

УДК 519.3: 65.011.56: 621.865.8

А.И. Бохонский, А.Н. Круговой*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ФУНКЦИОНАЛ ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТА**

По аналитической функции найдено дифференциальное уравнение Эйлера и соответствующий ему функционал, как критерий оптимального перемещения объекта.

Ключевые слова: аналитическая функция, дифференциальное уравнение, функционал, оптимальное движение.

Работа [1], посвященная 300-летию со дня рождения Л. Эйлера, содержит исследования взаимосвязи вариационного исчисления с вариационными принципами механики, в ней дано математическое обоснование принципа Мопертюи – Эйлера – Лагранжа.

Из современной литературы можно указать, например, [2] с разделом, посвященным вариационному исчислению. Ряд простых задач восстановления функционалов по заданным функциям («реверсионное исчисление») приведены в [3].

Цель статьи – восстановление по заданной аналитической функции функционала как критерия оптимального движения объекта.

Пример. Восстановление функционала.

Исходная функция

$$U_e(t) = a \cos^3 pt \quad (1)$$

представима как

$$U_e(t) = \frac{3}{4} \cos(pt) + \frac{1}{4} \cos(3pt). \quad (2)$$

Естественно, что (2) может быть решением следующего обыкновенного однородного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\frac{d^4 U_e}{dt^4} + 2A \frac{d^2 U_e}{dt^2} + BU_e = 0, \quad (3)$$

у которого корни характеристического уравнения

$$r^4 + 2Ar^2 + B = 0, \quad (4)$$

$$r_1 = i\alpha_1, \quad r_2 = -i\alpha_1, \quad r_3 = i\alpha_2, \quad r_4 = -i\alpha_2,$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{A + \sqrt{A^2 - B}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{A - \sqrt{A^2 - B}}. \quad (5)$$

Из (2) и (5) следует, что

$$\alpha_1 = 3p, \quad \alpha_2 = p. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и решая систему алгебраических уравнений, получим значения коэффициентов дифференциального уравнения (3): $A = 5p^2$, $B = 9p^4$. Теперь уравнение записывается так:

$$\frac{d^4 U_e}{dt^4} + 10p^2 \frac{d^2 U_e}{dt^2} + 9p^4 U_e = 0. \quad (7)$$

Для проверки уравнения (7) использовано его решение:

$$U_e(t) = C_1 \cos 3pt + C_2 \sin 3pt + C_3 \cos pt + C_4 \sin pt. \quad (8)$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 найдены с учетом условий

$$U_e(0) = a, \quad U_e(T/2) = 0; \quad \dot{U}_e(T/2) = 0, \quad \ddot{U}_e(T/2) = 0 \quad (9)$$

и дополнительного требования $p = \pi/T$, которое исключает нулевой знаменатель в выражениях для произвольных постоянных. Система алгебраических уравнений (9) принимает вид

$$C_1 + C_3 - a = 0, \quad 3C_1 - C_3 = 0, \quad -C_2 + C_4 = 0, \quad 9C_2 - C_4 = 0; \quad (10)$$

она имеет решение: $C_1 = a/4$; $C_2 = 0$; $C_3 = 3a/4$; $C_4 = 0$. (11)

При полученных значениях постоянных функция (8) преобразуется к (1), что подтверждает правильность уравнения (7), найденного по функции (1).

Другая проверка корректности уравнения (7) состоит в преобразовании исходной функции (1) к системе

$$\frac{d^2 U_e}{dt^2} = 6a \cos(pt) \cdot \sin^2(pt) \cdot p^2 - 3U_e p^2, \quad \frac{d^4 U_e}{dt^4} = -60a \sin^2(pt) \cdot p^4 \cos pt + 21U_e p^4. \quad (12)$$

После исключения первых членов в правых частях, из (12) естественно следует уравнение (7), которое дальше предполагается уравнением Эйлера для функционала, зависящего от U_e и производных, т.е.

