что при увеличении количества опытов относительная частота приближается к теоретически вычисленной вероятности появления «герба».

Таблица 1.1 – Результаты опытов с монетой

Число бросаний	Число появления «герба»	Относительная частота
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Если опытным путем установлена относительная частота появления некоторого события, то её можно принять за приближенное значение вероятности.

Относительную частоту события называют его *статистической вероятностью* и обозначают

$$P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

Я. Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа однородных независимых опытов с практической достоверностью можно утверждать, что относительная частота события будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности в отдельном опыте.

Таким образом, вероятность может быть определена статистически, опытным путем. Для этого необходимо иметь возможность производить неограниченное число испытаний. При этом

относительная частота должна показать устойчивость в различных сериях испытаний.

Пример 6. (Детская энциклопедия, Т. 2, М.: Просвещение, 1965–С. 461)

Рыбоводу понадобилось определить сколько в озере рыб, пригодных для лова. Придерживаясь рекомендаций теории вероятностей, рыбовод закинул сеть с заранее выбранным размером ячеек и, вытащив ее, пересчитал улов. Рыб оказалось 38. Сделав отметку на каждой рыбке, рыбовод всех их отпустил в озеро. На другой день он закинул ту же самую сеть и теперь выловил уже 53 рыбы, две из которых оказались мечеными. По этим данным рыбовод и вычислил приблизительно количество рыб в озере, пригодных для вылова данной сетью. К какому результату пришел рыбовод?

Решение

Пусть число рыб в озере, пригодных для вылова данной сетью, равняется x . Тогда отношение числа меченных рыб к числу всех рыб,

вновь пригодных для вылова данной сетью, равняется $\frac{38}{x}$. В другой

раз рыбовод выловил 53 рыбы, из которых 2 меченные. Таким образом,

отношение числа меченных рыб к числу выловленных равняется $\frac{2}{53}$.

Будем считать, что меченные рыбы равномерно распределились среди всех рыб в водоеме, тогда оба соотношения приблизительно

одинаковы: $\frac{38}{x} = \frac{2}{53}$, откуда $x = 1007$. Следовательно, в озере

приблизительно 1000 рыб, пригодных для вылова данной сетью.

Контрольные вопросы

1. Что называется относительной частотой события?
2. Почему относительная частота события называется его статистической вероятностью?
3. Приведите пример события, вероятность которого можно определить опытным путем, вычислив относительную частоту его появления.

1.4 Элементы комбинаторики

При классическом определении вероятности некоторого события по формуле (1.1) количество всех исходов n и число m исходов, благоприятствующих появлению события, часто приходится вычислять, используя элементы комбинаторики.

При наличии n каких-либо элементов можно образовать из них различные комбинации (группы). Различают перестановки, размещения и сочетания элементов.

Существуют две схемы выбора m элементов ($0 < m \leq n$) из исходного множества без возвращения (без повторений) и с возвращением (с повторением). В первом случае выбранные элементы не возвращаются обратно, можно отобрать сразу все m элементов или последовательно отбирать их по одному.

Во второй схеме выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге.

Схема выбора без возвращений

1) Перестановки

Пусть A - некоторое конечное множество, состоящее из n различных элементов $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Всевозможные конечные упорядоченные множества, содержащие n различных элементов, называются перестановками из n элементов.

Пример 7. $A = \{3; 1; 2\}$. Все перестановки: (1; 2; 3), (2; 3; 1), (3; 2; 1), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (3; 1; 2).
Всего 6 перестановок.

Число перестановок из n элементов (обозначается P_n) находится по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad (1.3)$$

Пример 8. Семь книг можно расставить в ряд на одной полке $7!$ способами, т.е. всего $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ вариантов.

2) Размещения

Пусть A - некоторое конечное множество, состоящее из n различных элементов $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Выберем из них некоторым образом m различных элементов, и будем составлять из этих m элементов различные упорядоченные множества. Они называются размещениями из n элементов по m элементов.

Пример 9. $A = \{3; 1; 2\}$. Все размещения из 3-х элементов по 2 элемента: (3; 1), (1; 3), (3; 2), (2; 3), (1; 2), (2; 1). Всего 6 размещений.

Число размещений из m элементов в каждом, составленных из данных n элементов, обозначают A_n^m .

Методом математической индукции можно доказать, что

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ или}$$

$$A_n^m = n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(m-1)). \quad (1.4)$$

Пример 10. Из восьми элементов можно составить группы по три элемента, которые отличались бы самими элементами либо их порядком следующее число раз

$$A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336.$$

3) Сочетания

Конечные *неупорядоченные* множества, содержащие m различных элементов, выбранных из n элементов заданного множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, называются сочетаниями из n элементов по m элементов.

Пример 11. $A = \{3; 1; 2; 4\}$. Все сочетания из 4-х элементов по 2 элемента: (3; 1), (3; 2), (3; 4), (1; 2), (1; 4), (2; 4). Всего 6 сочетаний.

Число сочетаний из n различных элементов по m элементов обозначается C_n^m . В отличие от размещений в таких группах исключаются перестановки:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (1.5)$$

Для числа сочетаний справедливы следующие свойства:

$$C_n^m = C_n^{n-m};$$

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Пример 12. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего десять деталей?

Решение: $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$

В следующих двух примерах при определении классической вероятности используются сочетания.

Пример 13. В урне 12 шаров, пронумерованных $1, 2, \dots, 12$. Наудачу извлекают 8 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров окажутся: 1) шар №3 (событие A); 2) шары №5 и №6 (событие B).

Решение

Число исходов, благоприятствующих событию A , когда вынут шар с нужным номером, а остальные семь шаров имеют другие номера, равно C_{11}^7 . Общее число возможных результатов равно C_{12}^8 . Таким образом, ответ на первый вопрос задачи

$$P(A) = \frac{C_{11}^7}{C_{12}^8} = \frac{11!8!4!}{7!4!12!} = \frac{8}{12} \approx 0,667.$$

Вторая часть задачи решается аналогично

$$P(B) = \frac{C_{10}^6}{C_{12}^8} = \frac{10!8!4!}{6!4!12!} = \frac{7 \cdot 8}{11 \cdot 12} \approx 0,424.$$

Пример 14. В ящике находится 20 деталей, среди которых 15 стандартных. Наудачу отобрали 10 деталей. Найти вероятность, что среди отобранных 8 деталей окажутся стандартными.

Решение

Общее число вариантов отбора 10 деталей из 20 деталей равно C_{20}^{10} . Вычислим число благоприятных исходов. Нам требуется иметь 8 стандартных деталей из 15 возможных и 2 нестандартные детали, которые берутся из 5 имеющихся нестандартных. Такой результат вычисляется произведением $C_{15}^8 \cdot C_5^2$. Таким образом, искомая вероятность равна:

$$P = \frac{C_{15}^8 C_5^2}{C_{20}^{10}} = \frac{15!5!10!10!}{8!7!2!3!20!} \approx 0,348.$$

Схема выбора с возвращением

4) Перестановки с повторениями

Пусть A - некоторое конечное множество, состоящее из n элементов $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ m различных типов ($m \leq n$). Элементы одного типа неразличимы между собой. Пусть k_1 элементов принадлежит 1-му типу, k_2 элементов принадлежит 2-му типу, и т.д.,

k_m элементов принадлежит типу m , причем $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Различные конечные упорядоченные совокупности, содержащие n элементов, из которых k_1 элементов принадлежит 1-му типу, k_2 - принадлежит 2-му типу, и т.д., k_m элементов принадлежит типу m , называются перестановками с повторениями, имеющими состав $(k_1, k_2, \dots, k_m)$.

Число таких перестановок с повторениями

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}. \quad (1.6)$$

Пример 15. Сколько различных шестизначных чисел можно образовать из 3-х единиц, одной двойки и двух троек?

Решение: $C_6(3, 1, 2) = \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = 60$

5) Размещения с повторениями

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят о размещениях с повторениями.

Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений элементов:

$$\bar{A}_n^m = n^m. \quad (1.7)$$

Пример 16. Сколько пятизначных чисел можно составить, используя цифры:

а) 2, 5, 7, 8

$$\bar{A}_4^5 = 4^5.$$

б) 0, 1, 9

$$\bar{A}_3^5 - \bar{A}_3^4 = 243 - 81 = 162.$$

6) Сочетания с повторениями

Пусть имеется m различных типов элементов, число повторений которых конечно, но не ограничено.

Сочетаниями из m различных элементов по n элементов с повторениями называются *неупорядоченные* множества, состоящие из n элементов, каждый из которых принадлежит к одному из m типов.

Пример 17. Из 3-х различных элементов $\{1; 2; 3\}$ можно составить следующие сочетания по два элемента с повторениями:

(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 2), (2; 3), (3; 3).

Число различных сочетаний из m элементов по n элементов с повторениями обозначается $\overline{C}_m^n$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{C}_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^n \quad (1.7)$$

Пример 18. В урне находится один черный и один белый шар. Из урны наугад вынимается шар, запоминается его цвет и шар возвращается в урну. Так делается 4 раза. Определить вероятность того, что все четыре раза появится белый шар.

Решение

По условию, различных элементов 2, $m = 2$. Составляется множество из 4-х элементов, $n = 4$. Число всевозможных сочетаний можно найти непосредственно: (бббб), (бббч), (ббчч), (бччч), (чччч). Здесь б – означает появление белого шара, ч – черного. Вычислим количество сочетаний по формуле (1.7):

$$\overline{C}_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^n = C_5^4 = \frac{5!}{4!1!} = 5.$$

Из 5-ти различных исходов только один благоприятствует появлению 4-х белых шаров. По формуле классической вероятности $P = \frac{1}{5}$.

Контрольные вопросы

1. Что называется перестановками из n элементов, обозначение, вычисление.
2. Что называется размещениями из n элементов по m элементов, обозначение, вычисление.
3. Что называется сочетаниями из n элементов по m элементов, обозначение, вычисление. Свойства сочетаний.
4. Что называется перестановками с повторениями, обозначение, вычисление.
5. Что называется сочетаниями с повторениями, обозначение, вычисление.

Задачи

1. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

2. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 выбранных наудачу билета окажутся выигрышными.

3. Ребенок играет с четырьмя буквами разрезной азбуки А, А, М, М. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАМА»?

4. В ящике находятся 4 карточки с цифрами 0, 0, 2, 6. Вынимают наугад по очереди карточки и ставят в ряд. Какова вероятность того, что получится число 2006?

5. На шести карточках написаны буквы В Е И П Р Т. После тщательного перемешивания берут по одной карточке и выкладывают последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «ПРИВЕТ»?

6. На восьми карточках написаны буквы А В Е Ж К Л Р Х. После тщательного перемешивания берут по одной карточке и выкладывают последовательно пять карточек рядом. Какова вероятность того, что получится слово «ХАКЕР»?

7. В ящике вперемешку лежат 12 изделий одного типа двух различных цветов – 7 штук синего и 5 штук красного. Наугад выбрано 7 изделий. Какова вероятность того, что среди них 3 красных изделий?

8. В урне находятся три шара одинакового диаметра: один черный, один белый и один красный шар. Из урны наугад вынимается шар, запоминается его цвет и шар возвращается в урну. Так делается 6 раз. Определить вероятность того, что четыре раза появится белый шар и два раза – красный.

Ответы: 1) $1/20$; 2) $1/495$; 3) $1/6$; 4) $1/12$; 5) $1/720$; 6) $1/6720$; 7) $0,442$; 8) $1/28$.

1.5 Теоремы сложения и умножения вероятностей

1.5.1 Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (1.8)$$

Доказательство

Пусть множество Ω состоит из n равновозможных элементарных событий, причем m - число элементарных событий, входящих в событие A , k - число элементарных событий, входящих в событие B .

По формуле классической вероятности $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(B) = \frac{k}{n}$. Так

как события несовместны (см. рисунок 1.2), в событие $A + B$ входит $m + k$ элементарных событий. Тогда

$$P(A + B) = \frac{m + k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B),$$

что требовалось доказать.

Теорема обобщается на сумму трёх и более несовместных событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C);$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.9)$$

Следствие теоремы 1. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна 1:

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

Доказательство: так как $A_1, A_2, \dots, A_n$ - полная группа событий, то появление хотя бы одного из них – достоверное событие: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1$. Так как события несовместны, к ним применима теорема сложения вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Важный частный случай следствия: Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (1.10)$$

Пример 19. На полке в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем пять из них по математике. Вы берёте наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников будет по математике.

Решение

Обозначим событие A , состоящее в том, что хотя бы один из трех взятых учебников будет по математике. Тогда $\bar{A}$ – противоположное событие: все три учебника не по математике. Сумма вероятностей противоположных событий $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Число исходов, благоприятствующих тому, что выбраны учебники не по математике – количество сочетаний по 3 из 10. Количество всех исходов – число сочетаний по 3 из 15. Вероятность противоположного события

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{10!3!2!}{3!7!15!} \approx 0,264.$$

$$\text{Искомая вероятность } P(A) = 1 - 0,264 = 0,736.$$

Пример 20. Производится стрельба по мишени, состоящей из трех концентрических окружностей. Вероятность попадания в

центральную зону (1) равна 0,05; в кольцо (2) – 0,1; в кольцо (3) – 0,17 (рисунок 1.12). Какова вероятность попасть в мишень?

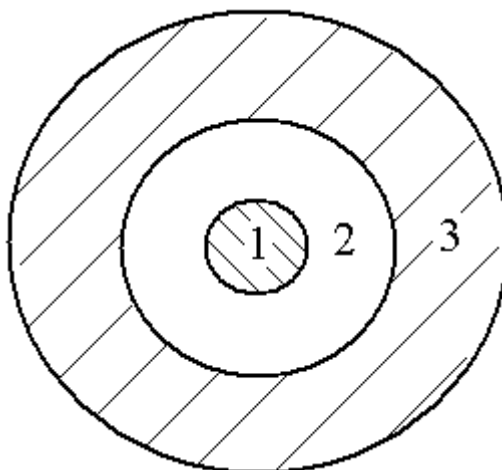


Рисунок 1.12 – К примеру 20

Решение

Пусть $A = A_1 + A_2 + A_3$ - событие, заключающееся в попадании в мишень; A_1 – попадание в первую зону; A_2 – попадание во вторую зону; A_3 – попадание в третью зону.

События A_1, A_2, A_3 – несовместные (нельзя одним выстрелом попасть в какие-либо две разные части мишени), поэтому

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0,32.$$

1.5.2 Теорема сложения вероятностей совместных событий

Теорема 2. Вероятность суммы совместных событий A и B равна сумме их вероятностей, минус вероятность их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (1.11)$$

Доказательство

Пусть множество Ω состоит из n равновозможных элементарных событий, причем $m + l$ - число элементарных событий, входящих в событие A , $k + l$ - число элементарных событий, входящих в событие B , l - число элементарных событий, общих для событий A и B . По формуле классической вероятности $P(A) = \frac{m + l}{n}$, $P(B) = \frac{k + l}{n}$. Так

как события совместны (см. рисунок 1.3), в событие $A + B$ входит $m + k + l$ элементарных событий. Тогда

$$P(A + B) = \frac{m + k + l}{n} = \frac{m + l}{n} + \frac{k + l}{n} - \frac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cdot B), \quad \text{что}$$

требовалось доказать.

Следствие теоремы 2. Вероятность суммы трех совместных событий $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.

1.5.3 Теорема умножения вероятностей

Событие A называется независимым от события B , если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B , или не произошло.

Событие A называется зависимым от события B , если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B , или не произошло.

Пример 21. а) При подбрасывании 2-х монет обозначим A - появление цифры на первой монете, B - появление цифры на второй монете. События A и B - независимые друг от друга.

б) В урне 2 белых и два черных шара. Два человека по очереди вынимают по одному шару. Пусть A - появление белого шара у первого человека; B - появление белого шара у второго человека. Если событие A произошло, $P(B) = \frac{1}{3}$. Если произошло событие $\bar{A}$ -

выемка черного шара первым человеком, то $P(B) = \frac{2}{3}$. Если не произошло ни событие A , ни событие $\bar{A}$, то $P(B) = 1/2$.

Таким образом, событие B является зависимым от события A .

Вероятность события B , вычисленная при условии, что событие A произошло, называется *условной вероятностью события B* и обозначается символами $P(B|A)$ или $P_A(B)$.

Из примера 21б видно, что $P(B) \neq P(B|A)$.

Теорема 3. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A). \quad (1.12)$$

Доказательство

Пусть множество Ω состоит из n равновозможных элементарных событий, причем $m + l$ - число элементарных событий, входящих в событие A , $k + l$ - число элементарных событий, входящих в событие B , l - число элементарных событий, общих для событий A и B . Событие $A \cdot B$ произойдет, если произойдет одно из l элементарных событий. Вероятность появления события $A \cdot B$: $P(A \cdot B) = \frac{l}{n}$.

Пусть первым произошло событие A , вероятность которого $P(A) = \frac{m+l}{n}$. Следовательно, для события B остаются возможными $m+l$ элементарных событий. Из них l элементарных событий благоприятны для события B , $P(B|A) = \frac{l}{m+l}$. Подставим

выражения для $P(A \cdot B)$, $P(A)$, $P(B|A)$ в формулу (1.12):

$$\frac{l}{n} = \frac{m+l}{n} \cdot \frac{l}{m+l} \Leftrightarrow \frac{l}{n} = \frac{l}{n}, \quad \text{получили тождество, теорема}$$

доказана.

При применении теоремы 3 безразлично, какое событие считать первым, какое – вторым, формулу (1.12) можно записать в виде

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Следствие 1. Если событие A не зависит от события B , то и событие B не зависит от события A .

Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.13)$$

В случае n независимых событий

$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

Пример 22. Вероятность попадания в мишень первым стрелком (событие A) равна 0,8. Вероятность попадания в мишень

вторым стрелком (событие B) равна 0,7. Определить вероятность поражения мишени, если каждый из стрелков сделал по одному выстрелу.

Решение

Мишень поражена, если в неё попадет хотя бы один стрелок, то есть произойдет событие $A + B$. События A и B совместные и независимые.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A + B) = 0,8 + 0,7 - 0,8 \cdot 0,7 = 0,94.$$

1.5.4 Вероятность появления хотя бы одного события

Теорема 4. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n.$$

Доказательство

Обозначим через A событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$. События A и $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ (ни одно из событий не наступило) противоположны, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = 1.$$

Отсюда, пользуясь теоремой умножения, получим

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n),$$

или

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n.$$

Частный случай. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p , то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - q^n.$$

Пример 23. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Решение

Искомая вероятность

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 = 1 - (1 - 0,05)(1 - 0,08) = 0,126.$$

Пример 24. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причем каждый должен сделать по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятность того, что стрелки получают приз.

Решение

Для вручения приза достаточно, чтобы хотя бы одна из четырех попыток была успешной. Вероятность успешной попытки $p = 0,3$, а неуспешной $q = 1 - 0,3 = 0,7$. Искомая вероятность

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0,7^4 = 0,7599.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите теорему сложения вероятностей несовместных событий.
2. Сформулируйте следствие теоремы сложения.
3. Сформулируйте и докажите теорему сложения вероятностей совместных событий. Сформулируйте следствие теоремы.
4. Какие события называют зависимыми, независимыми; что означает условная вероятность события?
5. Сформулируйте и докажите теорему умножения вероятностей.
6. Сформулируйте следствия теоремы умножения вероятностей.

Задачи

1. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «герб».
2. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на 4 этаже.
3. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор заработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии заработает только один сигнализатор.
4. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет хотя бы один из стрелков.
5. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два окажутся высшего сорта.
6. В мешочке содержится 10 одинаковых кубиков с номерами 1, 2, ..., 10. Наудачу извлекают по одному три кубика. Найти вероятность

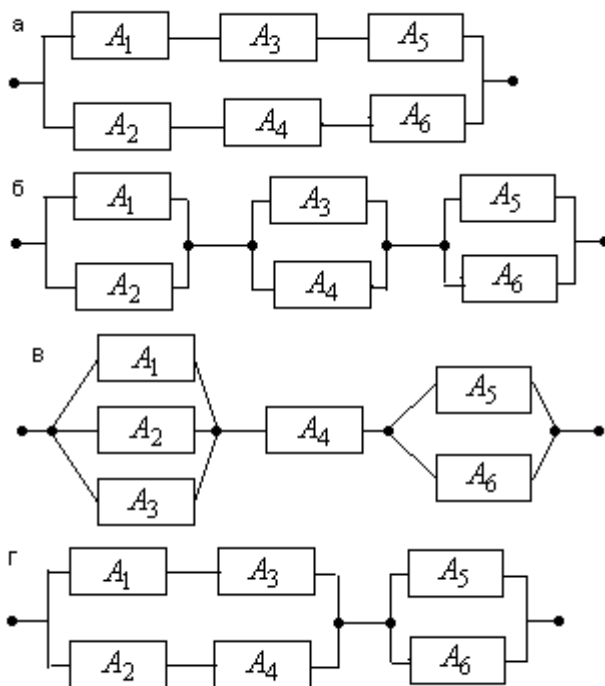
того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3, а) без возвратов, б) с возвратами.

7. В «секретном» замке на общей оси четыре диска, каждый из которых разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

8. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

9. Найти вероятность прохождения электрического сигнала через систему параллельно и последовательно соединенных узлов $A_1, A_2, \dots, A_6$ (см. рисунок), если вероятности безотказной работы узлов соответственно равны $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_6) = p_6$.

	Вероятности безотказной работы узлов					
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
1 вариант для схем а, б, в, г	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9
2 вариант для схем а, б, в, г	0,9	0,7	0,9	0,7	0,9	0,7



10. В ящике перемешку лежат 6 черных, 4 серых и 2 белых носка. Спеша на работу, человек наугад вытянул два носка. Какова вероятность того, что они одного цвета?

11. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

12. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Ответы: 1) 0,75; 2) $1/216$; 3) 0,14; 4) 0,94; 5) 0,384; 6) а) $1/720$, б) 0,001; 7) $1/625$; 8) 0,995; 9) 1 вариант а) 0,927; б) 0,97; в) 0,89; г) 0,954; 2 вариант а) 0,758; б) 0,913; в) 0,677; г) 0,837. 10) $1/3$; 11) 0,8. 12) 0,14.

1.6 Формула полной вероятности

Формула полной вероятности – следствие теорем сложения и умножения вероятностей.

Пусть некоторое событие A может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$.

События $H_1, H_2, \dots, H_n$ составляют полную группу несовместных событий и называются *гипотезами*.

Теорема 5. Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i). \quad (1.14)$$

Формула (1.14) называется *формулой полной вероятности*.

Доказательство

Так как $H_1, H_2, \dots, H_n$ – полная группа событий, то при испытании событие A произойдет только вместе с одной из гипотез:

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \dots + H_n \cdot A.$$

Гипотезы несовместны, поэтому и события $H_1 \cdot A, H_2 \cdot A, \dots, H_n \cdot A$ также несовместны. Для определения

вероятности $P(A)$ применяем теорему сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + \dots + P(H_n \cdot A).$$

К событиям $H_1 \cdot A, H_2 \cdot A, \dots, H_n \cdot A$ применяем теорему умножения вероятностей, получим

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)$, что требовалось доказать.

Пример 25. Имеется три одинаковые корзины. В первой корзине 5 белых и 3 черных шара, во второй – 4 белых и 6 черных, в третьей – 7 белых и 4 черных. Вам предлагается, находясь спиной к корзинам, вынуть один шар. Какова вероятность, что вынутый шар будет белым?

Решение

Так как корзины одинаковые, то предполагается, что вероятность выбора любой корзины одинакова и равна $\frac{1}{3}$. Пусть H_1, H_2, H_3 – события, заключающиеся в выборе первой, второй или третьей корзины. Тогда $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Обозначим через A событие, заключающееся в вынимании белого шара вообще, через A/H_1 – событие, что белый шар вынут из первой корзины, A/H_2 – из второй корзины, A/H_3 – из третьей корзины. Вычислим условную вероятность этих событий:

$$P(A/H_1) = \frac{5}{8}; \quad P(A/H_2) = \frac{4}{10}; \quad P(A/H_3) = \frac{7}{11}.$$

Применяя теперь формулу (1.14) при $n = 3$, получаем, что вероятность извлечения белого шара (безразлично из какой корзины) будет равна

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{11} = 0,551.$$

Примечание – при решении задач с формулой полной вероятности выдвигаются гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$. Важно проверить, что

сумма вероятностей гипотез равна единице: $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$.

1.7 Формулы Байеса

Пусть теперь некоторое событие A произошло вместе с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, составляющих полную группу несовместных событий.

Определим вероятности гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ при условии, что событие A уже произошло, то есть, вычислим условные вероятности $P(H_1|A), \dots, P(H_n|A)$.

По теореме умножения $P(AH_1) = P(A)P(H_1|A)$, откуда

$$P(H_1|A) = \frac{P(AH_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}. \quad \text{Вероятность } P(A) \text{ вычисляем по формуле (1.14), получим:}$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)}.$$

Также можно вычислить условные вероятности $P(H_2|A), \dots, P(H_n|A)$, поэтому общую формулу запишем в виде:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.15)$$

Формулы Байеса (1.15) позволяют пересчитать вероятности гипотез после того, как событие A произошло в результате испытания.

Пример 26. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья – 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5%, 4% и 2%.

- 1) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефективный?
- 2) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт произведён третьей машиной?

Решение

Сформулируем три гипотезы: H_1 – выбранный случайно болт изготовлен первой машиной, H_2 – второй, H_3 – третьей. Пусть

событие A – выбранный болт дефектный. При введенных обозначениях данные задачи можно записать так:

$P(H_1) = 0,25$; $P(H_2) = 0,35$; $P(H_3) = 0,4$; так как первая машина допускает 5% брака: $P(A/H_1) = 0,05$; $P(A/H_2) = 0,04$; $P(A/H_3) = 0,02$.

1) Вероятность события A (извлечение дефектного болта) определяется по формуле полной вероятности (1.14)

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \\ = 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 = 0,0345.$$

2) Для определения вероятности того, что случайно выбранный болт был изготовлен третьей машиной, нужно воспользоваться формулой Байеса, согласно которой

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)} = \\ = \frac{0,4 \cdot 0,02}{0,0345} \approx 0,23.$$

Контрольные вопросы

1. Запишите формулу полной вероятности. Как называются события H_1 , H_2 , ..., H_n , каким свойством они обладают?
2. Докажите формулу полной вероятности.
3. Запишите формулы Байеса. В каких случаях они применяются?

Задачи

1. В вычислительной лаборатории есть 6 японских и 4 корейских компьютера. Вероятность того, что за время выполнения лабораторной работы японский компьютер не выйдет из строя равна 0,95, а корейский 0,8. Студент выполняет расчет на удачу выбранной машине. Найти вероятность того, что студент закончит выполнение расчета.

2. В цехе работают 20 станков. Из них 10 марки А, 6 марки В и 4 марки С. Вероятность того, что качество детали окажется отличным, для этих станков соответственно равна: 0,9; 0,8; и 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

3. Устройство может работать в двух режимах: нормальном и аварийном. Нормальный режим наблюдается в 80% времени работы прибора, а аварийный – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время T в нормальном режиме равна 0,1, а в аварийном – 0,7. Найти полную вероятность выхода прибора из строя за время T .

4. На предприятии изготавливаются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 40 %

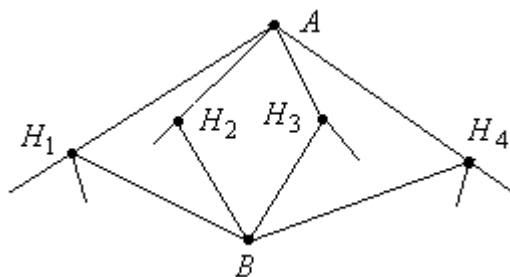
изделий от всего объема их производства, на второй – 25%, на третьей – 35%. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: 96, 93 и 95%. Требуется определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным, а также вероятность того, что это бракованное изделие сделано на второй линии.

5. Имеются две урны: в первой 5 белых шаров и 4 черных; во второй 10 белых и 6 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

6. Имеются две урны: в первой 3 белых шаров и 2 черных; во второй 4 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

7. На предприятии изготавливаются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 20 % изделий от всего объема их производства, на второй – 30%, на третьей – 50%. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: 95, 98 и 97%. Требуется определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным, а также вероятности того, что это бракованное изделие сделано на первой, второй и третьей линиях.

8. На рисунке изображена схема дорог. Некто, выйдя из пункта



А, двигается сверху вниз по схеме дорог. В каждом пункте он выбирает наугад один из возможных путей. Какова вероятность того, что он попадет в пункт В, если оборванные линии обозначают дороги, не

ведущие к цели?

9. Испытывается прибор, состоящий из двух узлов I и II. Надежности (вероятности безотказной работы за время τ) узлов I и II известны и равны $p_1 = 0,8$ и $p_2 = 0,9$. Узлы отказывают независимо друг от друга.

По истечении времени τ выяснилось, что прибор неисправен. Найти с учетом этого вероятности гипотез: $H_1 = \{\text{неисправен только первый узел}\}$;

$H_2 = \{\text{неисправен только второй узел}\}$; $H_3 = \{\text{неисправны оба узла}\}$.

10. Из десяти студентов пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей и взявших билеты, Иванов и Петров знают 20 билетов из 30, Сидоров – 15, остальные все 30 билетов. По прошествии времени

отведенного на подготовку экзаменатор наудачу вызывает студента. Определить вероятность того, что этот студент сдал экзамен, если знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а при незнании билета можно сдать экзамен с вероятностью 0,1.

11. В специализированную больницу поступает в среднем 50% больных с заболеванием К, 30% - с L, 20% - с M. Вероятность полного излечения болезни К равна 0,7, L – 0,8, M – 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К.

12. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

13. Прибор может работать в двух режимах: 1) нормальном и 2) ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% случаях работы прибора; ненормальный – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1; в ненормальном - 0,7. Найти полную вероятность выхода прибора из строя за время t .

14. В пирамиде установлено 9 винтовок из которых 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95, а без оптического прицела - 0,5. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

15. Имеются три одинаковые урны с шарами. В первой из них 3 белых и 4 черных шара, во второй – 2 белых и 5 черных, в третьей – 10 черных шаров. Из случайно выбранной урны наудачу вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

16. Студент подготовил к экзамену 20 билетов из 25. В каком случае шансы взять известный билет больше - когда студент пришел на экзамен первым или вторым?

17. В сборочный цех поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено 51% деталей от их общего количества, на втором станке 24% и на третьем 25%. При этом на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором 80% и на третьем 70%. Используя формулу полной вероятности определить, какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта?

18. В первой столовой работают официантами 5 мужчин и 10 женщин. Во второй столовой 3 мужчин и 10 женщин. Из первой столовой во вторую переводят 2 штатные единицы. Какова вероятность того, что клиент, пришедший во вторую столовую, будет обслужен официанткой?

