

УДК 681.3

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Бохонский А.И., Исаев А.В.

В системе аналитических вычислений Maple V создана программа, реализующая метод Ван-дер-Поля приближенного аналитического решения нелинейных уравнений. Эффективность программы иллюстрируется на примере.

Метод усреднения Ван-дер-Поля строго обоснован в [1]. В пособии по решению задач теоретической механики для студентов [2] при изложении метода Ван-дер-Поля (он назван методом медленно меняющихся амплитуд) на примере уравнений первого порядка, к сожалению, допущены опечатки.

На возможность эффективного использования компьютерных систем аналитических вычислений при поиске решений нелинейных дифференциальных уравнений и решении многих задач механики обращено внимание в [3,4]. В этих работах показано, что в системе Maple V Power Edition достаточно просто реализуется алгоритм метода последовательных приближений решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Отметим, что язык высокого уровня, позволяющий реализовать методы решения нелинейных уравнений, должен отвечать следующим требованиям: реализовывать аналитические вычисления; охватывать все возможные операции, предусмотренные реализуемым методом; универсальность должна быть такова, чтобы исключить интерактивное вмешательство в процессе вычисления; должна быть обеспечена возможность проверки решения путем численного интегрирования с графической визуализацией результатов.

Метод Ван-дер-Поля может быть успешно реализован в современных системах аналитических вычислений. Далее реализация метода в системе Maple V иллюстрируется на примере аналитического решения дифференциального уравнения свободных колебаний системы с одной степенью свободы с малой нелинейностью.

Исходное уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \kappa^2\varphi = \mu\varphi^3, \quad (1)$$

где $\mu = \frac{\kappa^2}{6}$, преобразуется в соответствии с методом Ван-дер-Поля к системе:

$$\frac{da}{dt} = - \frac{\mu}{2\pi \kappa} \int_0^{2\pi} f(a \sin \Psi, a \kappa \cos \Psi) \cos \Psi d\Psi, \quad (2)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \frac{\mu}{2\pi \kappa a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \Psi, a \kappa \cos \Psi) \sin \Psi d\Psi,$$

где $\Psi = \kappa t + \alpha$; $a(t)$ и $\alpha(t)$ – амплитуда и начальная фаза являются медленно меняющимися функциями во времени; $f(a \sin \Psi, a \kappa \cos \Psi) = \sin^3 \Psi$. После интегрирования системы уравнений [2] искомое решение исходного уравнения (1) записывается как

$$x(t) = a(t) \sin[\kappa t + \alpha(t)]. \quad (3)$$

Далее приводится программа аналитических преобразований, которая реализует метод Ван-дер-Поля. Программа полностью исключает интерактивный режим и позволяет приближенно решать нелинейные уравнения с различным типом слабой нелинейности; она снабжена подробными комментариями. Аналитическое решение нелинейного уравнения дополнительно проверено при интегрировании численным методом.