19. В группе 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационный норматив такова: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8, для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит квалификационный норматив.

20. Предположим, что 5 мужчин из 100 и 25 женщин из 10000 являются дальтониками. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что это мужчина?

21. В водоеме обнаружено загрязнение с превышением ПДК. Потенциальные источники - два предприятия, причем выбросы на первом происходят в 9 раз чаще, чем на втором. Только 15% сбросов первого предприятия превышают ПДК. Для второго предприятия эта вероятность равна 92%. Кто виноват?!

22. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике находится 26 белых шаров, во втором 15 белых и 11 черных, в третьем ящике 26 черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что белый шар вынут из первого ящика.

23. Из 10 учеников, пришедших на экзамен, трое подготовились отлично, четверо хорошо, двое удовлетворительно и один совсем не подготовился. В билетах 20 вопросов. Отличники могут ответить на все вопросы, хорошисты – на 16, троечники – на 10, а двоечники – на 5 вопросов. Каждый ученик получает 3 вопроса. Приглашенный первый ученик ответил на три вопроса. Какова вероятность, что он отличник?

24. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что 3-й стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень каждым из стрелков равны соответственно 0,6, 0,5 и 0,4.

Ответы: 1) 0,89; 2) 83%; 3) 0,22; 4) 0,051; 0,343; 5) 0,617; 6) 0,52; 7) 0,031; 0,322; 0,193; 0,483; 8) $5/12$; 9) 0,64; 0,29; 0,07; 10) 0,76; 11) 0,45; 12) 0,5; 13) 0,22; 14) 0,983; 15) 0,238; 16) первым; 17) 0,853; 18) 0,755; 19) 0,86; 20) 0,02625; 21) первое; 22) 0,634; 23) 0,5787; 24) 0,52.

1. 8 Повторение испытаний

1.8.1 Формула Бернулли

На практике часто встречаются задачи, в которых один и тот же опыт (испытание) повторяются неоднократно.

В результате каждого испытания может появиться или не появиться событие A . Интересует не результат отдельного опыта, а общее число появлений события A в серии опытов.

Введем следующие условия на повторяющиеся испытания:

- 1) количество испытаний – число ограниченное, обозначаем n ;
- 2) вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от результатов других испытаний, такие испытания называются независимыми относительно события A ;

- 3) вероятность появления события A в каждом испытании – величина постоянная, обозначим $P(A) = p$.

Указанным ограничениям отвечают, к примеру, несколько последовательных подбрасываний монеты, при которых фиксируется появление события A – появления цифры. При этом $P(A) = 0,5$.

Повторение испытаний может быть обусловлено повторением во времени испытания одного и того же объекта, как упомянутое подбрасывание монеты одним человеком. Однако, повторение испытаний возможно проводить независимо от времени, когда испытанию подвергается несколько одинаковых объектов, как в рассмотренных ниже примерах 28 и 30.

Обозначим не появление события символом $\bar{A}$, q – вероятность не появления события $P(\bar{A}) = 1 - p = q$.

Пусть требуется определить вероятность того, что событие A произошло ровно m раз в n испытаниях. Такая вероятность обозначается $P_{m,n}(A)$. (Очевидно, что в общем случае $0 \leq m \leq n$).

Обозначим B_m – событие, состоящее в том, что событие A произошло ровно m раз в n испытаниях. Пусть A_i – появление события в i -м испытании; $\bar{A}_k$ – неоявление события в k -м испытании. Тогда,

$$B_m = A_1 A_2 \dots A_m \bar{A}_{m+1} \dots \bar{A}_n + A_1 A_2 \dots A_{m-1} \bar{A}_m \dots \bar{A}_{n-1} A_n + \dots + \bar{A}_1 \dots \bar{A}_{n-m} A_{n-m+1} \dots A_n$$

В каждое произведение A входит m раз, $\bar{A}$ входит $(n-m)$ раз. Число всех комбинаций равно числу сочетаний из n элементов по m элементов: C_n^m . Вероятность каждой комбинации определяется по теореме умножения вероятностей независимых событий и равна $p^m q^{n-m}$. Комбинации между собой несовместны (в каждой паре комбинаций есть противоположные события с одинаковым индексом), поэтому вероятность суммы комбинаций определяется по теореме сложения несовместных событий:

$$P(B_m) = P(A_1 A_2 \dots A_m \bar{A}_{m+1} \dots \bar{A}_n) + \dots + P(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{n-m} A_{n-m+1} \dots A_n) = p^m q^{n-1} + p^m q^{n-1} + \dots + p^m q^{n-1} = C_n^m p^m q^{n-1}.$$

Таким образом,

$$P_{m,n}(A) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}. \quad (1.16)$$

Формула (1.16) называется *формулой Бернулли*.

Вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит:

- а) менее m раз: $P_{0,n}(A) + P_{1,n}(A) + \dots + P_{m-1,n}(A)$;
 б) более m раз: $P_{m+1,n}(A) + P_{m+2,n}(A) + \dots + P_{n,n}(A)$;
 в) не менее m раз: $P_{m,n}(A) + P_{m+1,n}(A) + \dots + P_{n,n}(A)$;
 г) не более m раз: $P_{0,n}(A) + P_{1,n}(A) + \dots + P_{m,n}(A)$.

Пример 27. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,9. Определить вероятность появления события ровно 4 раза в шести испытаниях.

Решение

По условию задачи $n = 6$, $m = 4$,

$$P(A) = p = 0,9, \quad q = 1 - p = 0,1.$$

Отдельно вычислим число сочетаний из 6 по 4: $C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = 15$.

Искомую вероятность определяем по формуле Бернулли:

$$P_{4,6}(A) = C_6^4 p^4 q^2 = 15 \cdot (0,9)^4 \cdot (0,1)^2 = 0,0984.$$

Ответ: $P_{4,6}(A) = 0,0984$.

1.8.2 Приближенная формула Пуассона при повторении испытаний

Формула Бернулли не может быть применена, если число испытаний очень велико, так как при этом недопустимо велика погрешность вычислений.

Пусть $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, но величина $p \cdot n = \lambda$ сохраняет постоянное значение. В формулу Бернулли подставим $p = \frac{\lambda}{n}$ и определим предел при $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{m,n}(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{\lambda^m}{n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-m)! n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \cdot 1 \cdot e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\lambda n + \lambda m}{n}} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-m)!n^m} = 1$ как отношение бесконечно больших величин одного порядка роста.

Полученная приближенная формула

$$P_{m,n}(A) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad (1.17)$$

где $\lambda = pn$, называется формулой Пуассона и применяется, когда n - велико, а вероятность p - мала (ориентировочно $p < 0,1$, $npq < 9$).

Формула Пуассона используется в задачах, в которых рассматриваются *редкие события*.

Пример 28. Вероятность отказа элемента в схеме в течение суток равна 0,01. В схеме имеется 500 одинаковых элементов. Какова вероятность того, что в течение суток откажут 3 элемента?

Решение

По условию задачи, событие A - отказ элемента в течение суток: $P(A) = p = 0,01$; $\lambda = pn = 500 \cdot 0,01 = 5$; $m = 3$. Для решения применяем формулу Пуассона.

$$P_{3,500}(A) = \frac{5^3}{3!} e^{-5} = \frac{125}{6} \cdot 0,00674 = 0,14037.$$

Примечание – искомая вероятность, вычисленная по точной формуле Бернулли, составляет 0,14022; относительная погрешность решения по приближенной формуле Пуассона составляет 0,1%.

1.8.3 Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа

Указанные теоремы являются частными случаями центральной предельной теоремы (см. §1.16) и применяются, если число независимых испытаний велико, но событие A не является редким, т.е. $0 < P(A) < 1$.

Локальная теорема Муавра – Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие

наступит ровно m раз (безразлично в какой последовательности), приближенно равна

$$P_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \quad (1.18)$$

Здесь $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ - функция Гаусса. Таблица значений функции $\varphi(x)$ имеется в приложении А пособия. Функция Гаусса – четная функция.

Пример 29. Определить вероятность того, что при 1000 испытаниях событие произойдет 410 раз, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,4.

Решение

По условию $n = 1000$, $m = 410$, $p = 0,4$, $q = 0,6$. Тогда

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{410 - 1000 \cdot 0,4}{\sqrt{1000 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = 0,645. \text{ Из приложения А}$$

находим

$$\varphi(0,645) = 0,324.$$

$$\text{Следовательно, } P_{410,1000} = \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} \cdot 0,324 = 0,0209.$$

Интегральная теорема Муавра – Лапласа.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз, приближенно равна

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \quad (1.19)$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-(t^2/2)} dt$ - функция Лапласа. Таблица

значений функции Лапласа имеется в приложении Б данного пособия. Функция Лапласа – нечетная функция.

Пример 30. Количество студентов в потоке 150 человек. Предположим, что каждый из студентов посещает лекцию с

вероятностью 0,8. Определим вероятность того, что на лекции присутствует от 115 до 140 студентов.

Решение.

По условию задачи $n = 150$, $m_1 = 115$, $m_2 = 140$, $p = 0,8$.

Кроме того, $q = 1 - p = 0,2$. Для решения задачи применяем локальную теорему Муавра – Лапласа.

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{115 - 150 \cdot 0,8}{\sqrt{150 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,021;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{140 - 150 \cdot 0,8}{\sqrt{150 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 4,082.$$

По таблице приложения Б находим $\Phi(-1,021) = -0,3464$,

$\Phi(4,082) = 0,4999$. Тогда

$$P_n(115, 140) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,4999 - (-0,3464) = 0,8463.$$

Ответ: $P_n(115, 140) = 0,8463$.

Контрольные вопросы

1. Перечислите условия, в которых происходит повторение опытов. Приведите пример повторения опытов с указанными условиями.
2. Докажите формулу Бернулли при повторении опытов.
3. В каких случаях при повторении опытов применяется формула Пуассона? Воспроизведите доказательство формулы Пуассона.
4. В каких случаях при повторении опытов применяется локальная формула Муавра-Лапласа? Запишите формулу.
5. В каких случаях при повторении опытов применяется интегральная формула Муавра-Лапласа? Запишите формулу.

Задачи

1. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

2. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): три партии из четырех или пять из восьми?

3. Изделия некоторого производства содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад изделий: а) нет ни одного бракованного; б) будут два бракованных.

4. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) менее двух раз, б) не менее двух раз.

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

6. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет между 760 и 820.

7. В первые классы должно быть принято 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется не менее 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,51.

8. Вероятность появления события в одном опыте равна 0,01. Произведено 1000 независимых опытов. Какова вероятность того, что событие произошло в четырех опытах.

9. Устройство, состоящее из пяти независимо работающих элементов, включается за время T . Вероятность отказа каждого из них за это время равна 0,2. Найти вероятность того, что откажут: а) три элемента; б) не менее четырех элементов; в) хотя бы один элемент.

10. Найти вероятность того, что если бросить монету 200 раз, то орел выпадет от 90 до 110 раз.

Ответы: 1) 0,384; 2) вероятнее – три из четырех; 3) а) 0,7738; б) 0,0214; 4) а) $3/16$, б) $13/16$; 5) 0,3910; 6) 0,865; 7) 0,387; 8) 0,019; 9) а) 0,0512; б) 0,00672; в) 0,67; 10) 0,8384.

Глава 2. Случайные величины

2.1. Дискретные случайные величины. Законы распределения

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно из возможных значений, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены [1].

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Случайная величина X , принимающая числовые значения x_i с вероятностью p_i , называется *дискретной случайной величиной*.

Таким образом, дискретная случайная величина принимает отдельные, изолированные значения с определенными вероятностями. Например, если случайная величина X – количество пассажиров маршрутного такси, то её значения x_i принимают только неотрицательные целые значения.

[illegible]

Некоторые законы распределения дискретной случайной величины можно выразить аналитически (в виде формулы).

2.1.1. Биномиальное распределение

Закон распределения называется *биномиальным*, если вероятность появления каждого значения случайной величины X определяется по формуле Бернулли.

Пример 2. Переменная величина X - количество появления цифры при подбрасывании монеты 5 раз. Составить таблицу и многоугольник распределения случайной величины.

Решение

Случайная величина является дискретной, она может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Вероятность появления каждого значения определяем по формуле Бернулли (1.16).

$$P(x=0) = \frac{5!}{0! \cdot 5!} (0,5)^0 \cdot (1-0,5)^5 = (0,5)^5 = 0,03125;$$

$$P(x=1) = \frac{5!}{1! \cdot 4!} (0,5)^5 = 5 \cdot (0,5)^5 = 0,15625$$

$$P(x=2) = P(x=3) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} (0,5)^5 = 10 \cdot (0,5)^5 = 0,3125;$$

$$P(x=4) = \frac{5!}{1! \cdot 4!} (0,5)^5 = 0,15625;$$

$$P(x=5) = \frac{5!}{0! \cdot 5!} (0,5)^5 = 0,03125.$$

Таблица 2.3 - Закон распределения в примере 2

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Проверка правильности составления закона распределения:

$$2 \times 0,03125 + 2 \times 0,15625 + 2 \times 0,3125 = 1.$$

Многоугольник распределения вероятностей показан на рисунке 2.2.

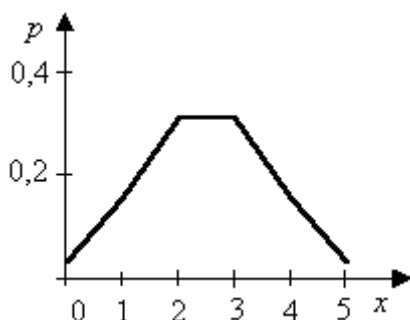


Рисунок 2.2 – Многоугольник распределения вероятностей

2.1.2. Распределение Пуассона

Пусть дискретная случайная величина X выражает количество появлений события A при массовых испытаниях (n - велико), но при этом в каждом испытании вероятность появления события $P(A) = p$ мала, и выполняется условие $np = \lambda = \text{const}$. В таких случаях (см. §1.8.2) закон распределение случайной величины задается формулой

Пуассона $P_{m,n}(A) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ и называется распределением

Пуассона.

Примерами случайных величин, имеющих распределение Пуассона, являются: число вызовов на телефонной станции за время t ; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии и т.д.

Пример 3. В порту каждые сутки может появиться одно большегрузное судно с вероятностью $P = \frac{1}{6}$. Вероятность появления

более одного судна в течение суток пренебрежимо мала. Какова вероятность того, что за месяц (30 дней) порт посетят не более 4 судов?

Решение

По условию $n = 30$, $p = \frac{1}{6}$. Найдём λ .

$$\lambda = np = 30 \cdot \frac{1}{6} = 5, \quad P_n(m) = \frac{e^{-5} \cdot 5^m}{m!}, \quad m = 0, 4.$$

По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

$$P(m \leq 4) = \sum_{m=0}^4 P_n(m) = P_{30}(0) + P_{30}(1) + P_{30}(2) + P_{30}(3) + P_{30}(4) = \\ = 0,0067 + 0,0337 + 0,0842 + 0,1404 + 0,1755 = 0,4405.$$

2.1.3. Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p ($0 < p < 1$), вероятность его не появления равна $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A . Если событие появилось в k -м испытании, то во всех предыдущих оно не появлялось.

Обозначим через X дискретную случайную величину – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A . Возможными значениями X являются натуральные числа $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, и так далее. Если в первых $k-1$ испытаниях событие не появилось, а в k -м испытании произошло, то

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p. \quad (2.1)$$

Задавая $k = 1, 2, 3, \dots$, определим сумму вероятностей всех значений случайной величины X :

$$p + pq + pq^2 + pq^3 + \dots + pq^n + \dots$$

Полученный числовой ряд составлен из членов сходящейся геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$. Сумма ряда

определяется по формуле $S = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$ и равна единице.

Закон распределения вероятностей (2.1) называется *геометрическим*.

Примерами реальных случайных величин, распределенных по геометрическому закону, являются: число выстрелов до первого попадания, число испытаний прибора до первого отказа, число бросаний монеты до первого выпадения решки и т.д.

Пример 4. Студент A знает ответы на 6 вопросов из десяти, студент B знает ответы на 2 вопроса из десяти. Чтобы сдать экзамен, необходимо ответить только на один вопрос. После 3-х неудачных попыток студента отчисляют из университета. Определить вероятность того, что каждый из студентов A и B продолжит образование.

Решение

Обозначим X - случайная величина, имеющая геометрическое распределение (2.1) – число испытаний до первого ответа на

экзаменационный вопрос. По условию задачи для студента A $p = 0,6$, $q = 0,4$, для студента B $p = 0,2$, $q = 0,8$. Составим таблицу распределения для первых 5-ти значений случайной величины.

Таблица 2.4 – Геометрический закон распределения

k	1	2	3	4	5	...
$P_A(X = k)$	0,6	0,24	0,096	0,0384	0,01536	...
$P_B(X = k)$	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,08192	...

Вероятность сдать экзамен за три попытки и остаться в университете:
 для студента A вероятность $0,6+0,24+0,096=0,936$;
 для студента B вероятность $0,2+0,16+0,128=0,488$.

Контрольные вопросы

1. Какая величина называется случайной, дискретной случайной? Приведите пример дискретной случайной величины.
2. Что называется законом распределения вероятностей дискретной случайной величины?
3. В каких случаях дискретная случайная величина имеет биномиальный закон распределения, распределение Пуассона, геометрическое распределение?

Задачи

1. Бросаются две игральные кости. Пусть X - сумма очков, выпадающих на их верхних гранях. Написать закон распределения вероятностей.

2. Производится ряд независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,8. Испытания прекращаются, как только происходит событие A . Написать закон распределения случайной величины X - числа производимых опытов.

3. Производится 4 независимых опыта, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,6. Пусть случайная величина X - частота появления события A в 4 – х опытах. Написать закон распределения X .

4. Производится два независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Рассматривается случайная величина X - разность между числом попаданий и числом промахов. Написать закон её распределения.

5. Два орудия стреляют по некоторой цели. Первое орудие стреляет два раза, а второе – один раз. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8, из второго – 0,6. Найти закон распределения случайной величины X - общего числа попаданий в цель.

2.2 Функция распределения

Функцией распределения (обозначается $F(x)$) называется вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее значения переменной величины x : $F(x) = P(X < x)$.

Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Пример 5. По цели производится три независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле 0,4. Построить функцию распределения числа попаданий.

Решение

Случайная величина X принимает значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Вероятность возможных значений случайной величины определим по формуле Бернулли (1.16)

$$P(X = x_i) = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}, \quad (n = 3, \quad q = 0,6).$$

Будем иметь: $P(X = 0) = C_3^0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^3 = 0,216$;

$$P(X = 1) = C_3^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^2 = 0,432$$

$$P(X = 2) = C_3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^1 = 0,288$$

$$P(X = 3) = C_3^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^0 = 0,064.$$

Составим ряд (таблицу 2.5) распределения.

Таблица 2.5 – Ряд распределения в примере 5

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Построим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ P(X = 0) = 0,216 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ P(X = 0) + P(X = 1) = 0,648 & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,936 & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения показан на рисунке 2.3.

Будем рассматривать случайную величину X как случайную точку на числовой оси Ox , которая в результате опыта может занять то или иное положение. Тогда $F(x)$ - вероятность того, что случайная точка X в результате опыта попадет левее точки x . При любых $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $P(X < x_2) \geq P(X < x_1)$, следовательно, функция распределения не убывающая, $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$. Также с точки зрения геометрической интерпретации функции распределения $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

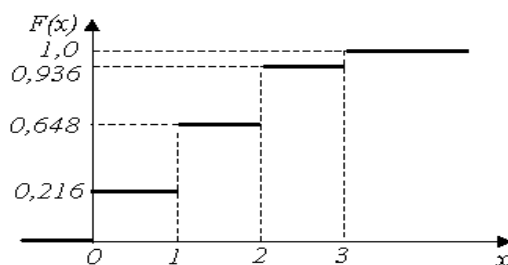


Рисунок 2.3 – Функция распределения в примере 5

Таким образом, функция распределения обладает следующими свойствами:

- 1) область изменения функции распределения совпадает с интервалом значений вероятности, $F(x) = P(X < x)$,
 $0 \leq F(x) \leq 1$;
- 2) функция распределения не убывающая, $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$;
- 3) предельные значения функции распределения $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$;
- 4) если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$, $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

График функции распределения дискретной случайной величины имеет разрывы с конечным скачком в точках, где случайная величина принимает свои значения. Величина скачка в точке x_k равна вероятности p_k (см. рисунок 2.3).

Если некоторая случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$ (см. рисунок 2.4), то такая случайная

величина называется *непрерывной*. В этом случае $F(x)$ называется ещё интегральным законом распределения.

Непрерывная случайная величина может принимать любое значение на числовой оси Ox или на некотором интервале $(a;b)$.

Таким образом, функция распределения является законом распределения вероятностей как дискретных, так и непрерывных случайных величин.

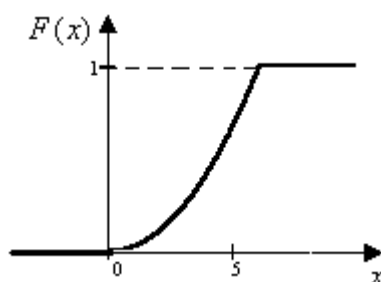


Рисунок 2.4 – График функции распределения непрерывной случайной величины

Контрольные вопросы

1. Что называется функцией распределения?
2. Перечислите и объясните свойства функции распределения.
3. Какая величина называется непрерывной случайной величиной?
4. Какой вид имеет график функции распределения дискретной случайной величины, непрерывной случайной величины?

Задачи

1. В партии 7% нестандартных деталей. Наудачу взяли три детали. Написать закон распределения дискретной случайной величины X - числа стандартных деталей среди трёх отобранных. Построить функцию распределения и её график.

2. В урне имеются четыре шара с номерами от 1 до 4. Вынули два шара. Пусть случайная величина X - сумма номеров шаров. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X . Построить многоугольник распределения и график функции распределения.

3. Трое студентов сдают экзамен по теории вероятностей. Вероятность того, что первый студент сдаст экзамен, составляет 0,9, для второго и третьего студентов эта вероятность равна соответственно 0,85 и 0,8. Построить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X - числа студентов, которые сдадут экзамен по теории вероятностей, построить $F(x)$ и начертить её график.

2.3 Вероятность попадания случайной величины на заданный участок

Пусть некоторая случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$. Определим вероятность того, что случайная величина попадает в результате испытания в интервал $[x_1; x_2)$, то есть $x_1 \leq X < x_2$.

Введем следующие обозначения: событие A состоит в том, что в результате испытания $X < x_2$; событие B - в результате испытания $X < x_1$; C - в результате испытания $x_1 \leq X < x_2$.

Тогда $A = B + C$. События B и C - несовместные, следовательно,

$$P(A) = P(B) + P(C) \Rightarrow$$

$$P(C) = P(A) - P(B) \Rightarrow$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1), \text{ окончательно,}$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (2.2)$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1; x_2)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.

Будем уменьшать интервал $[x_1; x_2)$ при $x_2 \rightarrow x_1$.

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} P(x_1 \leq X < x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} (F(x_2) - F(x_1)) = P(X = x_1)$$

Значение этого предела зависит от того, непрерывная ли функция $F(x)$ в точке $x = x_1$ или же имеет разрыв.

Если в точке $x = x_1$ функция распределения имеет разрыв, то предел равен значению скачка функции в этой точке (см. рисунок 2.3 в точках $x = 0; 1; 2; 3$).

Если функция распределения $F(x)$ в точке $x = x_1$ непрерывна, то этот предел равен нулю (см. рисунок 2.4 и рисунок 2.3 в интервалах непрерывности функции распределения). Отсюда следует вывод:

Вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю.

На практике это означает, что при неограниченном повторении опытов событие $X = x$ будет появляться сколь угодно редко.

Поэтому для непрерывной случайной величины (и только для непрерывной) формула (2.2) может быть записана:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\text{или } P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Пример 6. Случайная величина X задана на положительной полуоси Ox функцией распределения $F(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервал $(0; 1)$.

Решение

Используем формулу $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$,
отсюда $P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} 0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

Контрольные вопросы

1. Как подсчитать вероятность попадания случайной непрерывной величины в данный интервал, если известна её функция распределения?
2. Чему равна вероятность появления любого отдельного значения непрерывной случайной величины?

Задачи

1. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ x - \frac{x^2}{4}, & \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Определить вероятность попадания случайной величины в интервалы: $[-3; -1]$; $[-1; 1]$; $[0; 1]$; $[0,5; 1,5]$; $[0; 2]$; $[3; \infty]$.

2. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -1; \\ \frac{1}{2}(x+1), & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Определить вероятность попадания случайной величины в интервалы: $[-3; -1]$; $[-1; 1]$; $[0; 1]$; $[0,5; 1,5]$; $[0; 2]$; $[3; \infty]$.

2.4 Плотность распределения вероятностей

Наглядное представление о характере распределения *непрерывной* случайной величины в окрестностях различных точек дает функция, которая называется плотностью распределения вероятностей или дифференциальным законом распределения случайной величины.

Вычислим вероятность попадания случайной величины X на элементарный участок $(x, x + \Delta x)$, используя формулу (2.2):

$$P(x \leq X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Плотностью распределения $f(x)$ вероятностей случайной величины называют предел отношения приращения функции распределения $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$ к Δx , при $\Delta x \rightarrow 0$,

т.е. $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$. Иначе говоря, плотность

распределения вероятностей – производная функции распределения:

$$F'(x) = f(x). \quad (2.3)$$

Смысл $f(x)$ состоит в том, что она указывает на то, как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки x при повторении опытов. Так как функция распределения – неубывающая, то *плотность распределения – величина неотрицательная*, $f(x) \geq 0$. Так как предельные значения функции распределения $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$, то предельные значения плотности распределения $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$.

График плотности распределения называют *кривой распределения*. В зависимости от вида кривой распределения различают несколько типовых законов распределения, например, закон равномерной плотности, нормальный закон распределения и другие.

Определим вероятность попадания непрерывной случайной величины на заданный отрезок $[x_1; x_2]$ из соотношения

$F'(x) = f(x)$, для чего проинтегрируем последнее на отрезке $[x_1; x_2]$.

$$\int_{x_1}^{x_2} F'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1),$$

$\Rightarrow$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (2.4)$$

Последняя формула показывает, что вероятность попадания непрерывной случайной величины на заданный отрезок $[X_1; X_2]$ равна площади криволинейной трапеции под кривой распределения на отрезке $[X_1; X_2]$. Тогда *площадь под всей кривой распределения равна единице*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

В частности, если все значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $\int_a^b f(x) dx = 1$.

Выразим функцию распределения $F(x)$ через плотность распределения.

Так как $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$, то с учетом (2.4) имеем:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Пример 7. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x < 0 \text{ и } x > \pi. \end{cases}$$

Построить график плотности распределения. Найти вероятность попадания случайной величины на участок $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Решение.

Построим график плотности распределения (рисунок 2.5).

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x \Big|_0^{\pi/4} \approx 0,15.$$

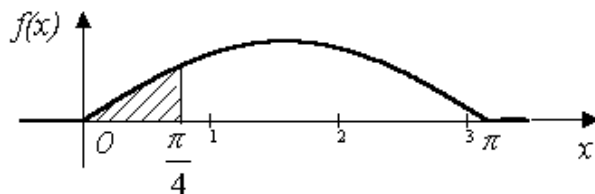


Рисунок 2.5 – Для примера 7

Контрольные вопросы

1. Что называется плотностью распределения вероятностей случайной величины, каков её вероятностный смысл?
2. Как определить вероятность попадания случайной величины на заданный отрезок, если известна плотность распределения?
3. Перечислите и объясните свойства плотности распределения.
4. Как называется график плотности распределения, чему равна площадь под графиком плотности распределения?
5. Как найти функцию распределения случайной величины, если известна плотность распределения?
6. Может ли плотность распределения принимать отрицательные значения, значения больше единицы?

Задачи

1. Случайная величина X подчинена закону распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ \sin 2x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi/2; \\ 0, & \text{если } x > \pi/2. \end{cases}$$

Требуется: а) определить функцию распределения $F(x)$; б) найти

вероятность попадания случайной величины на отрезок $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$;

в) построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

2. Задана функция распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi/2; \\ 1, & \text{если } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти $f(x)$. Построить графики $f(x)$, $F(x)$ и вычислить

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{3}\right).$$

3. Дана плотность распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1; \\ a \ln x, & \text{если } 1 < x \leq e; \\ 0, & \text{если } x > e. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и функцию $F(x)$. Построить графики $f(x)$, $F(x)$.

4. Даны две функции:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ 5\sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ \frac{3}{5}\sqrt[5]{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Определить, какая из них является плотностью распределения вероятностей случайной величины X , определенной на отрезке $[0; 1]$.

5. Случайная величина X подчинена закону распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ C \cdot \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi/6; \\ 0, & \text{если } x > \pi/6. \end{cases}$$

Требуется: а) вычислить коэффициент C ; б) определить функцию распределения $F(x)$; в) построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

6. Случайная величина X распределена по «закону равнобедренного треугольника», кривая распределения показана на рисунке 2.6.

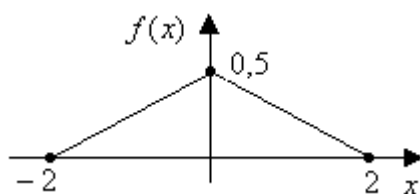


Рисунок 2.6 – Для задачи 6

Требуется: а) написать выражение плотности распределения $f(x)$; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) найти вероятность попадания случайной величины на отрезок $[-1; 1]$; на отрезок $[0; 3]$.

7. Случайная величина X имеет вероятностный треугольник, изображенный на рисунке 2.7.

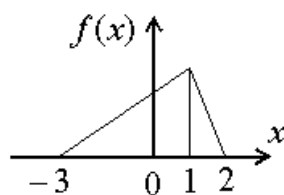


Рисунок 2.7 – для задачи 7

Записать выражения для $f(x)$ и $F(x)$ и построить график функции $F(x)$.

2.5 Числовые характеристики случайных величин

Повторяя пройденное в параграфах 2.1, 2.2 и 2.4 заметим, что: всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется *законом распределения*.

Были рассмотрены распределения вероятностей дискретной и непрерывной случайных величин. Дискретное распределение удобно задавать в виде таблицы (см. таблицы 2.1, 2.2, 2.3, 2.4).

Если случайная величина – непрерывная, то есть, принимает все значения из некоторого интервала, то её распределение задается плотностью распределения $f(x)$. Плотность распределения и её график (кривая распределения) называется также дифференциальным законом распределения.

И дискретные и непрерывные случайные величины могут быть описаны функцией распределения $F(x) = P(X < x)$. Функция распределения $F(x)$ и её график называются интегральным законом распределения.

Любой закон распределения случайной величины, будь то таблица, плотность или функция распределения, наиболее полно описывает случайную величину с вероятностной точки зрения.