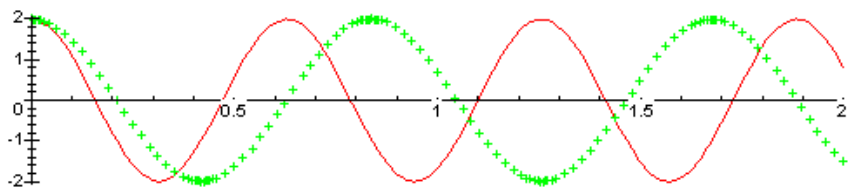
```
> restart; # РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
> ff(ps):=a^3*sin(ps)^3:
> da:=int(ff(ps)*cos(ps),ps=0..2*Pi)*mu/(2*Pi*k);          # интегрирование
da := 0
> dal:=-int(ff(ps)*sin(ps),ps=0..2*Pi)*(k^2/6)/(2*Pi*k*a);  # интегрирование
dal := - 1/16 a^2 k
> dsolve({diff(a(t),t)=0},{a(t)});
a(t) = _C1
> dsolve({diff(al(t),t)=-k*_C1^2/16},{al(t)});
al(t) = - 1/16 k _C1^2 t + _C2
> f(t):=rhs("")*sin(k*t+rhs(""));          # аналитическое решение
f(t) := - _C1 sin(-k t + 1/16 k _C1^2 t - _C2)
> t:=0:          # определение произвольных постоянных (начало)
> b1:=""-a0;
> t:='t';
> df(t):=diff(f(t),t);
b1 := _C1 sin(_C2) - a0
> t:=0;          # определение произвольных постоянных (продолжение)
> b2:="";
```

```

b2 := -_C1 cos(_C2) (-k + 1/16 k _C1^2)
> soln:=solve({b1,b2},{_C1,_C2});
soln := {_C2 = 1/2 Pi, _C1 = a0}, {_C1 = -a0, _C2 = - 1/2 Pi},
        {_C1 = 4, _C2 = arctan(a0, RootOf(a0^2 + _Z^2 - 16))},
        {_C1 = -4, _C2 = arctan(- 1/4 a0, 1/4 RootOf(a0^2 + _Z^2 - 16))}
> t:=t';
> soln[1];
> f(t):=-subs(soln[1],_C1)*sin(-k*t+1/16*k*subs(soln[1],_C1)^2*t-
subs(soln[1],_C2));
        # решение с учетом найденных произвольных постоянных
        {_C2 = 1/2 Pi, _C1 = a0}
f(t) := a0 cos(-k t + (1/16) k a0^2 t)

> a0:=2.0:k:=10.0:          # численный пример
> f(t);#f(t)-график аналитического решения нелинейного уравнения (линия);
        a0*cos(-k*t)- график решения линейного уравнения (точки)
> plot({f(t),a0*cos(-k*t)},t=0..2,style=[line,point]);
        a0 cos(-k t + 1/16 k a0^2 t)

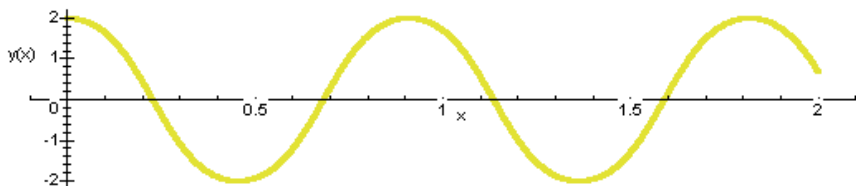
```



```

> restart;
> with(DEtools):  # численное интегрирование исходного нелинейного
уравнения
> s:=diff(y(x),x$2)+100.0*y(x)=(100.0/6.0)*y(x)^3:
> DEplot({s},{y(x)},x=0..2.0,[[y(0)=2.0,D(y)(0)=0.0]],stepsize=0.001);

```



ПРИМЕЧАНИЕ: В ПРОГРАММЕ ИСПОЛЬЗОВАЛИСЬ ФУНКЦИИ
➤ И КОМАНДЫ int, dsolve, diff, solve, subs, plot,
> # DEplot из библиотеки Detools

Хотя известные в настоящее время математические пакеты осуществляют численное интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений и находят в ряде случаев точные решения линейных, но современные системы аналитических вычислений на ЭВМ обладают такими универсальными возможностями, которые позволяют создать пакеты программ приближенного аналитического решения многих классов нелинейных дифференциальных уравнений.

Авторы пользуются случаем, чтобы выразить благодарность создателям пакета Maple V – компании Maple Waterloo.

Библиография

1 Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю.А. Митропольский. — К.: Наук. думка, 1971. — 440 с.

2 Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. — М.: Наука, 1973. — Т. 3. — 448 с.

3 Бохонский А.И. Реализация математических методов анализа нелинейных колебательных процессов в компьютерных системах аналитических вычислений / А.И. Бохонский, Л.А. Шмидт // Вестн. СевГТУ. Механика, энергетика, экология: Сб. научн. тр. — Севастополь, 1997. — Вып. 25. — С. 30–35.

4 Бохонский А.И. Использование систем аналитических вычислений (САВ) в курсе сопротивления материалов / А.И. Бохонский // Вестн. СевГТУ. Педагогика: Сб. науч. тр. — Севастополь, 1999. — Вып. 22. — С. 27–31.

Поступила в редакцию 3.11.2000 г.