На практике, зачастую, нет необходимости знать о случайной величине всё. Достаточно указать несколько числовых параметров, характеризующих отдельные черты распределения. Такие параметры, выражающие в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения, называются *числовыми характеристиками* случайной величины [3, стр. 83].

2.5.1 Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений возможных значений этой величины на вероятности их появлений:

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k. \quad (2.5)$$

Математическое ожидание указывает среднее значение, около которого группируются все возможные значения случайной величины.

Механический смысл математического ожидания: если на оси Ox расположены точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ с массами

$p_1, p_2, \dots, p_n$, причем $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, то $M(X)$ - абсцисса

центра масс данной системы материальных точек.

Формула (2.5) не что иное, как скалярное произведение арифметических векторов $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $p(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X выражается уже не суммой произведений, а интегралом

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \quad (2.6)$$

Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то математическое ожидание выражается интегралом

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx \quad (2.7)$$

Механическая интерпретация – такая же, как для дискретной случайной величины – абсцисса центра масс. Но при этом масса, равная единице распределена на оси Ox по закону плотности распределения $f(x)$.

Другое обозначение математического ожидания - m_x .

Свойства математического ожидания

Свойства справедливы как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной, $M(C) = C$. При этом постоянная C - это случайная величина, которая имеет одно значение C и принимает его с вероятностью $p = 1$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, $M(CX) = CM(X)$. При этом произведение CX - случайная величина, принимающая значения $Cx_1, Cx_2, \dots, Cx_n$ с такой же вероятностью, как величина X значения $x_1, x_2, \dots, x_n$.

3. Случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные

значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины *зависимы*. Произведение независимых случайных величин XY - случайная величина, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y . Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

4. Суммой случайных величин $X + Y$ называется случайная величина, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y . Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых, $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

На свойствах математического ожидания основана теорема о математическом ожидании числа появления событий в независимых испытаниях.

Теорема 1. Если случайная величина X - число появлений события A в n независимых испытаниях, при которых в каждом испытании $P(A) = p$, то математическое ожидание $M(X)$ равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: $M(X) = np$.

2.5.2 Мода и медиана случайной величины

Модой (Mo) дискретной случайной величины X называют то ее возможное значение, которому соответствует наибольшая вероятность появления.

Модой для непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которому соответствует максимальное значения плотности вероятности:

$$f(Mo) = \max.$$

Если случайная величина имеет одну моду, то такое распределение вероятностей называют *одномодальным*; если распределение имеет две моды – *двомодальным* и т.д. Существуют и такие распределения, которые не имеют моды. Их называют *антимодальными*.

Медианой (Me) непрерывной случайной величины X называют то ее значение, для которого выполняются равенство вероятностей событий:

$$\begin{aligned} P(-\infty < X < Me) &= P(Me < X < \infty); \\ \Rightarrow F(Me) - F(-\infty) &= F(\infty) - F(Me) \Rightarrow \\ F(Me) &= 0,5 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, медиану определяют из равенства (2.8).

Ее можно найти, воспользовавшись плотностью вероятностей:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}, \quad (2.9)$$

или при $X \in [a; b]$:

$$\int_a^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^b f(x)dx = \frac{1}{2}. \quad (2.10)$$

Таким образом, Me - возможное значение случайной величины X , причем такое, что прямая, проведенная перпендикулярно к соответствующей точке на плоскости $X = Me$, разделяет площадь фигуры, которую ограничивает функция $f(x)$, на две равные части.

Пример 8. Задана плотность вероятности на рисунке 8.

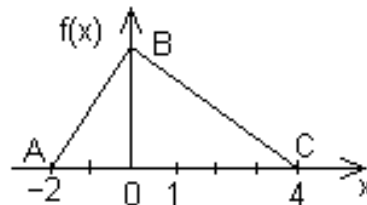


Рисунок 2.8 – Для примера 8

Вычислить медиану Me , найти моду Mo .

Решение.

На отрезке $[-2; 0]$ плотность вероятностей изменяется по закону прямой пропорциональной зависимости $f_1(x) = k_1x + b_1$ ($k_1 > 0$), а на отрезке $[0; 4]$ по аналогичному закону $f_2(x) = k_2x + b_2$ ($k_2 < 0$). Для нахождения значений параметров вычислим координаты вершин этого треугольника $B(x, y)$. Абсцисса этой точки известна из условия задачи: $x=0$; ординату найдем из условия нормировки, согласно с которым площадь треугольника ABC должна равняться единице:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot y \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

Таким образом, искомые координаты:

$$x = 0; \quad y = 1/3.$$

Найдем уравнения прямой, которая проходит через точки $A(-2; 0)$ и $B(0; 1/3)$:

$$\frac{y - 0}{x + 2} = \frac{1/3 - 0}{0 + 2} \Rightarrow y = \frac{x + 2}{6}.$$

Так, на отрезке $[-2; 0]$ имеем:

$$f_1(x) = \frac{x+2}{6}.$$

Уравнение прямой, что проходит через точки B(0;1/3) и C(4;0):

$$\frac{y-1/3}{x-0} = \frac{0-1/3}{4-0} \Rightarrow y = \frac{4-x}{12}.$$

Отсюда на отрезке [0;4] получаем:

$$f_2(x) = \frac{4-x}{12}.$$

Таким образом, плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -2; \\ \frac{x+2}{6}, & \text{если } -2 < x \leq 0; \\ \frac{4-x}{12}, & \text{если } 0 < x \leq 4; \\ 0, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Из рисунка 2.8 видно, что Me принадлежит отрезку [0;4]. Для нахождения Me воспользуемся формулой (2.10):

$$\int_{Me}^4 f(x)dx = \int_{Me}^4 \frac{4-x}{12} dx = -\frac{(4-x)^2}{24} \Big|_{Me}^4 = -\frac{(4-x)^2}{24} \Big|_{Me}^4 = \frac{(4-Me)^2}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Me = 4 \pm 2\sqrt{3}.$$

Выберем то, значения, которое принадлежит отрезку [0;4], т.е.

$Me = 4 - 2\sqrt{3}$. Найдём моду.

$$\begin{aligned} f(Mo) &= \max; \\ f(0) &= 1/3 = \max. \end{aligned}$$

Следовательно, $Mo = 0$.

Ответ: $Me = 4 - 2\sqrt{3}$; $Mo = 0$.

2.5.3 Дисперсия случайной величины

Дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \quad (2.11)$$

Дисперсия характеризует степень рассеивания значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i \quad (2.12)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины вычисляется по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (2.13)$$

Если случайная величина задана в интервале $(a; b)$, то

$$D(X) = \int_a^b (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (2.14)$$

Здесь $m_x = M(X)$, $f(x)$ - плотность распределения непрерывной случайной величины.

Размерность дисперсии – квадрат размерности случайной величины, поэтому её нельзя указать на оси случайной величины. Для наглядности характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины – корнем квадратным из дисперсии.

Корень квадратный из дисперсии называется **средним квадратическим отклонением** и обозначается

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \text{ или } \sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (2.15)$$

Отклонение случайной величины от её математического ожидания называется *центрированной случайной величиной*, будем обозначать её $\hat{X}$. Таким образом, $\hat{X} = X - M(X)$ или $\hat{X} = X - m_x$.

На примере дискретной случайной величины покажем, что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю.

$$\begin{aligned} M(\hat{X}) &= M(X - m_x) = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x) p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^n p_i = \\ &= m_x - m_x = 0. \end{aligned}$$

Математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины (дисперсию) можно вычислить и по другим формулам, отличным от формул (2.12), (2.13), (2.14). Для дискретной случайной величины:

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2m_x \sum_{i=1}^n x_i p_i + m_x^2 \sum_{i=1}^n p_i = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2m_x^2 + m_x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m_x^2. \end{aligned}$$

Таким образом, дисперсия равна математическому ожиданию квадрата случайной величины минус квадрат её математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m_x^2. \quad (2.16)$$

Соответственно для непрерывной случайной величины $X \in (-\infty; \infty)$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2. \quad (2.17)$$

Для непрерывной случайной величины $X \in (a; b)$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - (M(X))^2. \quad (2.18)$$

Пример 9. Группа студентов сдает экзамен. Случайная величина X (получаемая оценка) принимает значения $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$. Вероятности получения этих оценок учебной группой соответственно равны $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,3$; $p_4 = 0,2$. Найти математическое ожидание случайной величины X , дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение

Закон распределения для данной задачи имеет вид (см. таблицу 2.6).

Таблица 2.6 – Закон распределения в примере 9

x_k	2	3	4	5
p_k	0,1	0,4	0,3	0,2

Математическое ожидание:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 = 3,6.$$

Полученное число 3,6 следует считать средним баллом (математическое ожидание), на который выйдет группа на экзамене при данных вероятностях получения тех или иных оценок.

Дисперсию определяем по формуле (2.16):

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m_x^2.$$

$$D(X) = (2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,4 + 4^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,2) - 3,6^2 = 13,8 - 12,96 = 0,84. \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0,917.$$

Свойства дисперсии

Свойства справедливы как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

1. Дисперсия любой случайной величины неотрицательна, причем $D(X) = 0$ лишь когда X - постоянная.

$$M(C) = C \Rightarrow D(C) = M(C^2) - C^2 = 0.$$

2. Если $C = \text{const}$, то $D(CX) = C^2 D(X)$. Действительно, $D(CX) = M(C^2 X^2) - (M(CX))^2 = C^2 (M(X^2) - M^2(X))$.

3. Если случайные величины X и Y - независимые, то $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_k) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_k).$$

Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины: $D(C + X) = D(X)$.

Следствие 3. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

На свойствах дисперсии основана теорема о дисперсии числа появления событий в независимых испытаниях.

Теорема 2. Дисперсия числа появлений событий в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятность появления и не появления события в одном испытании: $D(X) = npq$.

Примечание – теоремы 1 и 2 относятся к случайной величине, распределенной по биномиальному закону, поэтому их можно совместно сформулировать следующим образом: математическое ожидание биномиального распределения с параметрами n и p равно произведению np , а дисперсия равна произведению npq .

Пример 10. Вероятность отказа детали при испытании на надежность равна 0,15. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 20 деталей.

Решение

Пусть X - число отказов при испытании деталей. Отказ при испытании одной детали не зависит от результатов испытаний других

деталей, поэтому рассматриваемые события независимы. Следовательно, согласно теореме 1,

$$M(X) = np = 20 \cdot 0,15 = 3 \text{ (детали).}$$

Согласно теореме 2, $D(X) = npq = 20 \cdot 0,15 \cdot 0,85 = 2,55$.

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2,55} = 1,597.$$

2.5.4 Понятие о моментах распределения. Характеристики формы кривой плотности распределения

Начальным моментом порядка S случайной величины X (обозначается $\alpha_s(X)$) называется математическое ожидание случайной величины в степени S , т.е.

$$\alpha_s(X) = M(X^S).$$

В соответствии с определением вычисление начальных моментов производится по формулам:

- для дискретной случайной величины $\alpha_s(X) = \sum_{i=1}^n x_i^s p_i$;

- для непрерывной случайной величины $\alpha_s(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx$.

Математическое ожидание – начальный момент первого порядка ($s = 1$):

$$\alpha_1(X) = M(X) = m_x.$$

Центральным моментом порядка S (обозначается $\mu_s(X)$) называется математическое ожидание центрированной случайной величины $\hat{X} = X - m_x$ в степени S , т.е.

$$\mu_s(X) = M(\hat{X}^S) = M((X - m_x)^S).$$

Выше показано, что центральный момент первого порядка равен нулю

$$\mu_1(X) = M(\hat{X}) = 0.$$

Центральный момент второго порядка – это дисперсия. Выше показано, что

$$\mu_2(X) = D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \alpha_2(X) - \alpha_1^2(X).$$

Центральные моменты высших порядков используются в качестве характеристик формы кривой плотности распределения.

Характеристикой асимметрии кривой распределения служит математическое ожидание куба центрированной случайной величины, т.е. *третий центральный момент*:

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^3 f(x) dx.$$

Третий центральный момент имеет размерность куба случайной величины. Чтобы получить безразмерную величину, μ_3 делят на куб среднего квадратичного отклонения. Полученная величина называется коэффициентом асимметрии. Обозначим коэффициент асимметрии S .

Тогда $S = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$. Знак коэффициента зависит от формы кривой

распределения, что иллюстрирует рисунок 2.9.

Кривая распределения случайной величины может иметь более или менее плоскую вершину.

Вычисляется математическое ожидание четвертой степени центрированной случайной величины (четвертый центральный момент):

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^4 f(x) dx.$$

Затем вычисляется безразмерная величина $\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}$. Эта величина для

случайной величины, подчиненной нормальному закону распределения, равна 3 (о нормальном распределении см. ниже).

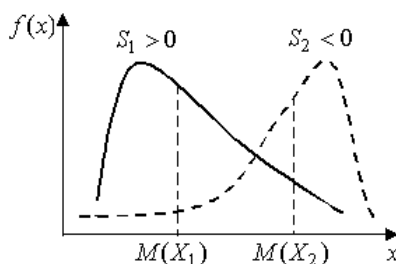


Рисунок 2.9 – Влияние формы кривой распределения на знак коэффициента асимметрии

Другие законы распределения сравниваются с нормальным законом, коэффициент сравнения называется *эксцессом* (обозначается E_x) и

имеет вид: $E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$. Для кривой распределения с более острой

вершиной, чем у нормальной кривой $E_x > 0$, для кривой распределения с более плоской вершиной $E_x < 0$ (см. рисунок 2.10).

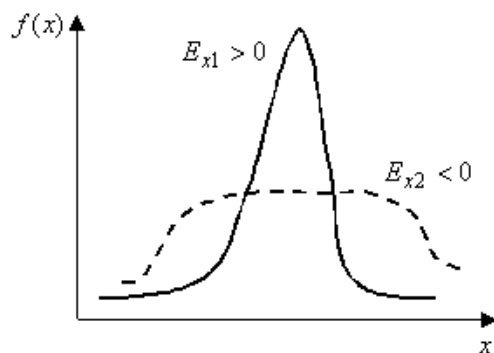


Рисунок 2.10 – Зависимость эксцесса от формы кривой распределения

Пример 11. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Требуется:

- 1) определить коэффициент c ; 2) найти функцию распределения $F(x)$;
- 3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$; 4) вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; 5) найти вероятность того, что случайная величина X принимает значения из интервала $(1; 2)$; 6) определить коэффициент асимметрии кривой распределения S и эксцесс E_x ;

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < 0; \\ c(x+1)^2 & \text{для } 0 \leq x \leq 2; \\ 0 & \text{для } x > 2. \end{cases}$$

Решение

1. Для определения коэффициента c используем свойство плотности распределения (§2.4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Так как для нашего примера

$f(x) = 0$ при $x < 0$ и при $x > 2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 c \cdot (x+1)^2 dx = c \cdot \left. \frac{(x+1)^3}{3} \right|_0^2 = \frac{26}{3}c. \quad \text{Отсюда}$$

$$\frac{26}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{26}.$$

2. Функцию распределения $F(x)$ выражаем из плотности

распределения $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$; для нашего случая

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx =$$

$$= \int_0^x \frac{3}{26} (x+1)^2 dx = \left. \frac{(x+1)^3}{26} \right|_0^x = \frac{(x+1)^3}{26} - \frac{1}{26}; \text{ таким образом,}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{(x+1)^3}{26} - \frac{1}{26} & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

3. Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ строим в одной системе координат (см. рисунок 2.11).

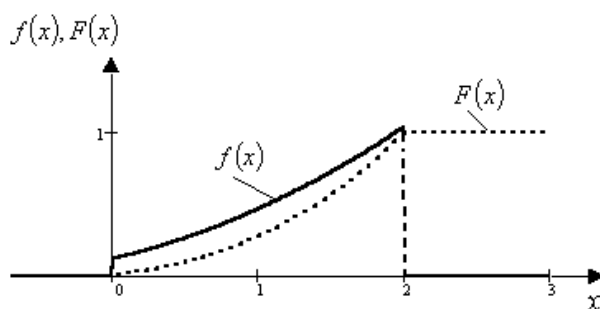


Рисунок 2.11 – К примеру 11

4. Математическое ожидание вычисляем по формуле (2.6):

$$M(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x)dx; \text{ для нашего случая}$$

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{26} (x+1)^2 dx = \frac{17}{13}.$$

Дисперсию случайной величины X вычисляем по формуле (2.18)

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X), \text{ где } M^2(X) = \left(\frac{17}{13}\right)^2 = \frac{289}{169};$$

величину $M(X^2)$ определяем отдельно:

$$M(X^2) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{3}{26} (x+1)^2 dx = \frac{128}{65};$$

$$\text{теперь } D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{128}{65} - \frac{289}{169} = \frac{219}{845}.$$

5. Вероятность того, что случайная величина X принимает значение из интервала $(\alpha; \beta)$, определяем по формуле (2.2):

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha);$$

$$\text{для нашего случая } P(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = 1 - \frac{7}{26} = \frac{19}{26}.$$

6. Для определения коэффициента асимметрии вычисляем третий

центральный момент $\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^3 f(x) dx$. В нашем случае

$$\mu_3 = \int_0^2 \left(x - \frac{17}{13}\right)^3 \cdot \frac{3}{26} \cdot (x+1)^2 dx = -\frac{184}{2197}$$

$$\text{Коэффициент асимметрии } S = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{\mu_3}{(\sqrt{D(X)})^3} = -0,635.$$

Определяем центральный момент четвертого порядка

$$\mu_4 = \int_0^2 \left(x - \frac{17}{13}\right)^4 \cdot \frac{3}{26} \cdot (x+1)^2 dx = \frac{32883}{199927}.$$

Затем вычисляем эксцесс

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{\mu_4}{(D(X))^2} - 3 = -0,551.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины X ? Что указывает (характеризует) математическое ожидание?

2. Как вычисляется математическое ожидание дискретной и непрерывной случайной величины?
3. Какая механическая интерпретация математического ожидания дискретной и непрерывной случайной величины?
4. Как интерпретируется с вероятностной точки зрения постоянная величина C ? Чему равно математическое ожидание C ?
5. Поясните на простом примере, что такое сумма и произведение двух дискретных независимых случайных величин. Как составить закон распределения вероятностей суммы двух независимых случайных величин, если известны законы распределения слагаемых? Как составить закон распределения вероятностей произведения двух независимых случайных величин, если известны законы распределения сомножителей?
6. Перечислите основные свойства математического ожидания.
7. Что называют модой (M_0) дискретной случайной величины X ?
8. Что называют модой (M_0) непрерывной случайной величины X ?
9. Какое распределение вероятностей называется антимодальным?
10. Какое распределение вероятностей называется одно модальным, двумодальным?
11. Что называется медианой (M_e) случайной величины?
12. Чему равно $F(M_e)$?
13. При каком значении x выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_x^{\infty} f(t)dt ?$$
14. Что называют дисперсией случайной величины, что характеризует дисперсия?
15. Как можно вычислить дисперсию дискретной и непрерывной случайной величины?
16. Перечислите основные свойства дисперсии.
17. Что называется средним квадратическим отклонением случайной величины от её математического ожидания?
18. Как вычисляются математическое ожидание и дисперсия биномиального распределения?
19. Какова размерность а) функции распределения; б) плотности распределения; в) математического ожидания; г) дисперсии; д) среднего квадратического отклонения?
20. Что служит характеристикой асимметрии кривой распределения?
21. Что характеризует и как вычисляется эксцесс?

Задачи

1. Задан закон распределения дискретной случайной величины X . Построить многоугольник распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Вариант 1а

Возможные значения x_i случайной величины X	1	2	3	4	5
Вероятности p_i значений случайной величины X	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

Вариант 1б

Возможные значения x_i случайной величины X	1	3	5	7	9
Вероятности p_i значений случайной величины X	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4

Вариант 1в

Возможные значения x_i случайной величины X	2	4	6	8	10
Вероятности p_i значений случайной величины X	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2

- Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , заданной в задаче 1 §2.1.
- Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , заданной в задаче 3 §2.1.
- Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , заданной в задаче 5 §2.1.
- Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , подчиненной биномиальному закону с параметрами а) $n = 10$, $p = 0,9$; б) $n = 20$, $p = 0,8$.
- По заданному вероятностному многоугольнику на рисунке вычислить $M(-4X+1)$; $D(-4X+1)$.

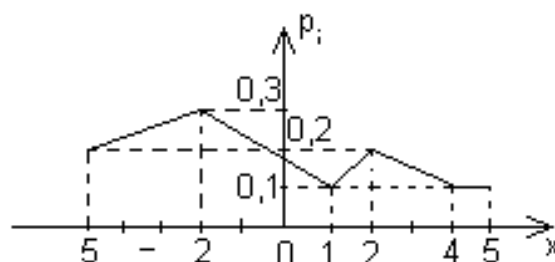


Рисунок 2.12 – к задаче 6

7. Задана функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0; \\ 0,5(1 - \cos x) & \text{if } 0 < x \leq \pi; \\ 1 & \text{if } x > \pi. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, Mo , Me .

8. Плотность распределения вероятностей изображена на рисунке 2.13.

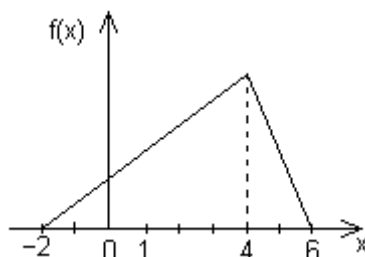


Рисунок 2.13 – К задаче 8

Найти $M(X)$, $\sigma(X)$, Mo , Me .

9. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Требуется:

- 1) определить коэффициент C ;
- 2) найти функцию распределения $F(x)$;
- 3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;
- 4) вычислить математическое ожидание и дисперсию;
- 5) найти вероятность того, что случайная величина X принимает значения из интервала (α, β) .

$$9a. f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{\pi}{2}; \\ c \cdot \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{6}; \\ 0 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$9б. f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ c \cdot x & \text{при } 0 \leq x \leq 6; \alpha = 1, \beta = 3; \\ 0 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

$$9в. f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ c \cdot \sin x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi; \alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{3}; \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

$$10. \text{ Задано } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 - e^{-x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Найти As ; Es .

ОТВЕТЫ

$$1a. M(X) = 3,6; D(X) = 1,64; \sigma(X) = 1,281.$$

$$1б. M(X) = 5,8; D(X) = 9,76; \sigma(X) = 3,124.$$

$$1в. M(X) = 5,2; D(X) = 8,96; \sigma(X) = 2,993.$$

$$2. M(X) = 7; D(X) = 5,833; \sigma(X) = 2,415.$$

$$3. M(X) = 2,4; D(X) = 0,96; \sigma(X) = 0,9797.$$

$$4. M(X) = 2,2; D(X) = 0,56; \sigma(X) = 0,7483.$$

$$5a. M(X) = 9; D(X) = 0,9; \sigma(X) = 0,949.$$

$$5б. M(X) = 16; D(X) = 3,2; \sigma(X) = 1,789.$$

$$6. 1,8; 165,76. \quad 7. \pi/2; (\pi^2 - 4)/4; \pi/2; \pi/2. \quad 8. 8/3; \sqrt{26}/3; \sqrt{24} - 2; 4.$$

$$9a. c = \frac{1}{2}, M(X) = 0, D(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2, P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{4}.$$

$$9б. c = \frac{1}{18}, M(X) = 4, D(X) = 2, P(\alpha < x < \beta) = \frac{2}{9}.$$

$$9в. c = \frac{1}{2}, M(X) = \frac{\pi}{2}, D(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2, P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{4}.$$

$$10. 2; 6.$$

2.6 Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин

Многие типы реально существующих случайных величин изучены, т.е. теоретически установлен и экспериментально проверен их закон распределения. При изучении новой случайной величины можно проверить, не подчиняется ли случайная величина какому либо изученному закону.

В данном параграфе кратко рассмотрены некоторые законы распределения. Наиболее важному – нормальному распределению посвящен отдельный параграф.

2.6.1 Равномерный закон распределения случайной величины

Широкое применение находят случайные величины с *равномерной плотностью распределения*. В этом случае непрерывная случайная величина принимает с одинаковой вероятностью значения из определённого интервала $[a; b]$. Функция плотности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x < a \text{ } x > b. \end{cases}$$

График плотности равномерного распределения – отрезок прямой, параллельный оси Ox . Вероятность попадания случайной величины на отрезок $[c; d]$, принадлежащий отрезку $[a; b]$, определяется по формуле

$$P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a}.$$

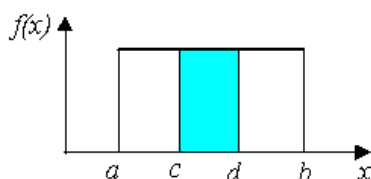


Рисунок 2.14 – Закон равномерной плотности

Интегральная функция $F(x)$ равномерного закона распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание – середина отрезка $[a; b]$:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}.$$

Дисперсию вычисляем по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3};$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

К случайным величинам, имеющим равномерное распределение, относятся: время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом; ошибка округления числа до целого (она равномерно распределена на отрезке от -0,5 до 0,5)

2.6.2 Показательное (экспоненциальное) распределение

Показательным называется распределение непрерывной случайной величины X , плотность вероятности которой имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Здесь $\lambda > 0$ - параметр распределения.

Интегральная функция распределения показательного закона

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}. \text{ Итак,}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Графики плотности и функции распределения в зависимости от величины параметра распределения показаны на рисунке 2.15.

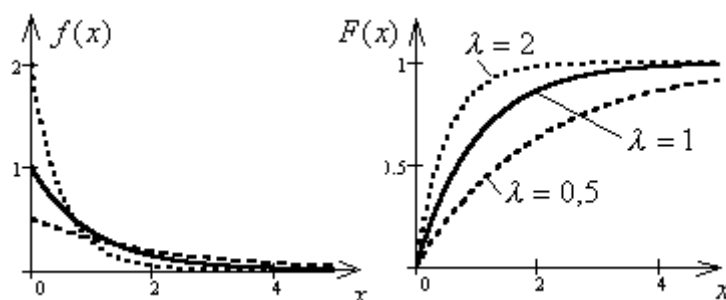


Рисунок 2.15 – Показательное распределение

Математическое ожидание $M(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$.

Дисперсия $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda}$.

Характерная черта показательного распределения – равенство

$$M(X) = \sigma(X).$$

Показательное распределение широко применяется в теории надежности, одним из основных понятий которой является функция надёжности.

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение.

Показательное распределение используется в теории массового обслуживания, в физике, в теории надежности. Оно используется для описания распределения случайной величины вида: длительность работы прибора до первого отказа, длительность времени обслуживания прибора в системе массового обслуживания и т.д.

2.6.3 Распределение Релея

Это распределение применяется в радиотехнике, электротехнике и др.

Распределением Релея непрерывной случайной величины X называют распределение, плотность вероятности которого имеет вид

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \text{ при } x \geq 0,$$

где a - параметр распределения.

Интегральная функция распределения $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. Графики плотности и функции распределения в зависимости от величины параметра распределения показаны на рисунке 2.16.

Математическое ожидание и дисперсия выражаются через параметр a и имеют вид:

$$M(X) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad D(X) = 2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

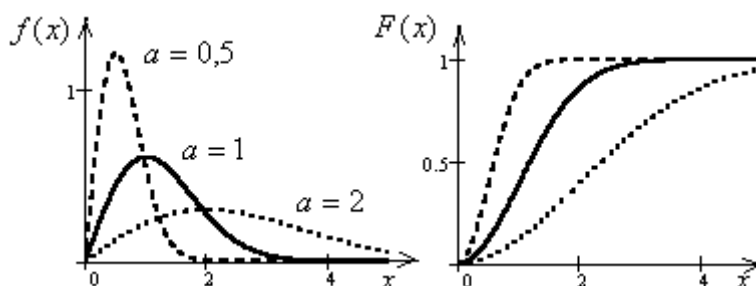


Рисунок 2.16 – Распределение Релея

Контрольные вопросы

1. Какой закон распределения называется равномерным, как выглядит график плотности распределения и функции распределения?
2. Приведите пример случайной величины с равномерной плотностью распределения.
3. Какой закон распределения называется показательным, где используются случайные величины с показательным распределением?
4. Как определяется и где применяется распределение Релея?

Задачи

1. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.
2. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.
3. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с.
4. Найти математическое ожидание случайной величины X , распределенной равномерно в интервале (2, 8).

5. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного при $x \geq 0$: а) плотностью $f(x) = 5e^{-5x}$; б) функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$.

6. Студент помнит, что плотность показательного распределения имеет вид $f(x) = 0$ при $x < 0$, $f(x) = Ce^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$; однако он забыл чему равна постоянная C . Требуется найти C .

Ответы: 1) а) $P(0 < X < 0,04) + P(0,16 < X < 0,2) = 0,4$;
 б) $P(0,05 < X < 0,15) = 0,5$; 2) $P(2 < X < 5) = 0,6$;
 3) $P(0 < X < 1/3) + P(2/3 < X < 1) = 2/3$; 4) $M(X) = 5$;
 5) а) $M(X) = 0,2$; б) $M(X) = 10$; 6) $C = \lambda$.

2.7 Нормальный закон распределения (распределение Гаусса)

Если случайная величина X - результат суммирования множества случайных величин с произвольными законами распределения, причем каждая из них играет примерно одинаковую роль в сумме, то закон распределения случайной величины X близок к закону распределения, называемому *нормальным*, или *распределением Гаусса*.

При нормальном законе плотность распределения задаётся формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.19)$$

Формула (2.19) замечательно во многих смыслах. Во-первых, формула содержит две исключительно важных константы – число π (пи) и число Непера e . Во-вторых, параметр a – математическое ожидание случайной величины, параметр σ – среднее квадратичное отклонение. В-третьих, при любых значениях параметров a, σ площадь под кривой нормального распределения равна единице,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

График функции распределения называется *нормальной кривой*.

Отметим следующее:

- 1) функция определена на всей оси Ox ;
- 2) при всех x значения функции положительные, т.е. $y > 0$;

3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$, а это значит, что ось Ox является горизонтальной асимптотой;

4) в точке $x = a$ функция имеет максимум, который равен

$$y_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

График функции симметричен относительно прямой $x = a$.

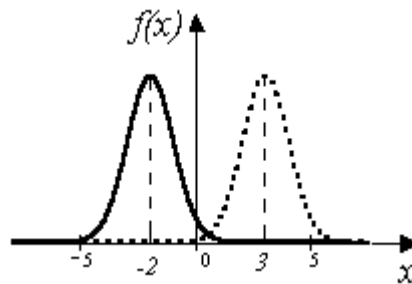


Рисунок 2.17 - Положение кривой на оси

При одинаковом значении параметра σ параметр a (математическое ожидание) определяет положение нормальной кривой на числовой оси. На рисунке 2.17 показаны две нормальные кривые, для которых $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ и $a_1 = -2$, $a_2 = 3$.

При одинаковом значении параметра a величина параметра σ (среднее квадратичное отклонение) определяет форму кривой.

На рисунке 2.18 показаны кривые, для которых $a_1 = a_2 = 2$ и $\sigma_1 = 0,5$, $\sigma_2 = 1$.

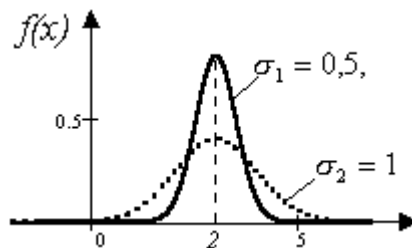


Рисунок 2.18 – Форма нормальной кривой

Если параметры a и $\sigma > 0$ имеют произвольные значения, нормальное распределение называется *общим*. Нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется *нормированным*. Кривая нормированного распределения симметрична относительно оси Oy .

Таблица плотности нормированного распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ приведена в приложении А.}$$

Функция нормированного распределения

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx.$$

Интеграл от плотности нормированного распределения на отрезке

$$[0; x] \text{ называется функцией Лапласа: } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Функция Лапласа равна вероятности попадания нормированной случайной величины на отрезок $[0; x]$. Функция Лапласа – нечетная функция. Функция Лапласа связана с функцией распределения $F_0(x)$ нормированного распределения формулой $F_0(x) = 0,5 + \Phi(x)$.

Вероятность попадания любой случайной величины в интервал $(\alpha; \beta)$ равна приращению её функции распределения на этом интервале,

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Если случайная величина подчинена нормальному закону, часто вместо её функции распределения применяется функция Лапласа.

$$P(\alpha < X < \beta) = F_0(\beta) - F_0(\alpha) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Если случайная величина задана нормальным распределением, то вероятность попадания нормальной случайной величины в интервал $(\alpha; \beta)$ определяется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \quad (2.20)$$

В настоящем пособии функция Лапласа задана таблицей в Приложении Б.

Правило трёх сигма. Часто встречается задача вычисления вероятности попадания случайной величины на участок, симметричный относительно центра рассеивания, т.е. относительно математического ожидания $m_x = a$.

$$P(a - l < X < a + l) = \Phi\left(\frac{a + l - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - l - a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right), \text{ или,}$$

$$P(|X - a| < l) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right). \quad (2.21)$$

Так, если $l = \sigma$, то $P(|X - a| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0,6826$. Если $l = 2\sigma$, то $P(|X - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0,9544$.

Если $l = 3\sigma$, то $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973$.

Последняя число означает, что 99,73% всех значений случайной величины, подчиненной нормальному закону, укладываются на участке $m_x \pm 3\sigma$. Это позволяет, зная математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение (σ - сигма), указать интервал её практически возможных значений. Такой способ оценки возможных значений случайной величины называется «правилом трёх сигм».

На рисунке 2.19 заштрихованная область – площадь под нормальной кривой на отрезке $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$

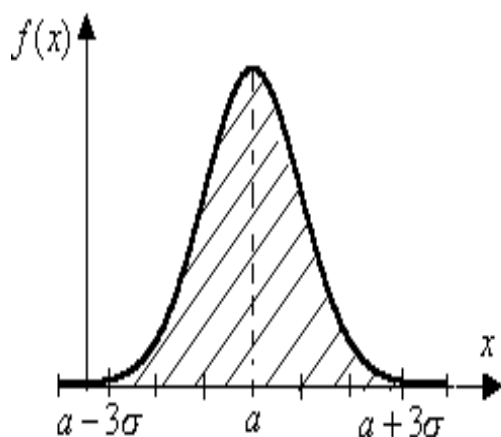


Рисунок 2.19 – Иллюстрация правила трёх сигм

Нормальному закону подчиняются ошибки измерений, величины износа деталей в механизмах, рост человека, ошибки стрельбы, величина шума в радиоприёмном устройстве, колебания курса акций и т.д.

Пример 12. Задана нормально распределенная случайная величина X с параметрами a (математическое ожидание) и σ (среднее квадратичное отклонение). Требуется:

- написать плотность распределения случайной величины X и построить её график;
- найти вероятность того, что X примет значение из интервала (x_1, x_2) ;

в) найти интервал, симметричный относительно α , вероятность попадания в который данной случайной величины X равна γ .

$$a = 9, \quad \sigma = 3, \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 13, \quad \gamma = 0,95.$$

Решение

Плотность распределения случайной величины X определяется формулой (2.19) при $a = 9$, $\sigma = 3$:

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-9)^2}{18}};$$

кривая нормального распределения (график плотности распределения) построена на рисунке 2.20 (построение выполнено в пакете Mathcad).

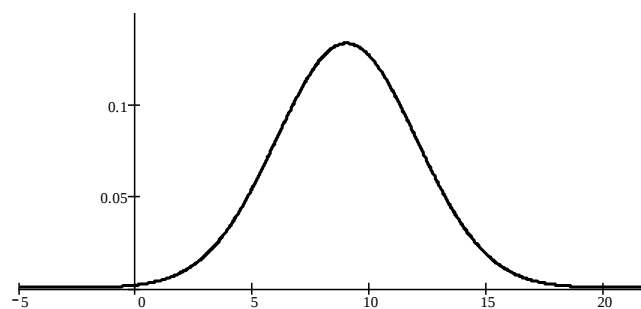


Рисунок 31 – Кривая нормального распределения

Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $(7;13)$ находим по формуле (2.20).

$$\begin{aligned} P(7 < x < 13) &= \Phi\left(\frac{13-9}{3}\right) - \Phi\left(\frac{7-9}{3}\right) = \Phi(1,33) - \Phi(-0,66) = \\ &= \Phi(1,33) + \Phi(0,66) = 0,40824 + 0,24537 = 0,65361. \end{aligned}$$

Значения функции Лапласа $\Phi(1,33)$ и $\Phi(0,66)$ можно определить по таблице приложения Б.

Интервал, симметричный относительно математического ожидания a , вероятность попадания в который данной случайной величины X равна γ определяем по формуле (2.21) $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Здесь известна вероятность $P(|X - a| < \delta) = \gamma$, искомый интервал определяется величиной δ . Из формулы следует, что

$$2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \gamma, \Rightarrow \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \frac{\gamma}{2}. \quad \text{Зная } \frac{\gamma}{2}, \text{ по таблице функции}$$

Лапласа (Приложение Б) определяем $x = \frac{\delta}{\sigma}$, затем δ . Искомый интервал: $(a - \delta; a + \delta)$.

Для нашего примера $\gamma = 0,95$, $\sigma = 3$, $a = 9$. Тогда $\Phi\left(\frac{\delta}{3}\right) = 0,475$; в таблице приложения Б этому значению функции Лапласа соответствует значение аргумента $x = \frac{\delta}{3} = 1,96$, $\delta = 5,88$; искомый интервал $(3,12; 14,88)$.

Контрольные вопросы

1. Какая случайная величина называется нормально распределенной? Какими двумя параметрами определяется нормально распределенная случайная величина? Что означают два этих параметра?
2. Как влияют параметры a и σ на положение нормальной кривой относительно оси Ox и на форму кривой?
3. Какое нормальное распределение называется нормированным? Как расположена кривая нормированного распределения относительно осей координат?
4. Дайте определение функции Лапласа. Объясните, как с помощью таблицы значений функции Лапласа найти вероятность того, что нормально распределенная случайная величина с параметрами a и σ примет значение из данного интервала $(\alpha; \beta)$?
5. В чем заключается «правило трёх сигма»?

Задачи

1. Задана нормально распределенная случайная величина X с параметрами α (математическое ожидание) и σ (среднее квадратичное отклонение). Требуется:

- а) написать плотность распределения случайной величины X и построить её график;
- б) найти вероятность того, что X примет значение из интервала (x_1, x_2) ;
- в) найти интервал, симметричный относительно α , вероятность попадания в который данной случайной величины X равна γ .

$$1.1 \quad a = 10; \quad \sigma = 1; \quad x_1 = 9; \quad x_2 = 12; \quad \gamma = 0,9;$$

1.2 $a = 11$; $\sigma = 2$; $x_1 = 10$; $x_2 = 13$; $\gamma = 0,99$;

1.3 $a = 12$; $\sigma = 3$; $x_1 = 6$; $x_2 = 15$; $\gamma = 0,95$;

1.4 $a = 13$; $\sigma = 4$; $x_1 = 10$; $x_2 = 17$; $\gamma = 0,999$.

2. Математическое ожидание нормально распределенной величины X равно $a = 3$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$. Написать плотность вероятности X .

3. Нормально распределенная величина X задана плотностью

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/50}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию X .

4. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15, 25).

5. Автомат штампует детали. Контролируемая длина детали X , которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактически длина изготавливаемых деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм.

6. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

7. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

8. Бомбардировщик, пролетевший вдоль моста, длина которого 30 м и ширина 8 м, сбросил бомбы. Случайные величины и (расстояния от вертикальной и горизонтальной осей симметрии моста до места падения бомбы) независимы и распределены нормально со средними квадратическими отклонениями, соответственно равными 5 и 4 м, и математическими ожиданиями, равными нулю. Найти: а) вероятность попадания в мост одной сброшенной бомбы; б) вероятность разрушения моста, если сброшены две бомбы, причем известно, что для разрушения моста достаточно одного попадания.

Ответы: 2) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/8}$; 3) $M(X) = 1$; $D(X) = 25$;

4) $P(15 < X < 25) = 0,6826$; 5) а) $P(55 < X < 68) = 0,0823$;

б) $P(32 < X < 40) = 0,0027$; 6) $P \approx 0,41$; 7) примерно 95%;

8) а) $P(|X| < 15) \cdot P(|Y| < 4) = 2\Phi(2,5) \cdot 2\Phi(1) = 0,6741$; б)

$$P = 1 - (1 - 0,6741)^2 = 0,8938.$$

2.8 Закон больших чисел и центральная предельная теорема

При некоторых условиях поведение суммы большого числа случайных величин утрачивает случайный характер и становится закономерным. Эти условия указываются в теоремах, которые носят общее название закона больших чисел.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε , не меньше, чем $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Если ε достаточно мало, неравенство позволяет оценить вероятность того, что X примет значения, близкие к своему математическому ожиданию. Неравенство справедливо как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Пример 13. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 0,2$, если $D(X) = 0,004$.

Решение

По условию задачи $\varepsilon = 0,2$. Подставим в неравенство Чебышева:

$$P(|X - M(X)| < 0,2) \geq 1 - \frac{0,004}{0,2^2} = 1 - 0,1 = 0,9.$$

Ответ: $P(|X - M(X)| < 0,2) \geq 0,9$.

Примечание – так как события $|X - M(X)| < \varepsilon$ и $|X - M(X)| \geq \varepsilon$ – противоположные, неравенство Чебышева имеет другую форму:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (*)$$

Основной теоремой закона больших чисел является теорема Чебышева.

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ - попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их не превышают некоторого постоянного числа C , то, как бы мало ни было положительное число ε , вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Сущность теоремы Чебышева заключается в том, что среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин утрачивает характер случайной величины – оно принимает значение, близкое к величине $(M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n))/n$.

Теорема Чебышева имеет большое значение для практики. На теореме основан применяемый в статистике выборочный метод, суть которого состоит в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке судят о всей совокупности исследуемых объектов. Например, о качестве зерна в многотонном грузовике у элеватора судят по небольшой его пробе. Ведь если для пробы отобран килограмм зерна, то количество зерен в нем достаточно велико.

Другой формой закона больших чисел является теорема Бернулли.

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико, т.е. при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1.$$

Последнее равенство означает, что относительная частота m/n стремится к вероятности p , но не в смысле предела $\lim_{n \rightarrow \infty} (m/n) = p$,

так как неравенство $|m/n - p| < \varepsilon$ может при отдельных значениях n нарушаться. Теорема Бернулли утверждает, что относительная частота при $n \rightarrow \infty$ стремится по вероятности к p . В теоремах закона больших чисел не учитываются законы распределения случайных величин. Предельные законы распределения составляют предмет центральной предельной теоремы. Все формы центральной

предельной теоремы посвящены установлению условий, при которых возникает нормальный закон распределения.

Теорема. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ - независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 , то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы

$$Y_n = \sum_{k=1}^n X_k \text{ неограниченно приближается к нормальному.}$$

В общем случае, слагаемые случайные величины распределены неодинаково.

Практически центральной предельной теоремой можно пользоваться и тогда, когда речь идет о сумме сравнительно небольшого числа случайных величин. Когда число слагаемых порядка десяти, закон распределения суммы уже может быть заменен нормальным.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте неравенство Чебышева. Что позволяет оценить неравенство?
2. Сформулируйте теорему Чебышева. В чем суть теоремы?
3. Сформулируйте теорему Бернулли. Что означает выражение «стремиться по вероятности»?
4. В чем суть центральной предельной теоремы?

Задачи

1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что любая случайная величина отклонится от своего математического ожидания менее чем на три средних квадратичных отклонения этой величины.

2. Используя неравенство Чебышева в форме (*), оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не менее чем на два средних квадратических отклонения.

3. Какое значение должна иметь величина ε в неравенстве Чебышева, чтобы $P(|X - a| < \varepsilon) \approx 0,99$, если известно, что $D(X) = 4$.

4. С какой вероятностью среднее арифметическое измерений определяемой величины соответствует истинному значению этой величины, если было совершено 500 замеров с точностью 0,1 и при этом дисперсии случайных величин результатов измерений не превышают 0,3.

5. Сколько необходимо произвести измерений диаметра втулки, чтобы среднее арифметическое этих измерений отличалось от

истинного размера диаметра втулки не более 0,05 с надёжностью 90%, если дисперсии случайных величин (результатов измерений) не превышают 0,2.

6. Случайная величина $\bar{X}$ - среднее арифметическое 10000 независимых случайных величин, имеющих один и тот же закон распределения, и среднее квадратическое отклонение каждой из них равно 2. Какое максимальное отклонение величины $\bar{X}$ от её математического ожидания можно ожидать с вероятностью 0,9544?

Ответы: 3) $\varepsilon = 20$; 4) 0,94; 5) $n = 800$; 6) 0,04.

Глава 3. Система двух случайных величин

3.1 Система случайных величин

Если результат опыта описывается не одной, а несколькими случайными величинами, они образуют систему случайных величин.

Например, погода в каждый момент времени характеризуется такими случайными величинами, как температура (обозначим X), влажность (обозначим Y), скорость ветра (обозначим Z). Три этих величины образуют систему непрерывных случайных величин, которую обозначим (X, Y, Z) . Систему случайных величин (X, Y, Z) можно также рассматривать как одну трёхмерную случайную величину, геометрический образ которой – случайная точка в трёхмерном пространстве.

Если результат опыта описывается двумя случайными величинами X и Y , то имеем систему двух случайных величин (X, Y) , геометрический образ которой – случайная точка на плоскости. Пусть случайная величина X - рост человека, случайная величина Y - вес человека. Для каждого конкретного человека двумерная случайная величина (X, Y) принимает своё значение и фиксируется двумя числами.

Свойства двух, трех или многомерной случайной величины не исчерпываются суммой свойств отдельных величин, но включают также взаимные зависимости случайных величин между собой.

Составляющие многомерной случайной величины могут быть дискретными или непрерывными. Также и многомерная случайная величина – дискретная или непрерывная.

Контрольные вопросы

1. Приведите пример, когда результат испытания описывается системой двух или трех случайных величин.
2. Каков геометрический образ системы двух и трёх случайных величин?

**3.2 Закон распределения вероятностей дискретной
двумерной случайной величины**

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) называют совокупность всех возможных значений этой величины, то есть пар чисел (x_i, y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$. Закон распределения задаётся в виде таблицы с двойным входом (см. таблицу 3.1).

Первая строка таблицы содержит все возможные значения составляющей X , первый столбец содержит все возможные значения составляющей Y . В клетке, стоящей на пересечении «столбца x_i » и «строки y_j » указана вероятность $p(x_i, y_j)$ того, что двумерная случайная величина примет значение (x_i, y_j) .

События $(X = x_i, Y = y_j)$, где $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$, образуют полную группу, то есть при каждом опыте произойдет одно из этих событий. Поэтому сумма вероятностей в клетках таблицы равна единице.

Таблица 3.1 – Закон распределения дискретной двумерной величины

Y	X				
	x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$\dots$	$p(x_i, y_1)$	$\dots$	$p(x_n, y_1)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_j	$p(x_1, y_j)$	$\dots$	$p(x_i, y_j)$	$\dots$	$p(x_n, y_j)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	$p(x_1, y_m)$	$\dots$	$p(x_i, y_m)$	$\dots$	$p(x_n, y_m)$

По закону таблицы 3.1 можно найти закон распределения каждой составляющей случайной величины.

Например, события $(X = x_1, Y = y_1)$, $(X = x_2, Y = y_1)$, ..., $(X = x_i, Y = y_1)$, ..., $(X = x_n, Y = y_1)$ несовместны, поэтому

вероятность $P(y_1)$ того, что Y примет значение y_1 , вычисляется по теореме сложения:

$$P(y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) + \dots + p(x_i, y_1) + \dots + p(x_n, y_1).$$

Складывая вероятности одной строки, получим вероятность одного значения случайной величины Y . Если же складывать вероятности одного столбца, получим вероятность одного значения X .

Пример 1. Задан закон распределения дискретной двумерной величины таблицей 3.2. Определить законы распределения случайных величин X и Y .

Таблица 3.2 – Распределение (X, Y)

Y	X	
	x_1	x_2
y_1	0,1	0,15
y_2	0,25	0,2
y_3	0,2	0,1

Решение

Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений X : $P(x_1) = 0,1 + 0,25 + 0,2 = 0,55$; $P(x_2) = 0,45$.

Таблица 3.3 - Закон распределения случайной величины X

X	x_1	x_2
$P(x_i)$	0,55	0,45

Контроль вычислений: $0,55 + 0,45 = 1$.

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений Y : $P(y_1) = 0,1 + 0,15 = 0,25$; $P(y_2) = 0,25 + 0,2 = 0,45$; $P(y_3) = 0,2 + 0,1 = 0,3$.

Таблица 3.4 - Закон распределения случайной величины Y

Y	y_1	y_2	y_3
$P(y_i)$	0,25	0,45	0,3

Контроль вычислений: $0,25 + 0,45 + 0,3 = 1$.

Контрольные вопросы

1. Что называют законом распределения дискретной двумерной случайной величины?

2. Опишите таблицу, которая задаёт закон распределения дискретной двумерной случайной величины.

Задача.

Задан закон распределения дискретной двумерной величины (X, Y) .

Y	X	
	x_1	x_2
y_1	0,2	0,15
y_2	0,35	0,3

Определить законы распределения случайных величин X и Y .

3.3 Функция распределения двумерной случайной величины

Как отмечалось ранее, функция распределения одномерной случайной величины – универсальный закон распределения вероятностей как дискретной, так и непрерывной случайной величины. То же справедливо для двумерной случайной величины.

Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называют функцию $F(x, y)$, определяющую для каждой пары чисел (x, y) вероятность того, что X примет значение меньшее x , и при этом Y примет значение, меньшее y : $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$.

Геометрически это можно истолковать так: $F(x, y)$ - вероятность того, что случайная точка (X, Y) попадает в бесконечный квадрант с вершиной (x, y) , указанный на рисунке 3.1.

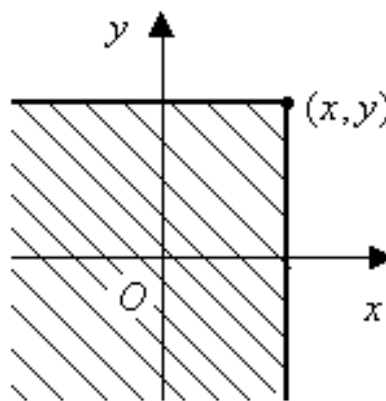


Рисунок 3.1 – Геометрическое истолкование для функции распределения $F(x, y)$

Чем больше заштрихованная область, тем больше значение функции распределения.

Функция распределения $F(x, y)$ обладает свойствами, вытекающими из её определения.

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0; 1]$, то есть $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
2. Функция $F(x, y)$ - неубывающая по каждому из аргументов; действительно, если точка (x, y) на рисунке 3.1 движется параллельно оси Ox слева направо, то заштрихованная область не уменьшается. То же и при движении точки (x, y) вдоль оси Oy снизу вверх.
3. Имеют место предельные соотношения: $F(-\infty, y) = 0$, $F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$ (площадь заштрихованного квадранта равна нулю на рисунке 3.1); $F(+\infty, +\infty) = 1$ (попадание случайной точки на плоскость xOy - достоверное событие).
4. При $y = +\infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей X :

$$F(x, +\infty) = F_1(x); \text{ при } x = +\infty \quad F(+\infty, y) = F_2(y).$$

С помощью функции распределения можно определить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в заданный прямоугольник. Пусть требуется определить вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $ABCD$, координаты вершин которого показаны на рисунке 3.2.

Искомая вероятность определяется формулой:

$$P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = (F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)) - (F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)).$$

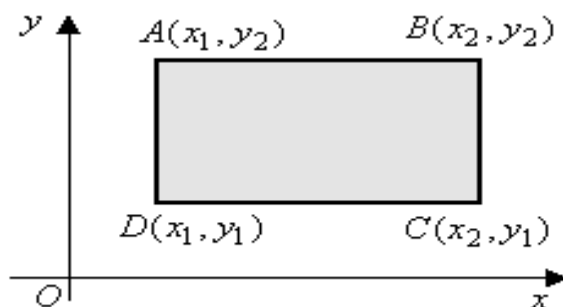


Рисунок 3.2 – Вероятность попадания в квадрат $ABCD$

Контрольные вопросы

1. Что называется функцией распределения двумерной случайной величины, как её истолковать геометрически?
2. Какими свойствами обладает функция распределения двумерной случайной величины?
3. Как определить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в заданный прямоугольник?

3.4 Плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины, её применение и свойства

Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x, y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X, Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Геометрически эту функцию можно истолковывать как уравнение поверхности, которую называют *поверхностью распределения*.

Если известна плотность совместного распределения $f(x, y)$, то можно найти функцию распределения $F(x, y)$ по формуле:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv,$$

что следует из определения плотности распределения.

Применение двумерной плотности распределения

Выше мы рассмотрели, как с помощью функции распределения можно определить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в заданный прямоугольник. Плотность распределения позволяет определить вероятность попадания случайной точки в произвольную область D на плоскости xOy . Указанная вероятность определяется двойным интегралом от плотности распределения по области D :

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Если известна плотность совместного распределения вероятностей системы двух случайных величин, то можно определить плотности распределения каждой из составляющих по формулам:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Свойства двумерной плотности распределения

- 1) Двумерная плотность вероятности величина неотрицательная: $f(x, y) \geq 0$. Это свойство следует из того, что функция распределения $F(x, y)$ - неубывающая функция своих аргументов.
- 2) Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

Пределы интегрирования показывают, что область интегрирования – вся плоскость xOy . Попадание случайной точки на плоскость – событие достоверное, его вероятность равна единице.

Контрольные вопросы

1. Что называется плотностью распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины?
2. Для чего применяется и какими свойствами обладает двумерная плотность распределения?

3.5 Условные законы распределения составляющих системы дискретных и непрерывных случайных величин

В параграфе 1.5 рассмотрены вероятности произведения зависимых и не зависимых событий. Случайные величины также могут быть зависимыми или не зависимыми друг от друга. Для зависимых событий

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A),$$

откуда, условная вероятность события B , при условии, что событие A уже произошло, вычисляется так:

$$P(B|A) = P(AB) / P(A). \quad (*)$$

Для независимых событий $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Чтобы характеризовать зависимость между составляющими двумерной случайной величины, введено понятие условного распределения.

Пусть задана двумерная *дискретная случайная величина* (см. параграф 3.2, таблица 3.1). Если, к примеру, величина Y приняла значение $Y = y_1$, то величина X при этом принимает одно из своих

возможных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$. Обозначим условную вероятность того, что X примет значение x_i при условии, что $Y = y_1$ через $p(x_i|y_1)$. Эта вероятность, в общем случае, не равна безусловной вероятности $p(x_i)$.

Вообще, условные вероятности обозначаются $p(x_i|y_j)$.

Условным распределением составляющей X , при $Y = y_j$, называют совокупность условных вероятностей $p(x_1|y_j), p(x_2|y_j), \dots, p(x_n|y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y = y_j$ уже наступило. Аналогично определяется условное распределение составляющей Y .

Условный закон распределения X , в предположении, что событие $Y = y_j$ уже произошло, может быть найден по формуле, аналогичной формуле (*):

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (**)$$

Сумма вероятностей условного распределения равна единице, также как и безусловного.

Пример 2. В примере 1 из §3.2 по заданному таблицей 3.2 распределению (X, Y) вычислены распределения составляющих. Найдем условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая $Y = y_1$.

Решение

Искомый закон определяется совокупностью следующих условных вероятностей:

$$p(x_1|y_1), p(x_2|y_1).$$

Используем формулу (**), учитывая, что $p(y_1) = 0,25$.

$$p(x_1 / y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,1}{0,25} = 0,4$$

$$p(x_2 / y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,15}{0,25} = 0,6$$

Контроль вычислений: $0,4 + 0,6 = 1$.

Для сравнения, (см. пример 1 в §3.2), $P(x_1) = 0,55$; $P(x_2) = 0,45$.

Условный закон распределения *непрерывной случайной величины* можно задавать как функцией распределения, так и плотностью.

Для системы двух случайных величин (X, Y) справедлива теорема умножения законов распределения, аналогичная теореме умножения вероятностей событий.

Теорема. Плотность распределения системы двух случайных величин равна плотности распределения одной из величин, умноженной на условную плотность распределения другой величины, вычисленную при условии, что первая величина приняла заданное значение:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y|x),$$

$$\text{или } f(x, y) = f_2(y) \cdot f(x|y).$$

Из приведенных формул теоремы выразим условные законы распределения через безусловные законы распределения:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}, \quad f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}.$$

Формулы вычисления безусловных законов распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$ приведены в §3.4.

Контрольные вопросы

1. Что называется условным распределением одной составляющей двумерной дискретной случайной величины?
2. Сформулируйте теорему умножения законов распределения.
3. Как вычисляются безусловные и условные законы распределения составляющих непрерывной двумерной случайной величины?

Задача

Используя закон распределения дискретной двумерной случайной величины из задачи к параграфу 3.2, найти условные законы распределения составляющих.

3.6 Зависимые и независимые случайные величины

Составляющие двумерной случайной величины (X, Y) могут более или менее сильно зависеть друг от друга. Но эта зависимость не является функциональной, то есть, если известно, какое значение приняла одна случайная величина, то нельзя точно указать, какое значение при этом примет другая случайная величина. Чаще всего, можно лишь проследить тенденцию изменения одной величины при

изменении другой случайной величины. Возможно, что случайные величины вообще не зависят друг от друга.

Случайные величины X и Y называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая случайная величина. В противном случае величины X и Y называются зависимыми.

Для независимых дискретных случайных величин

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Для независимых непрерывных случайных величин теорема умножения законов распределения принимает вид:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y),$$

то есть плотность распределения системы независимых случайных величин равна произведению плотностей распределения отдельных величин, входящих в систему.

Если закон распределения системы известен, и если плотность распределения $f(x, y)$ может быть записана произведением двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента, то можно утверждать, что величины X и Y - независимые.

Таким образом, условие $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ - необходимое и достаточное для независимости случайных величин X и Y .

Контрольные вопросы

1. В каких случаях случайные величины X и Y называются независимыми, а в каких называются зависимыми?
2. Запишите необходимое и достаточное условие для независимости случайных величин X и Y .

3.7 Числовые характеристики системы двух случайных величин

Также как для одной случайной величины, для системы двух случайных величин важнейшими числовыми характеристиками являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение каждой составляющей X и Y системы случайных величин (X, Y) .

Математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$ в совокупности представляют собой характеристику положения системы.

Геометрически это координаты точки на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание точки (X, Y) .

Математические ожидания вычисляются по формулам:

- для дискретных случайных величин

$$M(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p(x_i, y_j), \quad M(Y) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y_j p(x_i, y_j);$$

- для непрерывных случайных величин

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy.$$

Дисперсии случайных величин $D(X)$ и $D(Y)$ характеризуют степень рассеивания значений двумерной случайной величины в направлении осей Ox и Oy . Дисперсия составляющих случайных величин вычисляется по формулам:

- для дискретных случайных величин

$$D(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)^2 p(x_i, y_j),$$

$$D(Y) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (y_j - m_y)^2 p(x_i, y_j);$$

- для непрерывных случайных величин

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x, y) dx dy,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 f(x, y) dx dy.$$

В приведенных формулах $m_x = M(X)$, $m_y = M(Y)$.

Средние квадратичные отклонения случайных величин $\sigma_x = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_y = \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$.

Для системы случайных величин (X, Y) особую роль имеет математическое ожидание произведения центрированных случайных величин, входящих в систему, называемое **корреляционным моментом** случайных величин X и Y . Корреляционный момент обозначается

$$K_{xy} = M((X - m_x)(Y - m_y)).$$

Для дискретных случайных величин корреляционный момент вычисляется по формуле:

$$K_{xy} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_j - m_y) p(x_i, y_j)$$

Для непрерывных случайных величин корреляционный момент вычисляется по формуле:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy.$$

Корреляционный момент помимо того, что характеризует рассеивание случайной двумерной величины, *характеризует также связь между её составляющими X и Y* . Чтобы убедиться в последнем, вычислим корреляционный момент для независимых случайных величин X и Y , входящих в систему (X, Y) . Как было указано выше, для независимых непрерывных случайных величин теорема умножения законов распределения принимает вид $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Тогда,

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f_2(y) dy = (m_x - m_x)(m_y - m_y) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, *корреляционный момент независимых случайных величин равен нулю*. Следовательно, если $K_{xy} \neq 0$, то существует зависимость между случайными величинами X и Y .

Чтобы в характеристике связи между случайными величинами X и Y не присутствовала характеристика рассеивания, от корреляционного момента переходят к безразмерной характеристике $r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$.

Величина r_{xy} называется *коэффициентом корреляции* случайных величин X и Y . Для независимых случайных величин X и Y коэффициент корреляции равен нулю, $r_{xy} = 0$. Однако, это условие необходимое, но недостаточное для независимости случайных величин. Существуют зависимые случайные величины, для которых $r_{xy} = 0$ (см.[1], пример на стр. 171).

Если $r_{xy} \neq 0$, то случайные величины называют *коррелированными*. В этом случае коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между величинами X и Y .

В случае точной линейной зависимости случайная точка (X, Y) попадает при одном опыте в одно из указанных на рисунке 3.3 положений, заранее неизвестно, какое именно. Но все эти положения принадлежат прямой $Y = aX + b$. При $a > 0$ коэффициент $r_{xy} = 1$, при $a < 0$ коэффициент $r_{xy} = -1$ (см. рисунок 3.3).

В общем случае, коэффициент корреляции может иметь значения в пределах $-1 < r_{xy} < 1$. При положительной корреляции $r_{xy} > 0$ при возрастании одной случайной величины, другая случайная величина в среднем возрастает, см. рисунок 3.4а. При отрицательной корреляции возрастание одной случайной величины приводит к уменьшению в среднем другой случайной величины, см. рисунок 3.4б.

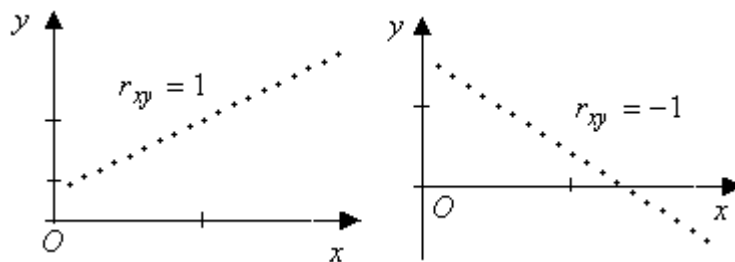


Рисунок 3.3 – Точная линейная зависимость между X и Y

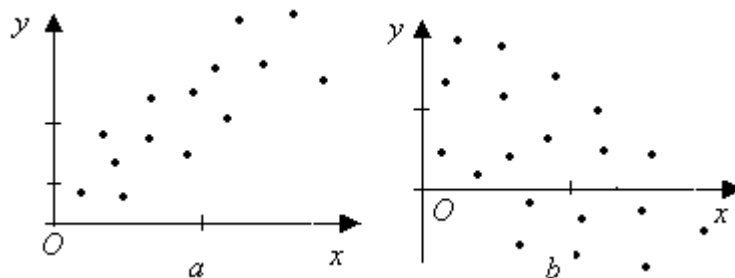


Рисунок 3.4 – Положительная (а) и отрицательная (б) корреляция

Контрольные вопросы

1. Что в системе двух случайных величин характеризуют математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$, дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$?

2. Что называется корреляционным моментом случайных величин X и Y , что в системе случайных величин характеризует корреляционный момент?
3. Чем коэффициент корреляции отличается от корреляционного момента, какую связь между величинами X и Y характеризует коэффициент корреляции?
4. Объясните с помощью рисунка, в каких числовых значениях изменяется коэффициент корреляции.

Глава 4. Элементы математической статистики

4.1 Основные задачи математической статистики

Изученные выше математические законы теории вероятностей – математическое выражение реальных закономерностей, существующих в массовых случайных явлениях. Эти реальные закономерности изучаются опытным путем, путем обработки наблюдений над массовыми случайными явлениями. Это является предметом специальной науки – математической статистики. Она занимается определением по опытным данным тех самых вероятностей отдельных элементарных событий или законов распределения, которые в 1-й части предполагались заданными.

Типичные задачи математической статистики

1. *Задача определения закона распределения* случайной величины, или системы случайных величин, по статистическим данным. При обработке статистических данных нужно сохранить типические черты наблюдаемого явления и отбросить случайные. Возникает задача представления закона распределения в простой аналитической форме.
2. *Задача проверки правдоподобия выдвинутой гипотезы* о том, что случайная величина подчиняется тому или иному закону распределения из предыдущей задачи.
3. *Задача определения неизвестных параметров распределения* и оценка их точности.

4.2 Генеральная совокупность и выборка. Простая статистическая совокупность. Статистическая функция распределения

Важнейшими понятиями математической статистики являются генеральная совокупность и выборка.

Генеральная совокупность – это множество всех значений случайной величины X . Функция распределения этой случайной величины $F(x)$ – истинная функция распределения, в отличие от экспериментальной, приближенной функции распределения, которая определяется опытным путем.

Над случайной величиной X производится n независимых опытов (наблюдений) и получают n значений x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Вся совокупность этих значений называется *выборочной совокупностью* или просто *выборкой*.

По выборочной совокупности судят о генеральной совокупности, объем которой – фиксированный или может быть принят бесконечно большим.

Выборка оформляется в таблицу 4.1. Первая строка таблицы – номер опыта i , вторая строка таблицы – зафиксированное значение x_i случайной величины X . Такая совокупность значений случайной величины называется *простой статистической совокупностью*.

Таблица 4.1 – Простая статистическая совокупность

Опыт №	1	2	3	4	...	...	n
Значение X	x_1	x_2	x_3	x_4	...	...	x_n

Простая статистическая совокупность может быть получена не только путем повторяющихся независимых опытов над одним объектом. Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого количественного или качественного признака.

Если количество объектов невелико, то проводится сплошное обследование. В первую строку таблицы 4.1 записывается номер объекта, во вторую – характеристика признака.

Если количество объектов велико и сплошное обследование невозможно, то из всей совокупности отбирают ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Один из способов обработки простой статистической совокупности – построение статистической функции распределения $F^*(x) = P^*(X < x)$.

Найти значение $F^*(x)$ при конкретном значении x означает подсчитать количество опытов, в которых величина X приняла значения, меньшее, чем x и разделить на общее число n проведенных опытов.

Пример 1 Получена простая статистическая совокупность, заданная таблицей 4.2. Построить статистическую функцию распределения.

Таблица 4.2 – В примере 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	3	5	2	6	4	3	1	5	4	6

№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	3	2	5	6	3	4	1	2	5	3

Статистическая функция распределения показана на рисунке 4.1.

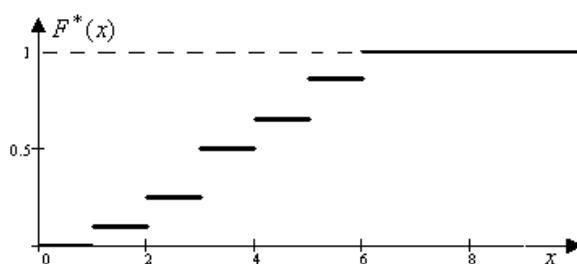


Рисунок 4.1 – Статистическая функция распределения

Контрольные вопросы

1. Объясните понятие генеральной совокупности и выборочной совокупности.
2. Что называется простой статистической совокупностью, какой первичной обработке подвергается простая статистическая совокупность?

4.3 Статистический ряд. Графическое представление статистического ряда

При большом объеме n (порядка сотен) простая статистическая совокупность подвергается первичной обработке – строится *статистический ряд*.

В выборке отыскивается *максимальное* $X_{\max}$ и *минимальное* $X_{\min}$ значения, по которым определяется *размах варьирования* $R = X_{\max} - X_{\min}$. Удобно перед началом обработки выборки упорядочить выборочные значения в порядке возрастания. Такая упорядоченная в порядке возрастания выборка называется *вариационным рядом*.

Весь интервал $[X_{\min}, X_{\max}]$ зафиксированных значений случайной величины X разделим на интервалы (разряды) и подсчитаем количество значений m_i , приходящих на каждый i - й разряд. Величины m_i называют *частотами*. Затем найдем *относительную частоту*, соответствующую каждому разряду

$$h_i = \frac{m_i}{n}.$$

Сумма относительных частот равна единице:

$$\sum_{i=1}^k h_i = 1,$$

где k - количество разрядов. Строим таблицу 4.3, называемую *статистическим рядом*.

Таблица 4.3 – Статистический ряд

Разряд	$x_1; x_2$	$x_2; x_3$	...	$x_i; x_{i+1}$	...	x_k, x_{k+1}
Частота m_i	m_1	m_2	...	m_i	...	m_k
Относительная частота h_i	h_1	h_2	...	h_i	...	h_k

Здесь $x_i; x_{i+1}$ - границы i - го разряда. При группировке значений X по разрядам, значения, находящиеся на границах разрядов можно относить либо к левым, либо к правым разрядам.

Количество разрядов $7 - 20$. Длины разрядов можно брать одинаковыми. Однако если случайная величина распределена очень неравномерно, то в области наибольшей плотности выбирается разряды меньшей ширины, нежели в области меньшей плотности.

Наиболее наглядная форма графического представления статистического ряда – *гистограмма*.

Пусть $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ - длины интервалов группировки, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ - их середины. *Гистограммой частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной δ_i , а высоты равны

отношению m_i/δ_i (плотность частоты). Можно построить также *гистограмму относительных частот* – ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной δ_i , а высоты равны отношению h_i/δ_i (плотность относительной частоты).

Иная форма графического представления статистического ряда – полигон частот. *Полигон относительных частот* – это ломаная линия, соединяющая точки с координатами $(\bar{x}_i, h_i)$, т.е. с абсциссами, равными серединам интервалов группировки, и ординатами, равными соответствующим относительным частотам.

Можно также построить *полигон накопленных частот* – график ломаной, соединяющей точки с координатами

$$\left(x_{i+1}, \sum_{j=1}^i h_j \right).$$

Гистограмма и полигон относительных частот являются статистическим аналогом кривой распределения, а полигон накопленных частот – статистический аналог графика функции распределения. По статистическим аналогам можно выдвигать гипотезы о теоретических (истинных) законах распределения.

Пример 2 Получена выборка объёмом $n = 100$ (таблица 4.4).

Требуется:

- 1) построить статистический ряд;
- 2) построить гистограмму, полигон относительных частот, полигон накопленных частот.

Таблица 4.4 – Выборка объёмом $n = 100$

1	3,59	1,31	2,93	4,57	1,84	2,47	2,09	2,26	1,54
1,41	4,16	1,29	1,6	1,25	2,73	2,94	3,44	3,42	1
2,42	2,29	2,78	2,75	1,02	1,02	2,38	2,05	2,66	3,24
1,78	2,07	1,97	2,89	2,26	1,6	1,32	4,48	3,41	1,45
3,32	3,52	4,27	1,25	2,48	2,43	1,97	2,96	1,23	2,33
1,36	3,12	1,32	3,37	1,35	3,39	2,22	1,41	1,69	1,23
2,85	4,77	3,31	2,22	2,04	2,13	3,01	3,4	1,62	3,01
1,66	2,51	1,4	1,97	1,12	2,98	1,35	2,17	1,29	2,3
1,19	1,57	3,29	4,1	3,14	2,06	2,15	1,06	3,37	2
1,31	3,4	1,32	2,32	2,23	2,98	2,81	2,38	2,47	2,8

Решение

$x_{\max} = 4,77$; $x_{\min} = 1$; $R = x_{\max} - x_{\min} = 3,77$. Выбираем количество разрядов $k = 10$. Длины интервалов группировки примем одинаковыми, равными 0,38. Определяем границы разрядов и записываем их в первую строку таблицы 4.5. Подсчитываем частоты

m_i , относительные частоты h_i и записываем в таблицу. В четвертой строке таблицы проставляем середины каждого интервала $\bar{X}_i$.

Таблица 4.5 – К примеру 2

Разряд	1 - 1,38	1,38- 1,76	1,76- 2,14	2,14- 2,52	2,52- 2,9	2,9 - 3,28	3,28- 3,66	3,66- 4,04	4,04- 4,42	4,42- 4,8
m_i	21	11	12	19	8	10	13	0	3	3
h_i	0,21	0,11	0,12	0,19	0,08	0,1	0,13	0	0,03	0,03
$\bar{X}_i$	1,19	1,57	1,95	2,33	2,71	3,09	3,47	3,85	4,23	4,61

Гистограмму можно, конечно, построить вручную, но лучше воспользоваться программными средствами. На рисунке 4.2 построена гистограмма относительных частот в пакете Excel.

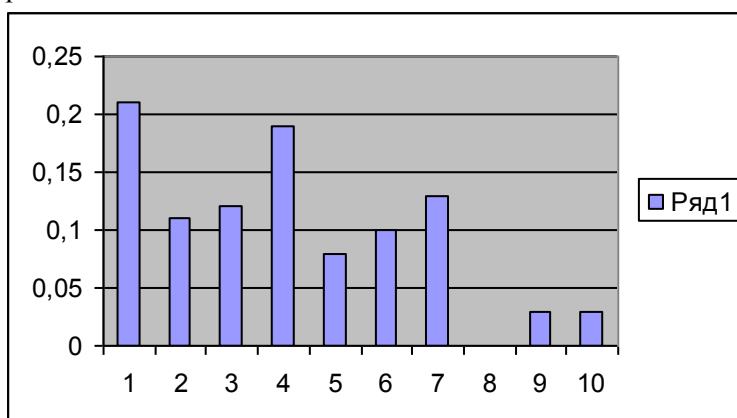


Рисунок 4.2 - Гистограмма относительных частот, выполненная в Excel

Гистограмму можно также построить в пакете Mathcad (см. рисунок 4.3). Для этого задается вектор X середин интервалов группировки и вектор относительных частот h . При построении графика в декартовых координатах выбирается тип линии «bar».

Полигон относительных частот и полигон накопленных частот строим в Mathcad. Для построения полигона относительных частот (см. рисунок 4.4) используем те же данные, что и для построения гистограммы (векторы X и h). Различие заключается в выборе типа линии на графике. Здесь нужно выбрать тип линии «draw».

Полигон накопленных частот построен на рисунке 4.5. Переменная b_k обозначает правые границы интервалов.

$x := (1.19 \ 1.57 \ 1.95 \ 2.33 \ 2.71 \ 3.09 \ 3.47 \ 3.85 \ 4.23 \ 4.61)$ $x := x^T$
 $h := (0.21 \ 0.11 \ 0.12 \ 0.19 \ 0.08 \ 0.1 \ 0.13 \ 0 \ 0.03 \ 0.03)$ $h := h^T$

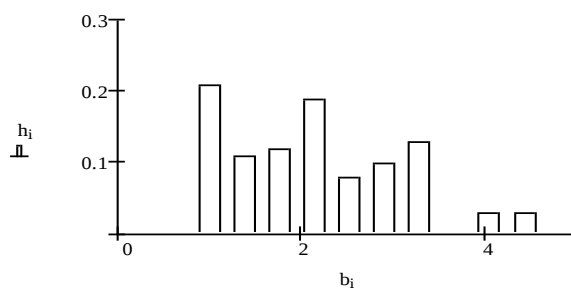


Рисунок 4.3 – Гистограмма, выполненная в пакете Mathcad

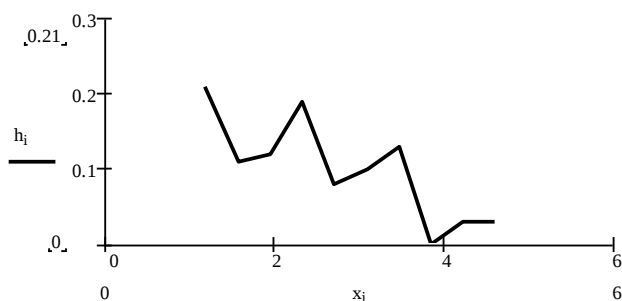


Рисунок 4.4 – Полигон относительных частот

Контрольные вопросы

1. Объясните построение статистического ряда (что такое размах выборки, разряд, частота, относительная частота).
2. Объясните построение гистограммы частот, относительных частот, полигона относительных и накопленных частот.

Практическое задание. Перепишите выборку своего варианта из приложения 3. Постройте статистический ряд, гистограмму частот и относительных частот, полигон относительных частот и накопленных частот.

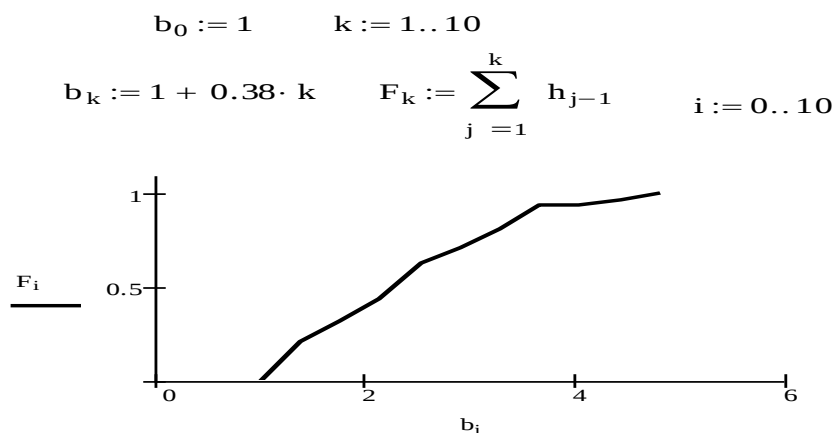


Рисунок 4.5 – Полигон накопленных частот

4.4 Статистические оценки параметров распределения

В предыдущем параграфе были рассмотрены задачи статистического определения законов распределения. На основе статистического материала можно определить числовые характеристики случайной величины – математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение. Чем больше выборка, тем точнее вычисляются числовые характеристики. Проблема состоит в том, что часто приходится обходиться выборкой малого объема. Вычисленные при этом числовые характеристики случайной величины значительно отличаются от действительных числовых характеристик. Приближенное значение числовой характеристики называют её **оценкой**. Оценки, которые определяются одним числом, называются **точечными**. О точечных оценках пойдет речь в текущем и в следующем параграфе.

Используются также **интервальные оценки**, которые определяются двумя числами – концами интервалов (в интервале заключена оцениваемая величина с заданной вероятностью). Интервальные оценки рассмотрены в §4.6.

К точечной оценке предъявляется ряд требований, которым она должна удовлетворять, чтобы ей можно было в какой то мере доверять: несмещенность, эффективность, состоятельность.

Несмещенной называют статистическую оценку Θ^* , математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру Θ при любом объеме выборки, т.е.

$$M(\Theta^*) = \Theta.$$

Соблюдение требования $M(\Theta^*) = \Theta$ гарантирует от получения систематических ошибок.

Смещенной называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Эффективной называют статистическую оценку, которая (при заданном объеме выборки) имеет наименьшую дисперсию, т.е.

$D(\Theta^*) = \min$. Соблюдение требования $D(\Theta^*) = \min$ гарантирует минимизацию ошибки при вычислении параметра.

При рассмотрении выборок большого объема (n велико), к статистическим оценкам предъявляется требование состоятельности.

Состоятельной называют статистическую оценку, которая при $n \rightarrow \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Например, если для несмещенной оценки $D(\Theta^*) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то такая оценка оказывается и состоятельной.

Контрольные вопросы

1. Что называется оценкой числового параметра?
2. Какие оценки называются точечными?
3. Дайте определение несмещенной, эффективной, состоятельной оценки.

4.5 Точечные оценки математического ожидания и дисперсии

Оценкой $M^*(X)$ математического ожидания $M(X)$ случайной величины X служит среднее арифметическое зафиксированных значений случайной величины:

$$M^*(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (4.1)$$

где X_i - значение случайной величины, зафиксированное в i -м опыте, n - число опытов (см. таблицу 4.1). При большом числе опытов вычисление оценки производится не по первичному статистическому материалу таблицы 4.1, а по статистическому ряду таблицы 4.3:

$$M^*(X) = \sum_{i=1}^k \bar{x}_i \cdot h_i, \quad (4.2)$$

где $\bar{x}_i$ - среднее значение разряда, h_i - относительная частота разряда, k - количество разрядов.

Вычисленная по формулам (4.1) и (4.2) оценка является несмещенной и состоятельной для математического ожидания.

Формула (4.2) не что иное, как скалярное произведение арифметических векторов $X(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$ и $h(h_1, h_2, \dots, h_k)$. По той же формуле скалярного произведения вычисляется математическое ожидание дискретной случайной величины в §2.5, формула (2.5).

Можно вычислять оценку дисперсии по статистическому ряду как дисперсию дискретной случайной величины (формула (2.12)). При этом роль возможных значений X_i случайной величины X выполняют $\bar{x}_i$ - средние значения разрядов, роль вероятностей p_i выполняют h_i - относительные частоты разрядов, вместо математического ожидания m_x следует подставить оценку математического ожидания $M^*(X)$. Таким образом, оценку дисперсии можно определить по формуле, аналогичной формуле (2.12):

$$D^*(X) = \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - M^*(X))^2 \cdot h_i. \quad (4.3)$$

Однако, вычисленная таким образом оценка является смещенной в сторону уменьшения. Доказано (см. [1], [2]), что смещение оценки можно исправить, если умножить её на коэффициент $k/(k-1)$. Тогда исправленная, несмещенная и состоятельная оценка дисперсии вычисляется по формуле

$$D^*(X) = \frac{k}{k-1} \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - M^*(X))^2 \cdot h_i. \quad (4.4)$$

При вычислении несмещенной и состоятельной оценки по первичной выборке используется формула

$$D^*(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M^*(X))^2, \quad (4.5)$$

где x_i - значение случайной величины, зафиксированное в i -м опыте,

n - число опытов, $M^*(X)$ - оценка математического ожидания.

Несмещенная, «исправленная» оценка среднего квадратичного отклонения вычисляется как корень квадратный из «исправленной» дисперсии

$$\sigma^* = \sqrt{D^*}. \quad (4.6)$$

Пример 3. Используя данные примера 2, вычислить по статистическому ряду оценки математического ожидания и дисперсии.

Решение

Оценки вычисляем в пакете Mathcad, используя созданные в примере 2 векторы X и h . Математическое ожидание вычисляем по формуле

(2.2) как скалярное произведение векторов X и h :

$$M := x \cdot h \quad M = 2.341$$

Дисперсию вычисляем по формуле (2.4), учитывая, что нумерация элементов арифметических векторов X и h начинается с нуля, а всего элементов, как и разрядов таблицы 4.5 - десять.

$$D := \frac{10}{9} \cdot \sum_{i=0}^9 (x_i - M)^2 \cdot h_i \quad D = 0.951$$

Таким образом, оценка математического ожидания $M^*(X) = 2,34$; оценка дисперсии $D^*(X) = 0,95$.

Контрольные вопросы

1. Как вычисляется несмещенная и состоятельная оценка математического ожидания случайной величины по первичному статистическому материалу и по статистическому ряду?
2. Как вычисляется несмещенная и состоятельная оценка дисперсии случайной величины по первичному статистическому материалу и по статистическому ряду?

Практическое задание. Вычислите для выборки своего варианта точечные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

4.6 Доверительный интервал и доверительная вероятность

В предыдущем параграфе рассмотрены методы определения точечных оценок числовых характеристик выборки. При малом числе наблюдений точечная оценка в значительной мере случайна, изменяется от выборки к выборке. Поэтому важно знать, к каким ошибкам может привести замена параметра его оценкой, и в каких возможных границах лежит действительное значение оцениваемого параметра.

Чтобы дать представление о точности и надежности оценки в математической статистике пользуются так называемыми доверительными интервалами и доверительными вероятностями.

Пусть для параметра Θ получена из опыта несмещенная оценка Θ^* . Какова возможная ошибка? Назначим некоторую большую вероятность (например, $\beta = 0,9$ или $\beta = 0,95$, или $\beta = 0,99$),

такую, чтобы событие с вероятностью β можно было считать практически достоверным. Затем найдем такое значение ε , для которого

$$P(|\Theta^* - \Theta| < \varepsilon) = \beta. \quad (4.7)$$

Диапазон практических значений ошибки, возникающей при замене параметра Θ его оценкой Θ^* , будет $\pm \varepsilon$. Равенство (4.7) перепишем в виде

$$P(\Theta^* - \varepsilon < \Theta < \Theta^* + \varepsilon) = \beta. \quad (4.8)$$

Равенство (4.8) означает, что с вероятностью β неизвестное значение параметра Θ попадает в интервал

$$I_\beta = (\Theta^* - \varepsilon; \Theta^* + \varepsilon) \quad (4.9)$$

Величина Θ - неслучайная, а интервал I_β - случайный. Поэтому β нужно толковать как вероятность того, что случайный интервал I_β «накроет» точку Θ .

Вероятность β называется *доверительной вероятностью*, интервал I_β - *доверительным интервалом*. Границы интервала I_β называют *доверительными границами*.

Если неизвестен закон распределения случайной величины X , то доверительные границы определяются приближенными методами и довольно сложно [3].

Если случайная величина X подчинена нормальному закону распределения, то разработаны точные методы определения интервальных оценок математического ожидания и дисперсии.

Интервальные оценки математического ожидания

1. Интервальной оценкой (с доверительной вероятностью β) математического ожидания a нормально распределенной случайной величины X по выборочной средней $M^*(X)$ при известном среднем квадратичном отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$M^*(X) - t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < a < M^*(X) + t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \quad (4.10)$$

где $t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \varepsilon$ - точность оценки, n - объём выборки, t - значение

аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \frac{\beta}{2}$ (см. приложение Б).

2. Если неизвестно точное значение среднего квадратичного отклонения σ , а известна его исправленная оценка σ^* , вычисленная по формуле (4.6), то доверительный интервал имеет вид

$$M^*(X) - t_\beta \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \right) < a < M^*(X) + t_\beta \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \right), \quad (4.11)$$

где t_β находят по таблице приложения В по заданным n и β .

С помощью формулы (4.11) можно оценить истинное значение некоторой измеряемой величины, если проведено n равноточных независимых измерений.

Интервальные оценки среднего квадратичного отклонения

Интервальной оценкой (с доверительной вероятностью β) среднего квадратичного отклонения нормально распределенной случайной величины X по «исправленному» выборочному среднему квадратичному отклонению σ^* служит доверительный интервал

$$\begin{aligned} \sigma^* (1 - q) < \sigma < \sigma^* (1 + q) \quad (\text{при } q < 1), \\ 0 < \sigma < \sigma^* (1 + q) \quad (\text{при } q > 1), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где q находят по таблице приложения Г по заданным n и β .

Формула (4.12) применяется для оценки точности измерения (точности прибора), так как точность измерений принято характеризовать с помощью среднего квадратического отклонения случайных ошибок измерений.

Пример 4. По выборке объема $n = 50$ нормально распределенной случайной величины определены точечные оценки математического ожидания $M^*(X) = 3,45$ и среднего квадратичного отклонения $\sigma^* = 1,56$. С вероятностью $\beta = 0,99$ определить интервальные оценки для $M^*(X)$ и σ^* .

Решение.

Так как неизвестно точное значение среднего квадратичного отклонения, а определена его статистическая оценка, то для определения доверительного интервала математического ожидания применяем формулу (4.11):

$$M^*(X) - t_\beta \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \right) < a < M^*(X) + t_\beta \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \right)$$

Величину t_β определяем по таблице приложения В при $n = 50$ и $\beta = 0,99$. Итак, $t_\beta = 2,679$. Подставляем данные в формулу (4.11):

$$3,45 - 2,679 \left(\frac{1,56}{\sqrt{50}} \right) < a < 3,45 + 2,679 \left(\frac{1,56}{\sqrt{50}} \right)$$

$$3,45 - 0,59 < a < 3,45 + 0,59$$

$$2,86 < a < 4,04$$

Определение доверительного интервала для среднего квадратичного отклонения начинаем с таблицы приложения Г, где определяем величину $q = 0,30$ при $n = 50$ и $\beta = 0,99$. Затем используем формулу (4.12):

$$\sigma^*(1 - q) < \sigma < \sigma^*(1 + q).$$

$$1,56(1 - 0,30) < \sigma < 1,56(1 + 0,30), \quad 1,09 < \sigma < 2,03.$$

Таким образом, с вероятностью $\beta = 0,99$ действительные значения математического ожидания и среднего квадратичного отклонения лежат внутри интервалов $2,86 < a < 4,04$ и $1,09 < \sigma < 2,03$.

Пример 5. Проведено 12 независимых равнооточных измерений некоторой физической величины. Результаты измерений приведены в таблице 4.6. Оценить истинное значение измеренной величины и точность измерений.

Таблица 4.6 – Результаты 12 замеров

№ измерения	1	2	3	4	5	6
X_i	6,6	6,7	6,8	6,7	6,6	6,8
№ измерения	7	8	9	10	11	12
X_i	6,5	6,7	6,6	6,8	6,5	6,6

Решение.

Истинное значение измеряемой величины равно её математическому ожиданию, поэтому оцениваем математическое ожидание при помощи

доверительного интервала. Определяем среднее арифметическое результатов замеров по формуле (4.1):

$$M^*(X) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} X_i = 6,66.$$

Определяем «исправленную» дисперсию и среднее квадратичное отклонение по формулам (4.5) и (4.6).

$$D^*(X) = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{12} (X_i - M^*(X))^2 = 0,012,$$

$$\sigma^* = \sqrt{D^*(X)} = 0,108.$$

Доверительный интервал для математического ожидания определяем по формуле (4.11). Величину t_β определяем по таблице приложения В при $n = 12$ и доверительной вероятности $\beta = 0,95$. Итак, $t_\beta = 2,2$.

$$6,66 - 2,2 \cdot \left(\frac{0,108}{\sqrt{12}} \right) < a < 6,66 + 2,2 \cdot \left(\frac{0,108}{\sqrt{12}} \right),$$

$$6,59 < a < 6,73$$

Для оценки точности измерений определяем доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения по формуле (4.12). Определяем величину $q = 0,55$ при $n = 12$ и $\beta = 0,95$ по таблице приложения Г.

$$\sigma^* (1 - q) < \sigma < \sigma^* (1 + q).$$

$$0,108(1 - 0,55) < \sigma < 0,108(1 + 0,55), \quad 0,049 < \sigma < 0,167.$$

Ответ: с надежностью 0,95 истинное значение измеряемой величины заключено в доверительном интервале $6,59 < a < 6,73$; точность измерений с надежностью 0,95 оцениваем доверительным интервалом $0,049 < \sigma < 0,167$.

Контрольные вопросы

1. Какой смысл имеют равенства (4.7) и (4.8)?
2. Объясните понятия доверительной вероятности и доверительного интервала.
3. Для какого закона распределения справедливы формулы доверительных интервалов (4.10)-(4.12)?

Задачи

1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 и 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенной случайной величины, если $\sigma = 3$, $M^*(X) = 12$ и объем выборки $n = 20$.

2. Проведено 8 независимых равноточных измерений некоторой физической величины. Приведены результаты измерений:

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	3,34	3,35	3,33	3,34	3,32	3,35	3,34	3,32

Оценить истинное значение измеренной величины и точность измерений.

3. Получена выборка случайной величины X , подчиненной нормальному закону (объемом от 5 до 9, в зависимости от варианта). Требуется:

- 1) вычислить выборочное среднее, исправленную дисперсию и среднее квадратическое отклонение;
- 2) определить доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения с доверительной вероятностью $\beta = 0,95$

Вариант 1

9,1	4,9	8,2	4,7	3,2
-----	-----	-----	-----	-----

Вариант 2

2,1	4,0	-1,1	1,0	-0,5	3,8
-----	-----	------	-----	------	-----

Вариант 3

-4,1	-3,1	6,6	6,5	1,1	-3,6	1,9
------	------	-----	-----	-----	------	-----

Вариант 4

1,9	-0,9	-4,9	0,8	-6,3	-1,2	2,5	-3,5
-----	------	------	-----	------	------	-----	------

Вариант 5

-2,5	-2,2	1,2	2,4	-3,0	0,6	1,1	-3,3	-1,1
------	------	-----	-----	------	-----	-----	------	------

Вариант 6

-2,3	0,2	-1,5	-1,0	5,6	-0,5	-3,1	0,5	0,5
------	-----	------	------	-----	------	------	-----	-----

4.7 Статистические гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Статистический критерий. Критические точки

Обработав статистические данные (выборку) и построив гистограмму, мы можем предположить, какой закон распределения имеет генеральная совокупность. Если по виду гистограммы имеются основания предположить, что закон распределения имеет

определенный вид (назовем его A), выдвигается *гипотеза*: генеральная совокупность распределена по закону A . Возможны и другие гипотезы, например, о значении неизвестного параметра известного закона распределения и т.д.

Гипотезы о виде распределения или о параметрах известных распределений называют *статистическими*.

Вместе с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Выдвинутую гипотезу называют *нулевой* H_0 , или *основной*. Гипотезу, которая противоречит основной, называют *конкурирующей*, или *альтернативной*, обозначают H_1 .

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание a нормального распределения равно 5, то конкурирующая гипотеза может состоять в предположении, что $a \neq 5$. Коротко можно записать: $H_0 : a = 5$; $H_1 : a \neq 5$.

Гипотезы, содержащие только одно предположение, называют *простыми*. Гипотезы, содержащие сразу несколько предположений, называют *сложными*.

Статистические гипотезы и проверяют статистическими методами. При статистической проверке могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать через α ; её называют *уровнем значимости*. Чаще всего уровень значимости принимают равным 0,05 или 0,01.

Статистическим критерием (или просто *критерием*) называют случайную величину с известным законом распределения, которая служит для проверки нулевой гипотезы.

Для проверки гипотезы по данным выборки вычисляют частные значения входящих в критерий величин и получают *наблюдаемое значение* критерия.

Наблюдаемым значением $K_{\text{набл}}$ называют значение критерия, вычисленное по выборке.

Множество всех возможных значений критерия разбивается на два непересекающихся множества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, другая – при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Критическими точками (границами) $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы. Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым находят критическую точку.

Контрольные вопросы

1. Какие гипотезы называются статистическими, какая гипотеза называется нулевой, какая - конкурирующей?
2. В чем состоит ошибка первого рода, второго рода?
3. Что называется критерием, наблюдаемым значением критерия, критическими точками?

4.8 Критерий согласия Пирсона

Если закон распределения неизвестен, но есть основание предположить, что он имеет вид A , то проверяют нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону A .

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. Имеется несколько критериев согласия. Наиболее универсальный из них – критерий согласия Пирсона χ^2 («хи квадрат»). Универсальность состоит в том, что критерий применяется для различных законов распределения.

Таким образом, пусть по выборке объема n получено эмпирическое распределение (см. §4.3, таблица 4.5).

Середины разрядов $\bar{x}_i$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	...	$\bar{x}_k$
Эмпирические частоты m_i	m_1	m_2	...	m_k

Предполагаем, что генеральная совокупность распределена по закону A , и вычисляем теоретические частоты m'_i (подробнее – ниже). Обычно эмпирические и теоретические частоты различаются. Расхождение частот может быть *незначимо*, и объясняется либо малым числом наблюдений, либо случайными причинами. Расхождение частот может быть *значимо*, и объясняется тем, что теоретические частоты вычислялись исходя из неверной нулевой гипотезы.

В качестве меры расхождения и критерия проверки нулевой гипотезы принимается случайная величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i}$$

Пирсон показал, что закон распределения случайной величины χ^2 не зависит от закона распределения A и числа опытов n , а зависит только от числа степеней свободы $r = k - 1 - s$. Здесь k - количество разрядов выборки; s - число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

Если предполагаемое распределение – нормальное или равномерное, то оценивают два параметра (для нормального распределения оценивается математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение; для равномерного распределения оцениваются границы отрезка распределения). Поэтому число степеней свободы $r = k - 1 - 2 = k - 3$. Если предполагается, что генеральная совокупность распределена по закону Пуассона, то оценивается один параметр λ , поэтому $s = 1$ и $r = k - 2$.

Правило применения критерия согласия Пирсона

1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0 : генеральная совокупность подчиняется закону распределения A , надо вначале вычислить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия

$$\chi_{набл}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i}. \quad (4.13)$$

2. В таблице критических точек распределения χ^2 (приложение Д) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $r = k - 1 - s$ найти критическую точку $\chi_{кр}^2(\alpha, r)$.
3. Если $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.
Если $\chi_{набл}^2 > \chi_{кр}^2$ - нулевую гипотезу отвергают.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается универсальность критерия согласия Пирсона?
2. Сформулируйте правило применения критерия согласия Пирсона.

4.9 Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

На конкретных примерах изучим правило, рассмотренное в предыдущем параграфе.

Пример 6. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты

Эмпирические частоты	7	13	37	74	105	86	29	15
Теоретические частоты	3	14	42	82	99	76	37	13

Решение

Вычисляем наблюдаемое значение критерия в Mathcad. Для этого создаем вектор e эмпирических частот и вектор t теоретических частот, а затем с принятыми обозначениями e и t пишем формулу (4.13). Искомую величину «хи-квадрат» обозначим $x2$.

$$e := \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 37 \\ 74 \\ 105 \\ 86 \\ 29 \\ 15 \end{pmatrix} \quad t := \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 42 \\ 82 \\ 99 \\ 76 \\ 37 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$x2 := \sum_{i=0}^7 \frac{(e_i - t_i)^2}{(t_i)} \quad x2 = 10.497$$

По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение Д), по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $r = 8 - 3 = 5$ находим $\chi_{кр}^2(0,05; 5) = 11,1$.

Так как $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Иначе говоря, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

В данном примере теоретические частоты были заданы. Если же обрабатывается выборка, то теоретические частоты нужно ещё определять.

Пример 7. Получена выборка объемом $n = 100$.

Требуется:

1. построить статистический ряд;

2. построить гистограмму, по гистограмме выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности;
3. с помощью критерия Пирсона проверить выдвинутую гипотезу.

Таблица 4.7 – Выборка объёмом $n = 100$

6,56	7,99	6,28	4,10	6,59	7,43	6,98	7,14	7,54	7,79
6,32	7,86	6,48	4,84	6,33	6,52	7,03	8,70	7,22	7,14
6,53	7,92	7,56	7,21	6,87	6,30	7,26	6,68	7,41	5,99
6,05	7,67	6,76	6,38	8,02	10,05	7,49	4,97	5,84	6,07
5,31	5,96	7,09	5,80	7,18	6,71	7,24	5,59	5,89	6,12
7,04	7,07	8,26	7,10	7,51	5,72	6,32	5,67	5,90	7,28
6,88	6,24	6,29	7,77	7,74	7,76	5,39	6,48	6,59	6,60
7,56	7,70	7,00	7,31	6,98	6,61	8,41	7,06	5,69	8,30
9,19	6,82	8,11	7,01	7,28	5,80	7,97	6,40	4,16	5,62
7,81	6,36	7,89	6,24	7,16	5,96	5,84	6,67	8,28	7,38

Решение

$$\max(x) = 10.05 \quad \min(x) = 4.1 \quad R := \max(x) - \min(x) \quad R = 5.95$$

Выбираем количество разрядов $k = 10$. Длины интервалов группировки примем одинаковыми, равными 0,595. Первая строка таблицы 4.8 – границы интервалов, вторая строка – середины интервалов, третья строка – частоты.

Записываем данные второй и третьей строки в два вектора и строим гистограмму на рисунке 4.6.

$$\text{Математическое ожидание выборки} \quad M^*(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} x_i = 6,85,$$

$$\text{дисперсия выборки} \quad D^*(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - M^*(X))^2 = 0,964,$$

$$\text{среднее квадратичное отклонение} \quad \sigma^*(X) = \sqrt{D^*} = 0,982$$

Таблица 4.8 – Решение примера 7

Разряд	4,1- 4,69	4,69- 5,29	5,29- 5,88	5,88- 6,48	6,48- 7,07	7,07- 7,67	7,67- 8,26	8,26- 8,86	8,86- 9,45	9,45- 10,05
$\bar{X}_i$	4,40	4,99	5,59	6,18	6,78	7,37	7,97	8,56	9,16	9,75
m_i	2	2	11	19	23	22	14	5	1	1
$z_i - z_{i+1}$	- ∞ ; -2,2	-2,2 -1,59	-1,59 -0,98	-0,98 -0,38	-0,38 0,23	0,23 0,83	0,83 1,44	1,44 2,05	2,05 2,65	2,65 + ∞
p_i	0,01	0,04	0,11	0,18	0,24	0,21	0,13	0,06	0,02	0,004
m'_i	1	4	11	18	24	21	13	6	1	1

Построение гистограммы в Mathcad

$x := (4.4 \ 4.99 \ 5.59 \ 6.18 \ 6.78 \ 7.37 \ 7.97 \ 8.56 \ 9.16 \ 9.75)$

$m := (2 \ 2 \ 11 \ 19 \ 23 \ 22 \ 14 \ 5 \ 1 \ 1)$

$x := x^T \quad m := m^T$

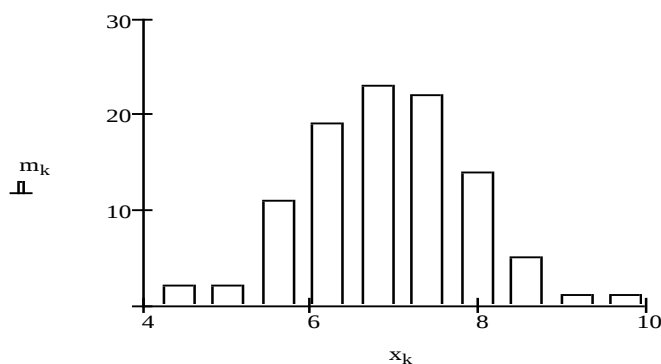


Рисунок 4.6 – Гистограмма частот в примере 7

Гистограмма дает основание выдвинуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, $a^* = 6,85$, $\sigma^* = 0,982$.

Вычислим теоретические частоты нормального распределения.

1) Нормируем заданную случайную величину, т.е. переходим к

величине $Z = \frac{X - a^*}{\sigma^*}$ и вычисляем концы интервалов:

$$z_i = \frac{x_i - a^*}{\sigma^*}$$

Наименьшее значение Z полагаем равным $-\infty$, наибольшее $+\infty$. Результаты записываем в четвертой строке таблицы 4.8.

2) Вычисляем теоретические вероятности p_i попадания Z в интервалы $(z_i; z_{i+1})$ по формуле $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$, (значения функции Лапласа см. приложение Б). Теоретические вероятности записываем в пятой строке таблицы 4.8.

3) Теоретические частоты определяем по формуле $m'_i = n \cdot p_i$ и записываем в шестой строке таблицы 4.8.

Вычисляем наблюдаемое значение критерия Пирсона

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i} = 2,39$$

По уровню значимости $\alpha = 0,01$ и числу степеней свободы $r = 10 - 3 = 7$ находим $\chi_{кр}^2(0,01; 7) = 18,5$ (приложение Д).

Так как $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2$, то результаты наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

4.10 Проверка гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности

Как отмечалось в параграфе 4.8, критерий согласия Пирсона можно применять для различных законов распределения. Рассмотрим пример проверки гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности.

Пример 8. Получена выборка объёмом $n = 100$ (см. таблицу 4.9). Требуется:

1. построить статистический ряд;
2. построить гистограмму,
3. по гистограмме выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности;
4. с помощью критерия Пирсона проверить выдвинутую гипотезу.

Таблица 4.9 – Выборка объёмом $n = 100$

3,00	5,97	5,36	4,13	4,80	3,44	5,20	4,42	4,59	3,76
3,58	3,36	5,87	5,03	5,21	3,42	3,84	5,54	5,53	3,00
4,76	3,03	4,62	3,03	4,72	5,08	5,05	4,37	4,97	5,42
4,05	4,59	4,39	3,83	3,45	4,28	5,17	5,95	5,53	3,63
5,47	4,81	5,59	4,76	4,28	5,90	3,37	5,22	3,33	4,66
3,52	3,50	5,34	5,51	4,55	3,46	5,50	3,59	3,94	3,34
5,13	4,35	5,99	4,45	5,25	5,47	4,55	3,52	3,86	5,26
3,91	3,17	4,38	5,23	3,51	3,57	4,28	4,50	3,42	4,63
3,27	5,35	3,80	4,37	4,48	5,45	5,85	3,08	5,50	4,31
3,44	4,56	5,52	5,23	5,10	3,47	4,65	4,72	4,80	5,09

Решение

$$\max(x) = 5.99 \quad \min(x) = 3 \quad R := \max(x) - \min(x) \quad R = 2.99$$

Выбираем количество разрядов $k = 10$. Длины интервалов группировки примем одинаковыми, равными 0,3. Первая строка таблицы 21 – границы интервалов, вторая строка – середины интервалов, третья строка – частоты.

Таблица 4.10 – Решение примера 8

Разряд	3-3,3	3,3-3,6	3,6-3,9	3,9-4,2	4,2-4,5	4,5-4,8	4,8-5,1	5,1-5,4	5,4-5,7	5,7-6
$\bar{X}_i$	3,15	3,45	3,75	4,05	4,35	4,65	4,95	5,25	5,55	5,85
m_i	7	17	6	4	11	14	9	12	14	6
m'_i	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Строим гистограмму частот, рисунок 4.7.

$$x := (3.15 \ 3.45 \ 3.75 \ 4.05 \ 4.35 \ 4.65 \ 4.95 \ 5.25 \ 5.55 \ 5.85) \quad x := x^T$$

$$m := (7 \ 17 \ 6 \ 4 \ 11 \ 14 \ 9 \ 12 \ 14 \ 6) \quad m := m^T$$

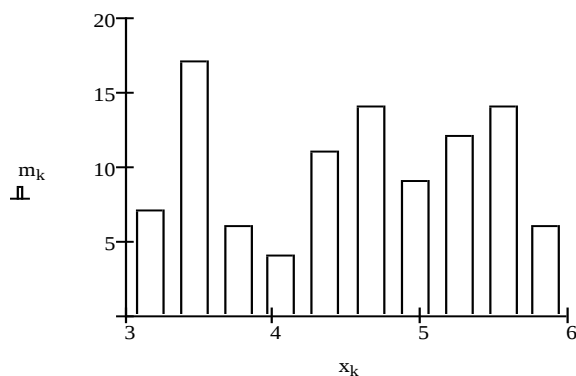


Рисунок 4.7 – Гистограмма частот в примере 8

Гистограмма частот дает основание выдвинуть гипотезу о равномерном распределении генеральной совокупности.

Рассчитываем теоретические частоты. Так как интервалы всех разрядов одинаковой длины, то и частоты должны быть одинаковы:

$$m_i = \frac{n}{k}, \quad \text{где } k - \text{число разрядов. В нашем случае}$$

$$m'_1 = m'_2 = \dots = m'_{10} = 10.$$

Вычисляем наблюдаемое значение критерия Пирсона

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i} = 16,4.$$

Вспомним (см. §4.7), что ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать через α ; её называют уровнем значимости. По таблице приложения Д определяем критическое значение параметра. Число степеней свободы $r = 10 - 3 = 7$.

В зависимости от уровня значимости имеем различные критические значения параметра. Так при $\alpha = 0,01$ $\chi_{кр}^2(0,01; 7) = 18,5$, при $\alpha = 0,025$

$$\chi_{кр}^2(0,025; 7) = 16,0, \text{ при } \alpha = 0,05 \quad \chi_{кр}^2(0,025; 7) = 14,1.$$

Наблюдаемое значение критерия близко к критическому значению, поэтому выбираем $\alpha = 0,01$ $\chi_{кр}^2(0,01; 7) = 18,5$. В этом случае $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2$, и результаты наблюдений согласуются с гипотезой о равномерном распределении генеральной совокупности.

Практическое задание. По гистограмме своего варианта выборки нужно выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности (нормальный закон, равномерный закон). Проверить выдвинутую гипотезу критерием Пирсона и сформулировать заключение.

Глава 5. Задания для самостоятельного решения

5.1 Тест

1. Чему равна вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет 1, 6 или 4?

А	Б	В	Г
1/2	1/11	1/24	другой ответ

2. Укажите, какое утверждение справедливо, если события А и В - несовместны

А	Б	В	Г
А влечет за собой В, а В влечет за собой А	$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$	$P(A+B) = P(A) + P(B)$	Ни одно утверждение не справедливо

3. Сколькими способами можно расселить 5 туристов по 12 свободным одноместным номерам?

А	Б	В	Г
792	475200	95040	120

4. Сколькими способами можно из колоды в 36 карт вынуть шесть карт так, чтобы среди этих шести карт было четыре дамы?

А	Б	В	Г
1260	630	992	496

5. Имеется полка на 5 книг. Сколькими способами можно расставить на полке семь различных книг?

А	Б	В	Г
2520	21	5040	другой ответ

6. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если цифры не могут повторяться?

А	Б	В	Г
120	75	100	125

7. В классе учатся a девочек и b мальчиков. Первым пошел отвечать мальчик. Какова вероятность того, что второй отвечать будет девочка?

А	Б	В	Г
$a/(a+b)$	$a/(a+b-1)$	$(b-1)/(a+b-1)$	$(a-1)/(a+b)$

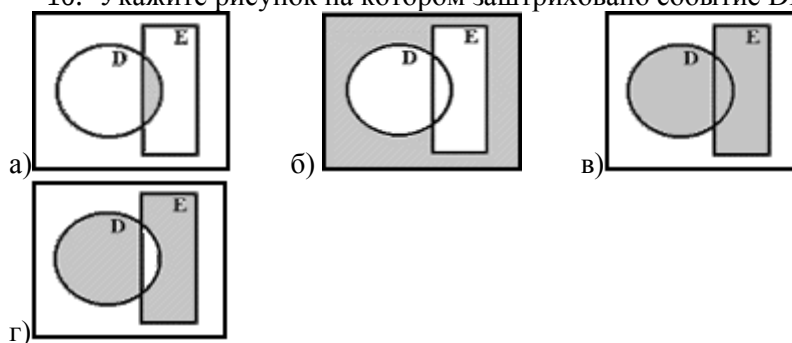
8. После того, как из шкафа, в котором было 70 книг, взяли 10 книг по математике, вероятность взять еще одну книгу по математике составила $1/3$. Сколько книг по математике было в шкафу сначала?

А	Б	В	Г
20	25	30	другой ответ

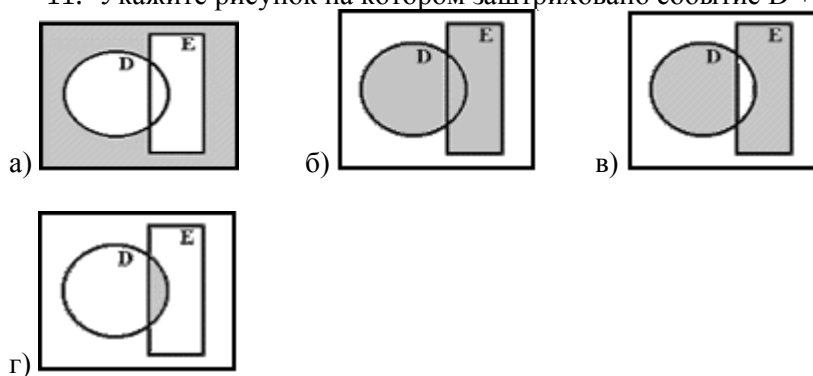
9. На каждой из четырех карточек написана одна буква Е, Р, О, М. Какова вероятность того, что разложив наугад в ряд карточки, получим слово МОРЕ?

А	Б	В	Г
$1/24$	$1/4$	$1/2$	другой ответ

10. Укажите рисунок на котором заштриховано событие DE .



11. Укажите рисунок на котором заштриховано событие $D + E$.



12. Какое утверждение неверно, если говорят о противоположных событиях:

- а) вероятности появления одного из противоположных событий всегда больше вероятности другого;
- б) событие противоположное достоверному есть невозможное;
- в) если два события единственно возможны и несовместны, то их называют противоположными;
- г) сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице

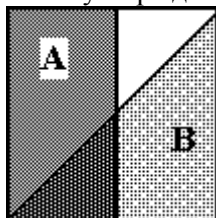
13. В ящике лежат 10 черных носков и 6 зеленых, все одного размера. Вы, не глядя, вытащили 3 носка, какова вероятность того, что образовалась хотя бы одна пара?

А	Б	В	Г
1	$1/2$	$1/8$	другой ответ

14. Определите вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет 2, или нечетное число очков.

А	Б	В	Г
$2/3$	$1/6$	$1/4$	другой ответ

15. На прямоугольнике задана геометрическая вероятность и обозначены события А (левая половина поля) и В (треугольник ниже диагонали). С каким утверждением Вы не согласны?



А	Б	В	Г
$P(A+B) = 7/8$	$P(AB) = P(A) * P(B) = 1/4$	$P(A) = P(B) = 1/2$	$P(A) + P(B) = 1$

16. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий равны соответственно 0,7 и 0,8. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

А	Б	В	Г
0,94	0,15	0,56	0,6

17. Электрическая цепь состоит из двух параллельно соединенных лампочек. Вероятность отказа первой лампочки равна 0,1, второй - 0,3. Найти вероятность того, что обе лампочки не горят.

А	Б	В	Г
0,03	0,63	0,07	0,27

18. Стрелок 15 раз выстрелил по мишени. Найти наименее вероятное число попаданий по мишени, если вероятность поразить мишень при одном выстреле равна 0,9.

А	Б	В	Г
12	13	14	15

19. В магазин доставили два холодильника, изготовленные на разных заводах. На первом заводе брак составляет 1%, на втором - 2%. Найти вероятность того, что оба холодильника бракованные.

А	Б	В	Г
0,02	0,0002	0,002	0,2

20. Имеются четыре коробки. В первой коробке лежат 5 белых и 5 зеленых шаров, во второй - 1 белый и 2 зеленых, в третьей - 2 белых и 5 зеленых, в четвертой - 3 белых и 7 зеленых. Наудачу выбирается коробка и из нее берется 1 шар. Какова вероятность того, что он окажется зеленым?

А	Б	В	Г
203/400	271/420	293/400	313/420

21. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров. Во второй урне 5 белых и 15 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна:

А	Б	В	Г
0,275	0,276	0,725	0,733

22. В первой столовой работают официантами 5 мужчин и 10 женщин. Во второй столовой 3 мужчин и 10 женщин. Из первой столовой во вторую переводят 2 штатные единицы. Какова вероятность того, что клиент, пришедший во вторую столовую, будет обслужен официанткой?

А	Б	В	Г
1/14	61/105	1/2	2/27

23. Из 10 учеников, пришедших на экзамен, трое подготовились отлично, четверо хорошо, двое удовлетворительно и один совсем не подготовился. В билетах 20 вопросов. Отличники могут ответить на все вопросы, хорошисты – на 16, троечники – на 10, а двоечники – на 5 вопросов. Каждый ученик получает 3 вопроса. Приглашенный первый ученик ответил на три вопроса. Какова вероятность, что он отличник?

А	Б	В	Г
0,578	0,234	0,512	другой ответ

24. Что вероятнее при игре с равным по силе соперником (без ничьих): выиграть три партии из четырех или шесть партий из восьми?

А	Б	В	Г
три из четырех	шесть из восьми	вероятности одинаковы	не хватает данных для решения

25. Среди 20 экзаменационных билетов есть 5 "легких". Студенты подходят за билетами один за другим. У кого больше вероятность взять "легкий" билет: у первого или у второго?

А	Б	В	Г
у первого	у второго	одинакова	не хватает данных для решения

26. В коробке 9 шаров, из них 4 белых и 5 зеленых. Наугад вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров будет 2 белых?

А	Б	В	Г
1/14	2/7	5/14	3/7

27. Какое из событий наиболее вероятно при бросании кости?

А	Б	В	Г
Выпадение любого нечетного числа очков	Появление 6 очков	Появление любого четного числа очков	Появление любой грани, кроме 6

28. Страхуется 1750 автомобилей. Считается, что каждый из них может попасть в аварию с вероятностью 0,04. Для вычисления вероятности того, что количество аварий среди всех застрахованных превысит 80, используют формулу:

А	Б	В	Г
Формулу Пуассона	Формулу Бернулли	Локальную формулу Муавра-Лапласа	Интегральную формулу Муавра-Лапласа

29. На складе 2000 шариковых ручек. Вероятность того, что ручка с браком равна 0,001. Найти приближительную вероятность того, что на складе хотя бы две бракованные ручки.

А	Б	В	Г
0,632	0,478	0,594	0,702

30. Появление тайфуна в мексиканском заливе ожидается каждый день с вероятностью 0,1. Сколько раз можно ожидать появление тайфуна в июне с вероятностью 0,2?

А	Б	В	Г
1	2	3	другой ответ

31. В магазине три кассы. Вероятность того, что касса работает, равна 0,9. Найти математическое ожидание случайной величины - количества работающих касс.

А	Б	В	Г
2,484	2,652	2,7	2,9

32. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	-1	1	3
P	0,1	0,1	0,8

Тогда дисперсия случайной величины X равна:

А	Б	В	Г
1,64	1,28	7,4	2,4

33. Найти дисперсию числа очков, выпавших при бросании одной игральной кости.

А	Б	В	Г
7/12	35/12	55/12	70/12

34. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 5. Известно, что вероятность того, что эта случайная величина примет значения между 4,4 и 5,6 равна 0,95. Найти дисперсию этой случайной величины.

А	Б	В	Г
0,3	0,09	0,6	1,2

5.2 Варианты индивидуальных заданий к модулю «Теория вероятностей»

Задача 1. Найти вероятность прохождения электрического сигнала через систему параллельно и последовательно соединенных узлов A_1 , A_2 , ..., A_5 , если вероятности безотказной работы узлов соответственно равны $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2, \dots, P(A_5) = p_5$. Для каждого варианта – своя схема и вероятности безотказной работы узлов

№ вари	№ схемы	Вероятности безотказной работы узлов				
		1	2	3	4	5

анта						
1	1	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
2	2	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
3	3	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
4	4	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
5	5	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
6	6	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
7	7	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
8	8	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
9	9	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
10	10	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
11	1	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
12	2	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
13	3	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
14	4	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
15	5	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
16	6	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
17	7	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
18	8	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
19	9	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
20	10	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
21	1	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
22	2	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
23	3	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
24	4	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
25	5	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
26	6	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
27	7	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
28	8	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
29	9	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
30	10	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8

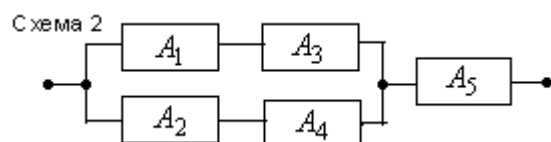
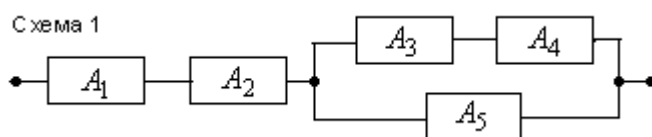


Схема 3

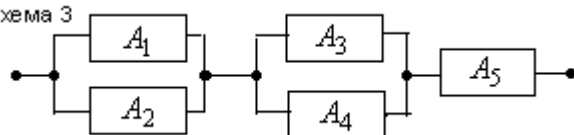


Схема 4

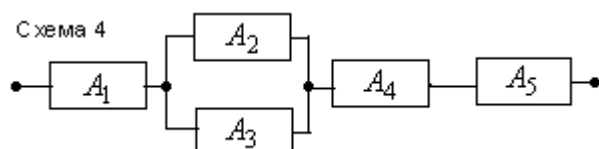


Схема 5

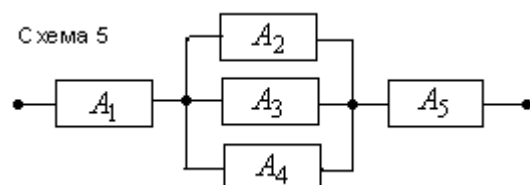


Схема 6

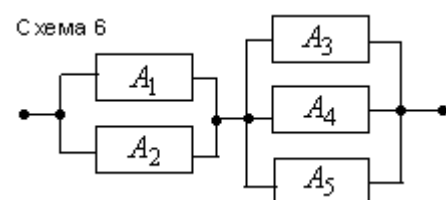


Схема 7

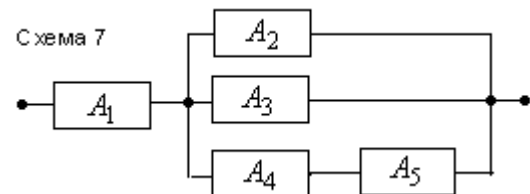


Схема 8

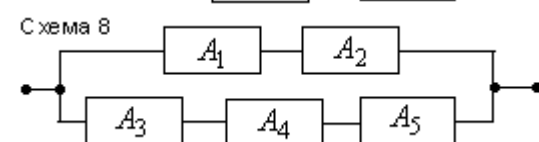


Схема 9

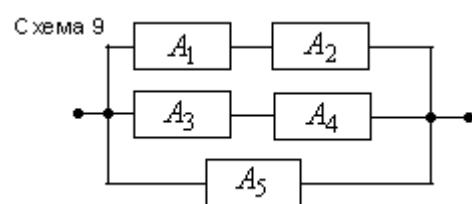
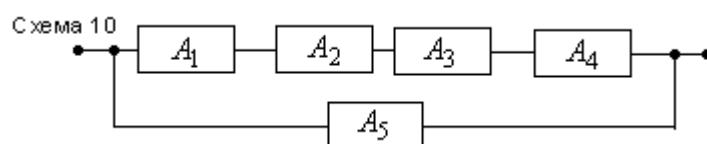


Схема 10



Задача 2. В урне №1 лежит m черных и n белых шаров. В урне №2 лежит k черных и r белых шаров. Из урны №1 наугад переложили 2 шара. Затем из урны №2 наугад вынули один шар. Определить вероятность того, что шар, вынутый из урны №2, оказался белым (для нечетных вариантов) или черным (для четных вариантов).

№ варианта	1 урна		2 урна		№ варианта	1 урна		2 урна	
	m	n	k	r		m	n	k	r
1	2	8	4	4	16	3	7	5	3
2	3	7	4	4	17	4	6	5	3
3	4	6	4	4	18	5	5	5	4
4	5	5	5	3	19	6	4	4	3
5	6	4	5	3	20	7	3	4	5
6	7	3	5	3	21	8	2	4	5
7	8	2	6	2	22	9	1	6	4
8	9	1	6	2	23	8	2	6	4
9	8	2	6	2	24	7	3	6	4
10	7	3	7	1	25	6	4	8	4
11	6	4	7	1	26	5	5	8	4
12	5	5	7	1	27	4	6	8	6
13	4	6	6	2	28	3	7	7	3
14	3	7	6	2	29	2	8	7	3
15	2	8	6	2	30	1	9	7	4

Задача 3. Экзамен сдавали студенты трех групп, причем в i -ой группе учатся m_i студентов, $i=1,2,3$. Вероятность сдать экзамен на положительную оценку для студента i -ой группы p_i . Наудачу выбранный студент экзамен не сдал. Определить вероятность того, что этот студент из i -ой группы.

№ варианта	m_1	m_2	m_3	p_1	p_2	p_3	i
1	40	20	40	0,9	0,9	0,8	1
2	30	10	30	0,4	0,5	0,3	2
3	25	20	30	0,1	0,7	0,1	3
4	20	18	25	0,2	0,6	0,2	1
5	30	25	26	0,3	0,5	0,3	2
6	35	30	28	0,4	0,4	0,4	3
7	45	26	30	0,3	0,3	0,5	1
8	20	24	20	0,4	0,2	0,6	2
9	35	29	30	0,5	0,1	0,7	3

№ варианта	m_1	m_2	m_3	p_1	p_2	p_3	i
10	22	32	40	0,6	0,65	0,8	1
11	32	36	34	0,8	0,55	0,9	2
12	38	38	26	0,9	0,45	0,25	3
13	34	40	34	0,3	0,35	0,35	1
14	28	30	26	0,2	0,25	0,45	2
15	26	20	22	0,4	0,15	0,55	3
16	40	20	40	0,9	0,9	0,8	1
17	34	22	24	0,8	0,1	0,4	2
18	36	24	38	0,7	0,2	0,1	3
19	38	26	25	0,6	0,3	0,2	1
20	40	28	26	0,5	0,4	0,3	2
21	22	32	28	0,4	0,5	0,4	3
22	24	34	30	0,3	0,6	0,3	1
23	26	36	38	0,2	0,7	0,4	2
24	28	42	28	0,1	0,8	0,5	3
25	30	25	30	0,65	0,9	0,6	1
26	32	35	40	0,55	0,25	0,8	2
27	34	18	34	0,45	0,35	0,9	3
28	36	22	30	0,35	0,45	0,3	1
29	38	20	26	0,25	0,55	0,2	2
30	40	27	32	0,15	0,65	0,4	3

Задача 4.

Варианты 1-6.

Вероятность появления события А равна p . Какова вероятность того, что при n испытаниях событие А появится не более m раз?

№ варианта	1	2	3	4	5	6
p	0,2	0,34	0,42	0,26	0,38	0,4
n	5	6	7	5	6	5
m	2	3	4	3	4	4

Варианты 7-12.

В урне n белых и m черных шаров. Вынули подряд k шаров, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется два белых?

№ варианта	7	8	9	10	11	12
k	2	2	2	3	3	3
n	10	15	8	6	12	9
m	5	5	4	4	6	3

Варианты 13-18.

Произведено n независимых испытаний. Какова вероятность того, что будет m успешных испытаний, если известно, что вероятность успешного испытания равна p ?

№ варианта	13	14	15	16	17	18
p	0,2	0,34	0,42	0,26	0,38	0,4
n	5	6	7	5	6	5
m	2	3	4	3	4	4

Варианты 19-24.

Партия изделий содержит k % брака. Найти вероятность того, что среди взятых наугад n изделий окажется m бракованных.

№ варианта	19	20	21	22	23	24
k	2	3	4	2	3	4
n	5	6	7	5	6	5
m	2	3	4	3	4	4

Варианты 25-30.

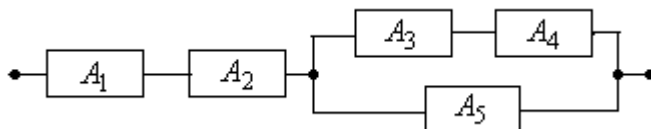
Вероятность выхода на линию каждого из n автобусов равна p .

Какова вероятность нормальной работы автобазы в течение дня, если для этого необходимо иметь на линии не менее m автобусов?

№ варианта	25	26	27	28	29	30
p	0,92	0,84	0,82	0,86	0,88	0,94
n	5	6	7	5	6	5
m	2	3	4	3	4	4

Образец выполнения контрольного задания

Задача 1. Найти вероятность прохождения электрического сигнала через систему параллельно и последовательно соединенных узлов $A_1, A_2, \dots, A_5$, если вероятности безотказной работы узлов соответственно равны $P(A_1) = 0,8$, $P(A_2) = 0,7$, $P(A_3) = 0,6$, $P(A_4) = 0,9$, $P(A_5) = 0,5$.



Решение

Обозначим событием B безотказную работу параллельно соединенных звеньев A_3, A_4, A_5 . Чтобы электрический сигнал прошел через эти звенья, достаточно, чтобы он прошел или через A_3, A_4 , или через A_5 , или через все A_3, A_4, A_5 вместе. События A_5 и A_3, A_4 совместны, поэтому определяем вероятность суммы совместных событий:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_3 \cdot A_4 + A_5) = P(A_3) \cdot P(A_4) + P(A_5) - P(A_3 A_4 A_5) = \\ &= 0,6 \cdot 0,9 + 0,5 - 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,5 = 0,77 \end{aligned}$$

Обозначим событием C прохождение электрического сигнала через последовательно соединенные звенья A_1, A_2, B . Событие C произойдет лишь в том случае, если произойдут одновременно события A_1, A_2, B , поэтому

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,77 = 0,4312.$$

Задача 2. В урне №1 лежит 6 черных и 8 белых шаров. В урне №2 лежит 5 черных и 7 белых шаров. Из урны №1 наугад переложили 2 шара. Затем из урны №2 наугад вынули один шар. Определить вероятность того, что шар, вынутый из урны №2, оказался белым.

Решение

Обозначим через A событие „шар, вынутый из урны №2, оказался белым”.

Из первой урны могли быть вынуты 2 белых шара (событие B_1), 2 черных шара (событие B_2), 1 черный и 1 белый шар (событие B_3).

$$P(B_1) = \frac{C_8^2}{C_{14}^2} = \frac{28}{91}; \quad P(B_2) = \frac{C_6^2}{C_{14}^2} = \frac{15}{91}; \quad P(B_3) = \frac{C_6^1 \cdot C_8^1}{C_{14}^2} = \frac{48}{91}.$$

Условная вероятность того, что из второй урны достали белый шар, при условии, что произошло событие B_1 , равна $P_{B_1}(A) = \frac{9}{14}$; (во второй урне стало 5 черных и 9 белых шаров).

Условная вероятность того, что из второй урны достали белый шар, при условии, что произошло событие B_2 , равна $P_{B_2}(A) = \frac{7}{14}$; (во второй урне стало 7 черных и 7 белых шаров).

Условная вероятность того, что из второй урны достали белый шар, при условии, что произошло событие B_3 , равна $P_{B_3}(A) = \frac{8}{14}$. (во второй урне стало 6 черных и 8 белых шаров)

Искомую вероятность того, что шар, вынутый из второй урны окажется белым, определяем по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \\ &= \frac{28}{91} \cdot \frac{9}{14} + \frac{15}{91} \cdot \frac{7}{14} + \frac{48}{91} \cdot \frac{8}{14} = \frac{741}{1274} \end{aligned}$$

Задача 3. Экзамен сдавали студенты трех групп, причем в i -ой группе учатся m_i студентов, $i=1,2,3$. Вероятность сдать экзамен на положительную оценку для студента i -ой группы p_i . Наудачу выбранный студент экзамен не сдал. Определить вероятность того, что этот студент из 2-ой группы.

$$m_1 = 20; m_2 = 30; m_3 = 26; p_1 = 0,3; p_2 = 0,6; p_3 = 0,4.$$

Решение

Обозначим через A событие „наудачу выбранный студент экзамен не сдал”. Можно сделать следующие предположения:

- 1) наудачу выбранный студент из первой группы (гипотеза B_1);
- 2) наудачу выбранный студент из второй группы (гипотеза B_2);
- 3) наудачу выбранный студент из третьей группы (гипотеза B_3).

Искомую вероятность того, что наудачу выбранный студент из второй группы, найдем по формуле Байеса:

$$\begin{aligned} P_A(B_2) &= \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}. \\ P(B_1) &= \frac{20}{76} = \frac{10}{38}; \quad P(B_2) = \frac{30}{76} = \frac{15}{38}; \quad P(B_3) = \frac{26}{76} = \frac{13}{38}. \\ P_{B_1}(A) &= 1 - 0,3 = 0,7; \quad P_{B_2}(A) = 1 - 0,6 = 0,4; \end{aligned}$$

$$P_{B_3}(A) = 1 - 0,4 = 0,6.$$

$$\text{Искомая вероятность } P_A(B_2) = \frac{\frac{15}{38} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{10}{38} \cdot \frac{7}{10} + \frac{15}{38} \cdot \frac{4}{10} + \frac{13}{38} \cdot \frac{6}{10}} = \frac{15}{52}.$$

Задача 4. Вероятность появления события А равна 0,4. Какова вероятность того, что при 6 испытаниях событие А появится не более 2 раз?

Решение

Воспользуемся формулой Бернулли (1.16). В данном случае $n=6$, $p=0,4$, $q=0,6$. Вероятность того, что при 6 испытаниях событие А появится не более 2 раз можно найти по формуле:

$$\begin{aligned} P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) &= C_6^0 \cdot p^0 \cdot q^6 + C_6^1 \cdot p^1 \cdot q^5 + C_6^2 \cdot p^2 \cdot q^4 = \\ &= q^6 + 6 \cdot p \cdot q^5 + \frac{6!}{2!4!} \cdot p^2 \cdot q^4 = q^4(q^2 + 6pq + 10p^2) = 0,44 \end{aligned}$$

5.3 Варианты индивидуальных заданий к модулю „Случайные величины”

Задача 1. Найти закон распределения указанной дискретной случайной величины X и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$ и среднее квадратическое отклонение. Построить график функции распределения $F(x)$.

В партии из n изделий m бракованных. Для контроля их качества случайным образом отбирают k изделия. Случайная величина X – число бракованных изделий.

№ варианта	n	m	k	№ варианта	n	m	k
1	20	5	3	9	22	7	4
2	15	4	3	10	21	5	2
3	25	6	4	11	20	6	2
4	22	5	3	12	15	5	3
5	23	7	5	13	10	6	3
6	24	8	5	14	10	4	2
7	18	5	3	15	11	4	3
8	26	4	3	16	12	5	4

№ варианта	n	m	k	№ варианта	n	m	k
17	20	6	4	24	13	5	3
18	16	4	2	25	14	5	2
19	16	7	4	26	15	4	3
20	20	5	3	27	16	4	2
21	26	6	4	28	17	6	4
22	18	5	3	29	18	6	3
23	23	6	3	30	19	6	2

Задача 2. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины $X : x_1, x_2, x_3$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X) = a$, $M(X^2) = b$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X .

№ варианта	x_1	x_2	x_3	a	b
1	2	3	4	3,5	9,2
2	1	2	3	3,6	9,3
3	4	5	6	3,7	9,4
4	3	4	5	3,8	9,5
5	5	6	7	6,5	10,2
6	2	3	4	4,2	8,5
7	1	2	3	5,3	11,1
8	4	5	6	2,4	5,3
9	3	4	5	3,5	6,4
10	5	6	7	6,7	11,3
11	2	3	4	3,7	9,2
12	1	4	7	5,4	11,4
13	2	5	8	6,2	14,2
14	3	4	7	5,6	12,3
15	4	6	8	6,3	13,6
16	2	4	6	3,5	9,2
17	1	3	5	6,7	11,4
18	1	4	5	3,7	14,2
19	1	4	7	5,4	12,3
20	2	3	5	6,2	13,6
21	3	4	7	5,6	9,2
22	2	7	9	6,3	11,4
23	6	7	8	3,5	9,5
24	2	3	4	3,6	10,2
25	1	2	3	3,7	8,5

№ варианта	x_1	x_2	x_3	a	b
26	4	5	6	3,8	11,1
27	3	4	5	6,5	5,3
28	5	6	7	4,2	6,4
29	3	4	6	5,3	9,2
30	2	6	8	2,4	9,3

Задача 3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Требуется: 1) определить коэффициент c ; 2) найти функцию распределения $F(x)$; 3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$; 4) вычислить математическое ожидание $M(x)$ и дисперсию $D(x)$; 5) Найти вероятность того, что случайная величина примет значения из интервала $(\alpha; \beta)$.

Варианты 1-10

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ c \cdot (x-n)^2, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Варианты 11-20

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ c \cdot (x+n)^3, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Варианты 21-30

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ c \cdot \sin nx, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{a}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{a}. \end{cases} \quad \alpha = \frac{\pi}{c}; \quad \beta = \frac{\pi}{d}.$$

№ варианта	n	a	b	α	β
1	1	-4	2	-3	0
2	2	2	5	3	4
3	3	-6	-2	-4	-3
4	4	0	5	2	3
5	5	1	6	2	4
6	6	2	8	4	6
7	7	-3	4	0	3

№ варианта	n	a	b	α	β
8	8	0	7	2	5
9	8	1	4	2	3
10	9	3	6	4	5
11	3	0	7	2	5
12	4	1	4	2	3
13	5	3	6	4	5
14	6	5	1	6	2
15	7	6	2	8	4
16	8	7	-3	4	0
17	7	-4	2	-3	0
18	6	2	5	3	4
19	5	-6	-2	-4	-3
20	3	0	5	2	3

№ варианта	n	a	c	d
21	9	2	6	4
22	6	3	6	4
23	8	1	6	3
24	5	1	4	3
25	2	2	4	3
26	3	2	6	4
27	4	3	6	4
28	5	1	6	3
29	6	1	4	3
30	7	2	4	3

Образец выполнения контрольного задания

Задача 1. Найти закон распределения указанной дискретной случайной величины X и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение. Построить график функции распределения $F(x)$.

В партии из $n=25$ изделий $m=6$ бракованных. Для контроля их качества случайным образом отбирают $k=4$ изделия. Случайная величина X – число бракованных изделий.

Решение

Случайная величина X – число бракованных изделий среди отобранных изделий – имеет следующие возможные значения:

$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2; x_4 = 3; x_5 = 4$. Вероятности возможных

значений найдем по формуле $P(x = r) = \frac{C_m^r \cdot C_{n-m}^{k-r}}{C_n^k}$.

$$P(x = 0) = \frac{C_6^0 \cdot C_{19}^4}{C_{25}^4} = \frac{1938}{6325} = 0,306;$$

$$P(x = 1) = \frac{C_6^1 \cdot C_{19}^3}{C_{25}^4} = \frac{2907}{6325} = 0,459;$$

$$P(x = 2) = \frac{C_6^2 \cdot C_{19}^2}{C_{25}^4} = \frac{513}{2530} = 0,204;$$

$$P(x = 3) = \frac{C_6^3 \cdot C_{19}^1}{C_{25}^4} = \frac{38}{1265} = 0,03;$$

$$P(x = 4) = \frac{C_6^4 \cdot C_{19}^0}{C_{25}^4} = \frac{3}{2530} = 0,001.$$

Составим искомый закон распределения:

X	0	1	2	3	4
P	0,306	0,459	0,204	0,03	0,001

Построим функцию распределения. Будем задавать различные значения x и находить для них $F(x) = P\{X < x\}$:

1) если $x \leq 0$, то, очевидно, $F(x) = P\{X < 0\} = 0$;

2) если $0 < x \leq 1$, то

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} = 0,306;$$

3) если $1 < x \leq 2$, то

$$F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0,306 + 0,459 = 0,765;$$

4) если $2 < x \leq 3$, то

$$F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \\ = 0,306 + 0,459 + 0,204 = 0,969;$$

5) если $3 < x \leq 4$, то

$$F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \\ = 0,306 + 0,459 + 0,204 + 0,03 = 0,999;$$

4) если $4 < x$, то

$$F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} + \\ + P\{X = 4\} = 0,306 + 0,459 + 0,204 + 0,03 + 0,001 = 1.$$

Итак, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,306, & 0 < x \leq 1; \\ 0,765, & 1 < x \leq 2; \\ 0,969, & 2 < x \leq 3; \\ 0,999, & 3 < x \leq 4; \\ 1, & 4 < x. \end{cases}$$

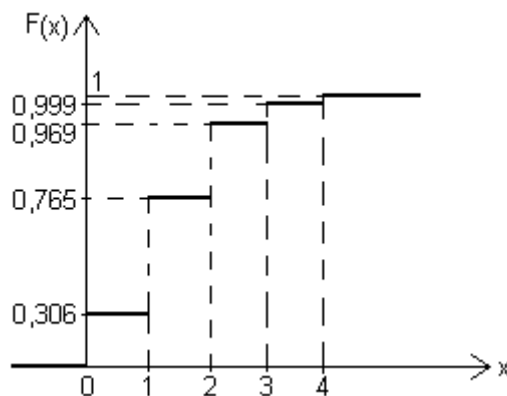


Рисунок 5.1 – График функции распределения

Математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение вычислим соответственно по формулам (2.5), (2.16), (2.15).

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k = 0 \cdot 0,306 + 1 \cdot 0,459 + 2 \cdot 0,204 + \\ + 3 \cdot 0,03 + 4 \cdot 0,001 = 0,961.$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - M^2(X) = 0^2 \cdot 0,306 + 1^2 \cdot 0,459 + \\ + 2^2 \cdot 0,204 + 3^2 \cdot 0,03 + 4^2 \cdot 0,001 - (0,961)^2 = 0,637.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0,798$$

Задача 2. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X) = 2,3$,

$M(X^2) = 5,9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X .

Решение

Пользуясь тем, что сумма вероятностей всех возможных значений X равна единице, а также принимая во внимание, что $M(X) = 2,3$, $M(X^2) = 5,9$, составим систему трех линейных уравнений относительно неизвестных вероятностей:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 = 2,3, \\ 1^2 \cdot p_1 + 2^2 \cdot p_2 + 3^2 \cdot p_3 = 5,9. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем искомые вероятности:

$$p_1 = 0,2; \quad p_2 = 0,3; \quad p_3 = 0,5.$$

Задача 3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3; \\ c \cdot x^2, & -3 \leq x \leq 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

Требуется:

- 1) определить коэффициент c ;
- 2) найти функцию распределения $F(x)$;
- 3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;
- 4) вычислить математическое ожидание $M(x)$ и дисперсию $D(x)$;
- 5) найти вероятность того, что случайная величина примет значения из интервала $(-2; -1)$.

Решение

- 1) Для определения коэффициента c используем следующее свойство

плотности распределения: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{-3} 0 dx + c \int_{-3}^0 x^2 dx + \int_0^{\infty} 0 dx = c \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-3}^0 = 9c.$$

Отсюда $9c=1$. Следовательно $c = \frac{1}{9}$.

- 2) Функцию распределения $F(x)$ определяем по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

При $x < -3$ $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$; при $-3 \leq x \leq 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0 dx + \int_{-3}^x \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^x = \frac{1}{27} (x^3 + 27) = 1 + \frac{x^3}{27}.$$

При $0 < x$ $F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0 dx + \int_{-3}^0 \frac{1}{9} x^2 dx + \int_0^x 0 dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^0 = 1.$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3; \\ 1 + \frac{x^3}{27}, & -3 \leq x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

3) Построим графики $f(x)$ и $F(x)$.

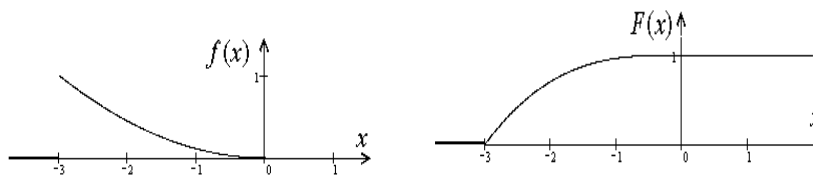


Рисунок 5.2 – Графики плотности распределения и функции распределения

4) Математическое ожидание и дисперсию случайной величины X вычисляем соответственно по формулам (2.7) и (2.18).

$$M(x) = \int_{-3}^0 x \cdot \frac{1}{9} \cdot x^2 dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_{-3}^0 = -\frac{9}{4};$$

$$D(x) = \int_{-3}^0 x^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot x^2 dx - \frac{81}{16} = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_{-3}^0 - \frac{81}{16} = \frac{27}{80}.$$

5) Вероятность того, что случайная величина X принимает значение из интервала $(-2; -1)$ определяем по формуле (2.2):

$$P(-2 < x < -1) = F(-1) - F(-2) = \left(1 - \frac{1}{27}\right) - \left(1 - \frac{8}{27}\right) = \frac{7}{27}.$$

5.4 Варианты индивидуальных заданий к модулю «Математическая статистика»

Дана выборка объема $n = 100$.

Требуется: 1) построить статистический ряд; 2) построить гистограмму, полигон относительных частот, полигон накопленных частот; 3) вычислить выборочное среднее, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 4) по гистограмме выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности (нормальный, равномерный); 5) с помощью критерия Пирсона проверить выдвинутую гипотезу.

Вариант 1

3,75	1,88	3,31	5,05	2,07	1,13	6,35	3,78	4,47	4,4
3,89	5,16	2,97	4,34	5,4	3,08	-0,41	2,82	1,93	4,74
4,31	5,84	1,74	4,09	8,36	2,35	4,51	3,95	5,54	5,36
4,07	8,25	2,89	5,79	3,18	4,21	2,27	4,39	5,83	4,94
5,5	6,24	7,23	5,99	6,57	2,98	3,41	4,7	-0,19	4,06
4,25	1,57	6,89	4,84	4,75	3,81	3,78	3,05	2,61	4,5
4,45	2,25	6,52	5,17	2,76	6,89	4,51	4,43	3,19	3,29
7,58	9,79	2,88	5,84	6,45	6,61	5,66	4,29	6,64	5,61
5,39	6,47	4,17	3,46	5,58	4,33	7,27	2,71	7,13	3,3
9,17	4,99	8,21	4,73	3,24	1,4	3,78	4,81	3,4	4,0

Вариант 2

3,18	5,66	1,92	5,56	3,73	4,05	4,44	1,66	1,84	3,87
3,89	5,47	3,78	4,64	3,04	1,36	4,03	5,76	2,7	3,74
4,14	2,14	2,21	4,34	3,33	4,27	1,03	1,14	2,84	2,56
3,52	3,05	4,02	2,58	1,76	1,52	1,5	1,28	5,01	5,04
4,48	4,14	3,92	2,53	4,69	2,14	5,32	1,66	3,63	2,42
1,95	3,26	3,47	1,54	5,13	5,6	4,74	5,32	4,99	5,48
1,89	3,99	4,7	5,26	5,37	4,31	2,9	4,61	1,72	4,72
3,29	5,27	4,1	1,77	2,5	3,46	3,76	1,07	3,01	2,81
1,49	4,12	5,02	1,4	1,64	3,48	5,78	4,54	1,68	2,14
1,47	3,83	3,88	4,2	4,92	3,55	1,88	2,09	1,33	2,15

Вариант 3

0,24	4,14	-6,3	-1,82	-5,07	3,7	0,13	2,57	-0,15	-1,73
-1,99	5,57	-0,09	-7,21	3,97	-0,21	-2,23	2,67	2,22	-1,64
0,22	-5,87	1,47	-6,55	-4,68	-1,48	1,65	-3,24	6,09	5,44
-3,28	5,15	3,12	0,91	-0,11	-7,97	-2,68	-4,85	-6,59	-3,94
-0,19	-4,66	6,47	2,06	-1,3	-3,81	-3,88	-2,48	-1,91	-1,49
-1,01	-5,6	-2,44	-3,66	-3,86	4,32	2,95	-4,37	0,88	-4,89
0,08	-2,06	0,55	-6,76	-0,69	-6,43	2,82	-0,97	-1,6	6,56
7,14	-0,71	-4,76	2,38	1,39	-1,13	-1,81	0,31	0,82	-8,18
-0,29	2,57	-10,4	5,19	2,57	4,48	-2,33	2,06	2,7	4,88
-1,88	-0,83	6,05	1,93	-0,86	0,92	-1,14	4,27	0,92	-4,14

Вариант 4

0,83	0,8	0,89	1,06	1,06	0,97	1,13	1,01	1,01	0,91
0,81	1,02	0,86	0,97	0,95	1,04	1,06	0,97	0,89	1,07
0,98	1,06	1,07	0,95	0,99	0,78	0,91	1,15	0,96	1
0,81	0,77	1,05	0,81	1,04	0,95	1,01	0,84	1	0,71
0,94	0,89	1,09	1,03	1,1	0,95	0,85	0,74	1,05	1,12
0,89	0,98	1,06	0,96	0,96	0,62	1,04	0,87	1,06	1,06
0,98	1,07	0,92	1,08	1,03	1,16	0,99	1,05	0,88	0,92
0,91	0,98	0,85	0,91	1	1,03	0,85	0,95	1,01	0,82
0,93	1,03	1,08	0,98	0,92	0,81	0,81	0,83	0,88	0,97
1,01	0,63	0,86	0,93	0,99	0,97	0,94	1,01	1,06	0,77

Вариант 5

2,12	4,07	-1,15	1,09	-0,54	3,85	2,07	3,29	1,92	1,14
1	4,78	1,95	-1,61	3,99	1,9	0,88	3,33	3,11	1,18
2,11	-0,93	2,73	-1,27	-0,34	1,26	2,02	0,38	5,05	4,72
0,36	4,58	3,56	2,45	1,94	-1,99	0,66	-0,42	-1,3	0,03
1,91	-0,33	5,23	3,03	1,35	0,1	0,06	0,76	1,05	1,25
1,5	-0,8	0,78	0,17	0,07	4,16	3,47	-0,18	2,44	-0,45
2,04	0,97	2,28	5,28	-1,38	1,66	-1,22	3,41	1,52	1,2
5,57	1,64	-0,38	3,19	2,7	1,44	1,09	2,16	2,41	-2,09
1,86	3,28	-3,19	4,59	3,29	4,24	0,83	3,03	3,35	4,44
1,06	1,59	5,02	2,97	1,57	2,46	1,43	4,14	2,46	-0,07

Вариант 6

2,63	3,84	2,8	3,18	1,72	1,12	3,83	2,32	3,69	2,1
1,16	2,6	2,73	1,09	3,71	1,57	2,74	2,19	3,19	1,33
2,57	3,08	1,67	2,93	3,71	1,46	1,77	2,78	2,18	1,61
1,28	1,78	1,01	1,26	1,24	3,66	2,06	3,85	3,71	2,96
3,67	2,58	1,25	3,84	1,52	1,59	3,39	2,18	2,16	3,06
1,44	2,2	3,57	1,82	3,33	2,94	1,21	1,56	2,06	1,24
3,79	2,76	3,43	3,95	1,63	3,73	2,77	2,72	3,24	1,08
1,14	3,05	3,07	1,88	1,01	3,76	1,59	2,88	3,22	1,92
2,01	2,31	2,59	2,1	1,34	1,45	2,93	1,15	1,6	1,43
2,2	1,02	1,43	1,66	1,93	2,71	2,81	1,78	3,04	1,2

Вариант 7

-0,43	-0,67	-1,64	-0,33	-2,48	1,05	0,7	0,36	-0,98	1,85
0,32	0,6	-1,78	-0,31	0,81	0,71	0,95	-0,81	0,8	-1
0,88	-0,77	1,89	0,14	-0,35	-0,99	-0,71	1,56	0,34	1,09
0,16	0,15	1,54	-0,96	0,55	-1,51	0,97	-1,57	-0,53	-0,21
0,03	-0,29	-0,15	0,88	0,71	-0,35	-0,84	1,67	-0,13	-0,39
-0,45	-1,58	-1,15	0,37	-1,02	0,28	1,42	3,83	0,13	-0,16
-0,64	-0,87	1,27	1,02	0,97	1,01	1,93	1,43	-1,17	0,67
-2,79	-0,43	-0,54	0,31	0,08	-0,88	0,64	-0,68	-0,9	-0,87
1,02	0,12	-0,55	-0,18	-0,35	-2,87	-0,55	-0,72	2,72	-0,61
0,03	-0,41	-0,89	1,85	0,38	-5,51	0,42	1,1	-0,78	-0,68

Вариант 8

1,24	9,83	-2,46	9	2,54	3,34	4,37	-3,66	-2,78	2,89
2,94	8,42	2,66	4,95	0,9	-5,66	3,3	10,94	0,02	2,58
3,58	-1,67	-1,41	4,09	1,59	3,91	-13,4	-8,66	0,37	-0,38
2,05	0,92	3,28	-0,33	-3,14	-4,43	-4,57	-6,48	6,2	6,31
4,48	3,57	3,03	-0,46	5,11	-1,67	7,53	-3,66	2,32	-0,77
-2,35	1,42	1,93	-4,32	6,69	9,33	5,25	7,55	6,12	8,44
-2,58	3,19	5,15	7,23	7,79	4,03	0,53	4,86	-3,33	5,2
1,49	7,32	3,47	-3,09	-0,54	1,91	2,64	-10,6	0,81	0,29
-4,68	3,53	6,24	-5,35	-3,78	1,96	11,21	4,66	-3,53	-1,65
-4,78	2,79	2,92	3,74	5,88	2,11	-2,62	-1,84	-5,94	-1,63

Вариант 9

-4,15	-3,16	6,58	6,59	1,19	-3,65	1,99	2,37	4,05	3,58
-1,37	4,2	-6,62	2,22	1,96	4,49	5,97	-7,37	2,37	-2,12
3,58	-3,25	2,79	2,32	3,82	0,37	0,73	-2,94	-2,13	3,01
3,26	-2,78	0,94	-2,66	-1,75	6,3	0,57	1,58	1,9	0,35
0,23	8,61	3,77	-1,76	0,42	-0,39	-1,21	-2,85	3,02	1,11
-0,06	2,52	5,26	1,58	2,15	5,63	-2,12	0,7	6,36	2,21
2,45	5,67	1,23	0,88	0,94	4,13	4,53	1,05	2,8	-1,22
-5,65	2,83	5,41	5,21	3,27	5,07	2,83	-0,53	0,41	1,42
2,68	4,56	-3,64	-3,79	-2,96	1,37	4,15	-3,09	2,58	1,09
-0,69	0,26	8,73	4,04	5,34	5,48	2,89	3,43	4,49	3,77

Вариант 10

2,9	0,68	3,45	3,17	2,14	0,33	3,83	2,32	3,69	2,1
2,78	1,24	1,23	2,36	3,12	3,42	2,74	2,19	3,19	1,33
2,62	0,85	0,11	2,28	0,79	1,23	1,77	2,78	2,18	1,61
0,39	1,94	1,56	2,69	3,19	1,89	2,05	3,85	3,71	2,96
0,2	1,76	0,12	0,04	3,4	0,77	3,39	2,18	2,16	3,06
1,86	2,42	3,43	1,37	2,51	3,98	1,21	1,56	2,06	1,24
2,91	1,6	1,61	3,08	2,47	2,59	2,77	2,72	3,24	1,08
2,72	3,37	2,45	3,48	1	0,7	1,59	2,88	3,22	1,92
1,49	2,49	3,5	2,9	3,15	1,1	2,93	1,15	1,6	1,43
0,2	0,21	2,38	3,58	2,86	3,36	2,81	1,78	3,04	1,2

Вариант 11

2,17	2,01	2,07	2,2	2,96	2,91	2,17	2,25	2,95	2,44
2,07	2,29	2,91	2,19	2,33	2,37	2,96	2,51	2,47	2,38
2,96	2,86	2,76	2,96	2,89	2,21	2,2	2,99	2,92	2,56
2,45	2,71	2,1	2,74	2,43	2,05	2,05	2,12	2,37	2,84
2,18	2,92	2,68	2,68	2,27	2,25	2,04	2,71	2,66	2,01
2,47	2,09	2,82	2,92	2,53	2,14	2,08	2,29	2,51	2,04
2,25	2,08	2,27	2,84	2,79	2,61	2,57	2,53	2,28	2,26
2,28	2,38	2,87	2,11	2,49	2,2	2,22	2,52	2,79	2,71
2,82	2,52	2,97	2,9	2,56	2,76	2,23	2,83	2,86	2,13
2,63	2,14	2,22	2,89	2,35	2,64	2,41	2,1	2,46	2,86

Вариант 12

0,98	1,18	0,85	0,95	0,77	0,84	1,14	0,87	1,19	1
0,85	1,1	1,12	1,15	0,88	1,04	0,81	1	0,93	0,8
1,19	0,92	0,72	1,09	0,93	1,2	1,16	0,95	0,87	0,7
1,11	1,07	0,63	1,26	0,96	1,11	0,86	0,86	1,09	0,72
0,85	0,99	0,77	0,87	0,99	0,96	1,08	1	1,04	0,89
0,63	1,05	0,94	1,06	1,21	0,67	0,53	1,02	0,92	1,04
1,09	0,71	0,66	0,74	1,09	0,97	0,79	0,74	0,81	0,79
0,99	0,98	1,07	1,01	0,89	0,95	0,88	0,89	0,94	0,93
0,98	0,98	0,7	1,05	0,89	1,03	1,01	0,95	1,04	1,13
0,85	1,1	1,16	0,72	1,16	0,79	0,93	0,74	0,81	0,71

Вариант 13

0,61	-3,08	-1,33	1,44	-2,67	-6,54	-2,47	0,31	2,79	2,15
-1,38	0,75	-1,91	-3,1	-2,25	6,55	-4,47	-4,26	-2,22	-3,47
-3,16	-0,13	2,32	-0,48	-3,68	2,06	-2,51	-1,91	-3,63	-0,9
1,95	-0,96	-4,96	0,8	-6,36	-1,23	2,55	-3,51	-2,38	-3,24
-2,57	-9,53	-0,84	-0,62	-1,66	-2,36	-1,45	-3,58	0,62	-3,32
4,25	0,43	-6,11	2,56	-0,98	-0,08	1,76	-0,7	-1,11	-2,97
-6,09	-1,57	1,92	2,39	-1,98	-5,97	1,69	-0,05	0,13	-2,76
3,58	1,22	0,81	-3,86	0,16	1,24	-2,59	-2,45	1,14	-8,5
6,17	-6,92	3,56	-1	0,67	-1,03	-5,18	2,86	0,51	-0,31
-1,7	-3,24	2,54	0,73	2,77	-3,51	-4,33	-3,34	0,32	-1,95

Вариант 14

0,75	-0,43	0,24	0,42	-0,77	-0,25	-0,16	1,69	0,02	0,52
0,22	1,67	0,8	-0,92	0,07	0,04	1,95	-0,02	0,45	-0,8
0,5	-0,91	0,43	0,36	0,23	0,99	0,78	0,71	1,51	1,95
1,62	-0,82	1,85	-0,59	-0,11	1,8	-0,6	0,04	0,62	0,85
1,34	-0,23	1,5	-0,36	1,23	-0,68	0,8	-0,13	0,71	0,1
0,77	-0,65	1,4	1,39	-0,83	0,67	0,07	1,77	0,92	1,58
-0,16	0,48	1,61	0,98	0,08	1,69	0,44	1,42	1,28	-0,27
1,62	-0,85	1,82	1,34	-0,52	1,62	1,84	1,06	-0,53	-0,85
-0,1	0,01	1,83	1,53	-0,6	0,16	1,95	1,3	1,36	-0,48
1,6	0,55	-0,62	0,5	-0,46	1,02	0,54	1,17	0,32	-0,34

Вариант 15

-0,9	0,91	-0,25	1,01	1,93	1,16	0,45	1,39	0,08	1,09
2,09	-0,18	-0,45	0,18	-1,08	0,56	-1,9	-1,15	0,68	-0,3
0,3	0,51	-1,85	1,35	0,16	-0,07	1,75	0,01	0,43	-0,1
-3,46	0,83	-1,91	0,76	0,02	-0,28	-0,01	2,08	1,91	-1,81
1,74	-0,52	-2,22	0,6	0,63	-0,56	-0,51	-0,94	0,7	-1,51
-1,15	0,32	2,8	-0,15	0,3	3,03	1,69	-1	-0,67	-0,3
-0,71	-0,67	-0,75	2,5	2,33	-2,25	-0,98	0,43	-0,69	-1,89
-1,5	0,55	0,32	0,27	-1,03	0,41	0,1	-0,88	-0,49	-1,72
0,59	2,15	-1,7	4,51	-1,44	0,43	1,6	-1,13	1,23	0,17
-1,06	1,07	3,95	0,15	-0,8	-1,37	0,23	0,33	-0,66	-1,1

Вариант 16

0,51	8,6	1,24	2,95	-3,45	-9,65	8,42	-0,71	6,44	-1,62
-8,6	0,41	0,93	-10,3	6,67	-4,36	0,95	-1,26	2,96	-6,29
0,3	2,45	-3,76	1,79	6,68	-5,12	-3,21	1,12	-1,3	-4,1
-6,77	-3,15	-16,3	-7,11	-7,32	6,13	-1,85	8,8	6,72	1,92
6,32	0,31	-7,24	8,7	-4,72	-4,24	4,07	-1,32	-1,37	2,37
-5,29	-1,23	5,32	-2,91	3,73	1,8	-7,75	4,44	-1,81	-7,34
7,84	1,04	4,37	11,96	-3,96	6,91	1,1	0,9	3,22	-10,7
-9,02	2,32	2,42	-2,65	-16,7	7,38	-4,2	1,56	3,13	-2,44
-2,04	-0,78	0,36	-1,63	-6,15	-5,19	1,78	-8,86	-4,16	-5,38
-1,23	-14,8	-5,38	-3,82	-2,38	0,84	1,27	-3,13	2,27	-7,88

Вариант 17

2,15	2,18	1,42	1,69	-0,59	0,61	0,58	0,67	1,08	1,94
-0,67	1,54	0,45	-0,98	-0,89	1,63	0,27	2,11	-0,97	-0,67
-0,45	1,38	2,9	1,42	0,04	2,78	2,41	-0,4	2,08	2,39
1,25	-0,22	2,58	0,16	-0,09	-0,99	-0,21	-0,65	2,88	0,44
1,53	-0,07	2,81	1,99	2,45	-0,8	0,88	0,89	2,62	-0,62
0,81	-0,04	-0,19	2,65	-0,81	0,69	0,73	0,33	-0,11	-0,25
0,34	0,63	0,42	1,42	-0,78	1,42	0,68	1,46	0,91	2,65
0,13	0,09	0,16	2,14	-0,66	1,32	0,12	0,65	0,24	0,66
2,49	0,52	-0,6	1,17	2,85	1,49	0,35	0,76	2,37	0,37
2,47	-0,17	1,84	0,58	2,51	-0,98	2,8	-0,12	0,71	0,09

Вариант 18

-1,05	1,67	-3,57	-2,49	-1,26	-0,96	1,47	0,12	-2,83	-1,2
2,52	-3,57	-2,32	-1,45	-1,45	-2,07	-1,44	-1,65	-3,87	-1,22
-4,01	1,83	-2,06	-3,77	-0,69	-3,15	2,3	-0,12	-0,62	0,15
2,3	-1,15	0,25	-3,2	1,79	-1,62	1,19	-5,9	-3,16	5,12
-0,57	-3,56	-2,35	-3,78	-1,48	-2,8	2,05	-1,04	-0,82	-5,06
-3,01	-2,51	-2,23	1,18	2,44	0,56	1,17	-3,31	-1,1	0,51
-1,66	-2,36	0,05	1,03	0,54	-0,77	0,21	-2,44	1,25	-3,58
-2,09	-2,51	-2,49	-1,6	-4,31	-0,67	-2,25	-1,54	1,77	-1,53
-2,05	-0,75	2,06	-1,6	2,63	-1,43	1,34	-3,05	-3,83	1,47
-3,79	-1,96	-1,56	-3,23	-1,19	2,94	-1,32	0,13	-2,74	-3,03

Вариант 19

1,21	0,85	0,87	0,73	1,32	1,4	1,43	0,96	0,25	0,47
1,42	1,11	0,54	0,32	0,66	1,58	0,99	1,4	1,12	0,49
0,57	0,97	0,72	0,72	0,89	1,09	1,06	0,86	0,66	1,26
0,41	0,89	1,29	0,64	0,73	1	0,55	0,98	0,53	0,69
1,31	0,58	0,87	0,75	1,44	1,36	1,44	1,06	0,89	0,42
0,24	0,61	0,84	0,16	0,46	1,02	1,22	0,86	0,54	1,09
0,91	0,95	0,27	0,61	0,92	1	1	1,48	1,12	0,62
1,28	0,44	0,9	1,23	0,57	0,46	0,57	0,26	1,11	0,73
1,25	0,72	0,73	1,18	0,91	1,46	1,04	0,66	1,35	0,34
0,9	1,3	0,71	1,73	0,9	0,82	1,21	0,48	1,15	1,25

Вариант 20

0,74	1,4	1,63	1,79	1,47	0,43	0,65	1,92	1	0,86
0,47	1,32	1,63	1,09	0,25	1,54	0,4	1,58	0,53	0,77
0,46	1,07	1,8	1,05	0,75	1,11	0,25	1,64	1,29	0,02
1,94	0,11	0,54	2	1,83	1,7	1,79	0,27	0,53	1,73
0,05	0,52	0,46	1,73	0,06	1,08	0,44	0,04	0,92	1,4
0,3	1,73	1,75	0,29	0,9	1,74	1,12	1,5	0,7	1,2
0,02	0,17	1,69	0,57	0,46	0,46	0,85	1,8	0,95	1,12
1,29	1,42	0,08	1,95	0,31	0,74	1,73	1,54	0,81	0,76
0,83	1,73	0,37	1,43	1	0,07	0,53	1,26	0,08	1,87
0,18	0,59	0,9	1,29	1,51	0,8	1,36	1,36	1,19	1,93

Вариант 21

1,26	0,86	0,52	0,84	0,85	0,62	0,81	0,75	0,94	0,82
1,15	1,09	0,78	1,12	0,97	0,52	0,52	1,3	1,19	0,82
1,12	0,85	0,59	0,71	0,78	0,94	1,01	1,33	1,05	0,56
1	0,76	0,92	0,64	0,6	0,96	1,08	1	0,79	0,74
0,71	1,04	1,01	0,96	0,66	0,99	0,94	0,77	0,64	0,81
0,95	0,51	0,66	0,85	1,27	0,61	1,11	0,81	1,2	1,27
0,97	0,81	1,02	0,75	1,11	1,08	0,99	0,7	1,36	1,33
0,89	1,18	1,01	1,04	0,92	0,84	0,84	0,56	1	0,65
1,13	1,38	0,46	1,19	1,12	0,76	0,62	0,55	1	1,09
0,71	0,68	0,41	0,9	0,94	0,67	1,1	1,02	0,45	1,23

Вариант 22

-1,77	0,3	2,08	-0,83	1,37	-0,2	1,11	- 1,66	2,56	- 2,55
0,32	-0,61	0,22	-1,75	0,63	1,77	2,52	1,83	- 1,48	1,56
-3,61	-1,26	-2,39	4,61	2,68	2,84	0,44	0,37	- 2,73	2,75
-2,33	0,24	-1,5	-1,09	5,69	-0,58	-3,18	0,5	0,55	3,17
1,12	0,7	2,06	-1,2	2,01	0,82	-0,04	3,1	- 1,19	- 0,94
-2,99	-1,8	2,91	-3,83	1,44	-0,14	0,47	- 1,61	- 0,24	1,2
0,46	-2,6	1,97	0,62	1,36	1,27	0,4	1,89	1,05	- 1,97
-1,04	1,28	-0,39	-2,83	0,21	-0,14	0,24	- 0,66	0,94	1,55
-6,85	2,91	-0,89	0,55	-0,84	-0,38	-2,55	- 0,39	3,01	- 2,22
-3,8	-1,64	-0,9	4,87	2,88	-1,39	0,73	- 1,91	- 2,54	- 1,24

Вариант 23

-1,42	0,05	-1,96	0,62	0,8	0,06	-1,73	1,89	0,22	0,66
0,46	2,2	-0,12	0,23	-2,03	1,05	-0,49	0,11	2,81	1,68
-0,19	0,5	-2,07	-1,04	1,19	0,37	0,19	-0,18	0,24	-1,17
0,06	-0,23	2,78	2,48	-0,68	-2,59	-2,52	-1,05	-1,41	0,48
1,55	-0,98	-0,77	1,1	-0,44	1,04	-0,53	1,83	1,95	0,25
-1,81	0,83	0,02	-2,12	-1,2	0,06	0,92	0,6	0,22	1,05
-0,49	-0,44	-0,89	-0,34	-0,73	1,03	0,32	-0,5	0,14	0,83
0,58	0,11	0,69	-0,8	-0,95	0,93	1,92	-1,74	-0,3	-0,77
-0,92	0,96	-1,84	-1,28	1,6	-0,11	2,41	0,16	-0,58	-1,11
0,01	0,36	-0,28	0,47	-0,87	1,31	-0,94	1,37	0,48	-0,57

Вариант 24

4,85	-7,94	9,22	6,72	0,71	-12,1	-2,63	4,22	2,98	3,86
4,09	-3,99	-4,08	1,83	6,33	8,88	-5,97	3,26	7,88	-8,51
3,2	-6,55	-18,0	1,39	-7,01	-4,06	-5,99	0,71	9,59	-14,9
-11,1	-0,31	-2,21	3,6	6,85	-0,54	17,56	- 14,3	11,72	-19,8
-14,8	-1,21	-17,2	-22,9	8,99	-7,19	-18,8	- 5,23	-1,2	3,04
-0,72	2,15	8,99	-3,28	2,63	26,5	-8,6	9,22	-3,01	11,83
4,92	-2,0	-1,99	6,07	2,38	3,04	-23,4	- 11,7	-1,46	-1,37
3,77	8,39	2,27	9,5	-5,48	-7,78	2,96	4,46	-35,2	-5,69
-2,62	2,52	9,75	4,86	6,57	-4,85	-1,73	9,25	6,14	3,18
-14,7	-14,4	1,92	10,66	4,57	8,25	-11,5	-4,4	-11,6	-18,8

Вариант 25

3,7	0,34	2,74	0,98	7,46	0,09	2,77	4,23	3,79	2,28
4,34	3,34	10,54	-4,25	4,13	-0,27	4,73	4,84	5,82	5,58
4,59	7,59	3,38	4,36	5,62	-5,11	2,31	0,91	0,69	-0,14
-0,75	2,35	8,83	3,72	0,5	1,66	0,64	5,02	7,48	7,28
9,44	2,46	4,3	7,33	6,53	2,33	-1,44	-1,2	8,47	2,83
3,57	-1,64	3,04	2,9	1,57	-3,83	5,55	4,11	4,13	4,85
2,69	8,24	4,45	3,77	3,82	2,59	4,3	0,85	12,75	-0,5
-1,57	1,83	0,75	2,38	3,73	1,6	-0,72	1,88	-0,82	1,68
-4,66	1,78	1,15	7,62	2,29	3,56	1,73	4,19	5,51	-1,63
7,79	0,05	8,55	1,17	2,76	8,41	5,45	-0,28	2,41	1,62

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x,0	0,3989	3989	3989	3988	39986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	0,3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	0,3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	0,3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	0,3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	0,3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	0,3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	0,3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	0,2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	0,2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	0,2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	0,1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	0,1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	0,1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	0,1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	0,1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0,0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0,0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0,0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0,0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0,0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0,0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0,0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0,0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0,0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0,0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0,0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0,0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0,0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0,0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0,0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0,0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0,0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0,0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0,0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0,0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0,0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение Б

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,0000						
0,01	0,0040	0,63	0,2357	1,25	0,3944	1,87	0,4693
0,02	0,0080	0,64	0,2389	1,26	0,3962	1,88	0,4699
0,03	0,0120	0,65	0,2422	1,27	0,3980	1,89	0,4706
0,04	0,0160	0,66	0,2454	1,28	0,3997	1,90	0,4713
0,05	0,0199	0,67	0,2486	1,29	0,4015	1,91	0,4719
0,06	0,0239	0,68	0,2517	1,30	0,4032	1,92	0,4726
0,07	0,0279	0,69	0,2549	1,31	0,4049	1,93	0,4732
0,08	0,0319	0,70	0,2580	1,32	0,4066	1,94	0,4738
0,09	0,0359	0,71	0,2611	1,33	0,4082	1,95	0,4744
0,10	0,0398	0,72	0,2642	1,34	0,4099	1,96	0,4750
0,11	0,0438	0,73	0,2673	1,35	0,4115	1,97	0,4756
0,12	0,0478	0,74	0,2703	1,36	0,4131	1,98	0,4761
0,13	0,0517	0,75	0,2734	1,37	0,4147	1,99	0,4767
0,14	0,0557	0,76	0,2764	1,38	0,4162	2,00	0,4772
0,15	0,0596	0,77	0,2794	1,39	0,4177	2,02	0,4783
0,16	0,0636	0,78	0,2823	1,40	0,4192	2,04	0,4793
0,17	0,0675	0,79	0,2852	1,41	0,4207	2,06	0,4803
0,18	0,0714	0,80	0,2881	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,19	0,0753	0,81	0,2910	1,43	0,4236	2,16	0,4846
0,20	0,0793	0,82	0,2939	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,21	0,0832	0,83	0,2967	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,22	0,0871	0,84	0,2995	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,23	0,0910	0,85	0,3023	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,24	0,0948	0,86	0,3051	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,25	0,0987	0,87	0,3078	1,49	0,4319	2,28	0,4887
0,26	0,1026	0,88	0,3106	1,50	0,4332	2,30	0,4893
0,27	0,1064	0,89	0,3133	1,51	0,4345	2,32	0,4898
0,28	0,1103	0,90	0,3159	1,52	0,4357	2,34	0,4904
0,29	0,1141	0,91	0,3186	1,53	0,4370	2,36	0,4909
0,30	0,1179	0,92	0,3212	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,31	0,1217	0,93	0,3238	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,32	0,1255	0,94	0,3264	1,56	0,4406	2,42	0,4922
0,33	0,1293	0,95	0,3289	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,34	0,1331	0,96	0,3315	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,35	0,1368	0,97	0,3340	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,36	0,1406	0,98	0,3365	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,37	0,1443	0,99	0,3389	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,38	0,1480	1,00	0,3413	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,39	0,1517	1,01	0,3438	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,40	0,1554	1,02	0,3461	1,64	0,4495	2,58	0,4951

Таблица значений функции Лапласа (окончание)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,41	0,1591	1,03	0,3485	1,65	0,4505	2,60	0,4953
0,42	0,1628	1,04	0,3508	1,66	0,4515	2,62	0,4956
0,43	0,1664	1,05	0,3531	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,44	0,1700	1,06	0,3554	1,68	0,4535	2,66	0,4961
0,45	0,1736	1,07	0,3577	1,69	0,4545	2,68	0,4963
0,46	0,1772	1,08	0,3599	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,47	0,1808	1,09	0,3621	1,71	0,4564	2,72	0,4967
0,48	0,1844	1,10	0,3643	1,72	0,4573	2,74	0,4969
0,49	0,1879	1,11	0,3665	1,73	0,4582	2,76	0,4971
0,50	0,1915	1,12	0,3686	1,74	0,4591	2,80	0,4974
0,51	0,1950	1,13	0,3708	1,75	0,4599	2,84	0,4977
0,52	0,1985	1,14	0,3729	1,76	0,4608	2,88	0,4980
0,53	0,2019	1,15	0,3746	1,77	0,4616	2,92	0,4982
0,54	0,2054	1,16	0,3770	1,78	0,4625	2,96	0,4985
0,55	0,2088	1,17	0,3790	1,79	0,4633	3,00	0,4986
0,56	0,2123	1,18	0,3810	1,80	0,4641	3,20	0,4993
0,57	0,2157	1,19	0,3830	1,81	0,4649	3,40	0,4996
0,58	0,2190	1,20	0,3849	1,82	0,4656	3,60	0,4998
0,59	0,2224	1,21	0,3869	1,83	0,4664	3,80	0,4999
0,60	0,2257	1,22	0,3883	1,84	0,4671	4,00	0,4999
0,61	0,2291	1,23	0,3907	1,85	0,4678	4,50	0,4999
0,62	0,2324	1,24	0,3925	1,86	0,4686	5,00	0,4999

Приложение В

Таблица значений $t_{\beta} = t(\beta, n)$

n	$\beta = 0,95$	$\beta = 0,99$	n	$\beta = 0,95$	$\beta = 0,99$
5	2,78	4,60	20	2,093	2,861
6	2,57	4,03	25	2,064	2,797
7	2,45	3,71	30	2,045	2,756
8	2,37	3,50	35	2,032	2,720
9	2,31	3,36	40	2,023	2,708
10	2,26	3,25	45	2,016	2,692
11	2,23	3,17	50	2,009	2,679
12	2,20	3,11	60	2,001	2,662
13	2,18	3,06	70	1,996	2,649
14	2,16	3,01	80	1,991	2,640
15	2,15	2,98	90	1,987	2,633
16	2,13	2,95	100	1,984	2,627
17	2,12	2,92	120	1,980	2,617
18	2,11	2,90	∞	1,960	2,576

Приложение Г

Таблица значений $q = q(\beta, n)$

n	$\beta = 0,95$	$\beta = 0,99$	n	$\beta = 0,95$	$\beta = 0,99$
5	1,37	2,67	20	0,37	0,58
6	1,09	2,01	25	0,32	0,49
7	0,92	1,62	30	0,28	0,43
8	0,80	1,38	35	0,26	0,38
9	0,71	1,20	40	0,24	0,35
10	0,65	1,08	45	0,22	0,32
11	0,59	0,98	50	0,21	0,30
12	0,55	0,90	60	0,188	0,269
13	0,52	0,83	70	0,174	0,245
14	0,48	0,78	80	0,161	0,226
15	0,46	0,73	90	0,151	0,211
16	0,44	0,70	100	0,143	0,198
17	0,42	0,66	150	0,115	0,160
18	0,40	0,63	200	0,099	0,136

Приложение Д

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы	Уровень значимости α		
	0,01	0,025	0,05
1	6,6	5,0	3,8
2	9,2	7,4	6,0
3	11,3	9,4	7,8
4	13,3	11,1	9,5
5	15,1	12,8	11,1
6	16,8	14,4	12,6
7	18,5	16,0	14,1
8	20,1	17,5	15,5
9	21,7	19,0	16,9
10	23,2	20,5	18,3
11	24,7	21,9	19,7
12	26,2	23,3	21,0
13	27,7	24,7	22,4
14	29,1	26,1	23,7
15	30,6	27,5	25,0
16	32,0	28,8	26,3
17	33,4	30,2	27,6
18	34,8	31,5	28,9
19	36,2	32,9	30,1
20	37,6	34,2	31,4

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с.
2. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / А.Б. Волощенко, І.А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2003. – 256 с.
3. Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – К.: Вища школа, 1988. – 438 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1979. – 400 с.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1977. – 479 с.
6. Гнеденко Б.В. Элементарное введение в теорию вероятностей / Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчин. – М.: ГПТИ, 1946. – 128 с.
7. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник. У 2ч. Ч.1. Теорія ймовірностей / В.І.Жлуктенко, С.І. Наконечний. –К.: КНЕУ, 2000.–304с.
8. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1974. – 130 с.
9. Колмогоров А.Н. Введение в теорию вероятностей / А.Н. Колмогоров, И.Г. Журбенко, А.В. Прохоров. – М.: Наука, 1982. – 160 с.
10. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. – М.: Юнити-Дана, 2007. – 573 с.
11. Ластівка І.О. Вища математика. Модуль Теорія ймовірностей. Випадкові величини: навч. посібник / І.О. Ластівка, В.П. Мартиненко, Ю.А. Паламарчук, І.В. Шевченко. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 164 с.
12. Ледяев С.Ф. Основы высшей математики: учеб. пособие / С.Ф. Ледяев, Ю.М. Рудов. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – 278 с.: ил..
13. Моцний Ф.В. Курс лекцій з теорії ймовірностей: навч. посіб./ Ф.В. Моцний. – К.: ДП „Інформаційно-аналітичне агенство”, 2010. – 122 с.
14. Плис А.И. МATHCAD 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина. - М.: Финансы и статистика, 2000.- 656 с.: ил.
15. Хрустальов О.Ф. Основы математического моделирования: навч. посібник/ О.Ф. Хрустальов.– Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2009.– 214 с.
16. Черняк О.І. Теорія ймовірностей та математична статистика / О.І. Черняк, О.М. Обушна, А.В. Ставицький. – К.: Знання, 2002. – 200 с.

17. Ластівка І. О. Вища математика. Модуль Теорія ймовірностей. Випадкові величини: навч. посібник/ І.О. Ластівка, В.П. Мартиненко, Ю.А. Паламарчук, І.В. Шевченко. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 164 с.
18. Хрустальов О.Ф. Основи математичного моделювання: навч. посібник/ О.Ф. Хрустальов.– Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2009.– 214с.

Предметный указатель

Асимметрия 69

Величина случайная 45

— — двумерная 91

— — дискретная 45, 97

— — непрерывная 52

— — центрированная 65

Величины случайные 91

— — зависимые 99

— — коррелированные 103

— — независимые 99

Вероятность доверительная 114, 115

— события 12

— определение геометрическое 14

— — классическое 13

— — статистическое 17

— попадания в заданный интервал непрерывной случайной величины 54

— условная 28

Выборка 105

Гипотеза 33, 120

— конкурирующая (альтернативная) 120

— нулевая 120

— простая 120

— сложная 120

— статистическая 120

Гистограмма 107

Дисперсия 64

— двумерной случайной величины 101

— дискретной случайной величины 65

— исправленная 113

— непрерывной случайной величины 65

— свойства 67

Доверительный интервал 115

Закон больших чисел 88

— распределения вероятностей 45

— — — биномиальный 47

— — — геометрический 49

— — — двумерной случайной величины 92

— — — нормальный 81

— — — показательный 78

— — — Пуассона 48

— — — Релея 79

- равномерной плотности 77
- – – условный 97

Испытание 6

Исход 7

Коэффициент корреляции 102

Кривая нормальная 81

- распределения 57

Критерий 120

- согласия 121

- – Пирсона 121

- статистический 120

Критические точки 121

Математическое ожидание 60

- – двумерной случайной величины 101

- – дискретной случайной величины 60

- – механическая интерпретация 61

- – непрерывной случайной величины 61

- – свойства 61

Медиана 62

Многоугольник распределения 46

Мода 62

Момент корреляционный 101

- начальный 68

- центральный 68

Наблюдаемое значение критерия 120

Неравенство больших чисел 88

- Чебышева 88

Область критическая 120

- принятия гипотезы 120

Оценка интервальная 111

- несмещенная 111

- смещенная 112

- состоятельная 112

- статистическая 111

- точечная 111

- эффективная 112

Ошибка второго рода 120

- первого рода 120

Перестановки 20

- с повторениями 22

Плотность распределения вероятностей 56

— — — вероятностный смысл 56

— — — двумерной случайной величины 96

— — — — — свойства 97

Поверхность распределения 96

Полигон относительных частот 108

— накопленных частот 108

Полная группа событий 7, 10

Правило трёх сигма 84

Произведение событий 8

Пространство элементарных событий 8

Размещения 20

— с повторениями 23

Распределение биномиальное 47

— Гаусса (нормальное) 81

— — общее 82

— — нормированное 82

— геометрическое 49

— показательное (экспоненциальное) 78

— Пуассона 48

— Релея 79

— равномерное 77

Ряд вариационный 106

— статистический 106

Событие 6

— достоверное 6

— невозможное 7

— случайное 7

— элементарное 7, 8

События единственно возможные 7

— зависимые 28

— независимые 28

— несовместные 7

— противоположные 7

— равновозможные 7

— совместные 9

Совокупность выборочная 105

— генеральная 105

— простая статистическая 105

Сочетания 21

— с повторениями 23

Среднее квадратическое отклонение 65

Сумма событий 7

Теорема Бернулли 89

– Муавра- Лапласа локальная 42

– – – интегральная 43

– о дисперсии числа появления событий в независимых испытаниях 67

– о математическом ожидании числа появления событий в независимых испытаниях 62

– сложения вероятностей несовместных событий 25

– – – совместных событий 27

– умножения вероятностей 29

– умножения законов распределения 199

– центральная предельная 90

– Чебышева 89

Уровень значимости 120

Формула Бернулли 40

– для вычисления дисперсии 65, 66

– полной вероятности 33

– Пуассона 42

Формулы Бейеса 35

Функция распределения вероятностей 51

– – – двумерной непрерывной случайной величины 94

– – – нормированная 82

– – – свойства 52

– – – статистическая 106

– Лапласа 43

Частота 107

– относительная 107

Эксцесс 69

Явление 6

Именной указатель

Бейес 35, 36, 141
Бернулли 18, 39, 40, 41, 42, 47, 51, 89, 133, 142
Гаусс 43, 81
Колмогоров 12
Лаплас 43, 44, 83, 85, 116, 125, 133, 158
Муавр- Лаплас 43, 44
Пирсон 121, 122, 124, 125, 126, 127
Пуассон 41, 42, 48, 122
Релей 79
Чебышев 88, 89, 90

Учебное пособие

Глеч Сергей Гариевич
Ледяев Сергей Фёдорович
Ольшанская Ирина Владимировна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Глеч Сергій Гарійович
Ледяєв Сергій Федорович
Ольшанська Ірина Володимирівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

(російською мовою)

Коректор Л.П.Светлих
Нормоконтролер І.О.Черєвкова
Авторський комп'ютерний набір

Підп. до друку 24.01.2012. Формат 89 х 124/16. Ум. друк. арк. 21,42.
Тираж 300 пр. Зам. № 65

Видавець та виготовлювач — Севастопольський національний
технічний університет. Адреса: вул. Університетська, 33,
м. Севастополь, 99053
тел. (0692) 435-210; 435-019. E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1272 від 17.03.2003 р