$$J_1 = \int_0^T F(U_e, \dot{U}_e, \ddot{U}_e) dt. \quad (13)$$

В общем виде уравнение Эйлера, соответствующее функционалу (13):

$$\frac{\partial F}{\partial U_e} - \frac{d}{dt}(F_{\dot{U}_e}) + \frac{d^2}{dt^2} F_{\ddot{U}_e} = 0. \quad (14)$$

На основании (7) в соответствии с (14) найден функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [9p^4 U_e^2 - 10p^2 \dot{U}_e^2 + \ddot{U}_e^2] dt. \quad (15)$$

Функция (1) может использоваться как ускорение либо замедление в переносном движении (разгон либо торможение объекта).

Для определения скорости и перемещения объекта функция (1) дважды интегрируется, т.е. фактически находится решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 S_e}{dt^2} = a \cos^3(pt). \quad (16)$$

Пример торможения объекта до полного гашения скорости за время T .

Для определения произвольных постоянных интегрирования D_1 и D_2 , максимального ускорения a и пути L , пройденного объектом до остановки, использованы краевые условия

при $t = 0$ $S_e(0) = 0$, $V_e(0) - V_0 = 0$, при $t = T$ $S_e(T) - L = 0$, $V_e(T) = 0$, которые приводят к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{-7a}{p^2} + D_2 = 0; \quad D_1 - V_0 = 0; \quad \frac{a}{3p} \left(\frac{1}{3} \cos^3(pt) + 2 \cos pt \right) + D_1 T + D_2 - L = 0; \\ \frac{a}{3p} \sin pt (\cos^2(pt) + 2) + D_1 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

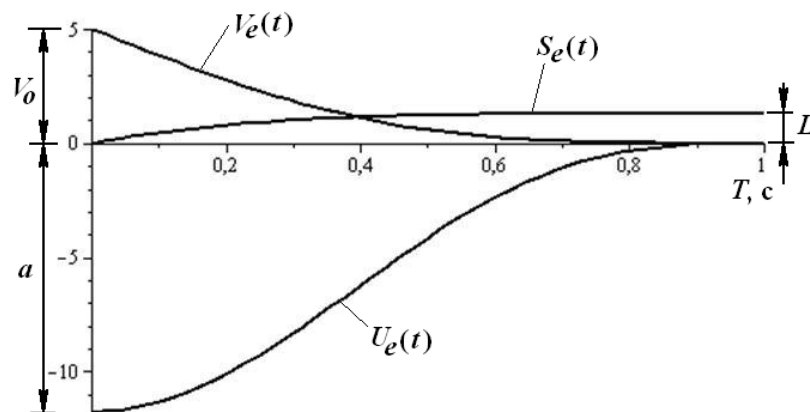
С целью устранения деления на ноль принято $p = \pi/2T$. Решение системы (17):

$$D_1 = V_0, \quad D_2 = -\frac{7TV_0}{3\pi}, \quad a = -\frac{3\pi V_0}{4T}, \quad L = \frac{V_0 T}{3\pi} (3\pi - 7). \quad (18)$$

Теперь выражение для перемещения, скорости и ускорения принимают вид:

$$\begin{aligned} S_e(t) &= \frac{V_0 T}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos^3 pt + 2 \cos pt \right) + V_0 t - \frac{7TV_0}{3\pi}; \\ V_e(t) &= -V_0 (\cos^2 pt \sin pt + 2 \sin pt) + V_0; \\ U_e(t) &= -\frac{3\pi V_0}{4T} \cos^3(pt), \end{aligned} \quad (19)$$

где $p = \pi/2T$. Графики $S_e(t)$, $V_e(t)$, $U_e(t)$ ($T = 1$ с, $V_0 = 5$ м/с) изображены на рисунке 1.

Рисунок 1 – Графики $S_e(t)$, $V_e(t)$, $U_e(t)$

За время торможения объект проходит путь $S_e(t) = 1,286$ м. В момент времени $t = T$ скорость $V_e(T)$ и ускорение $U_e(T)$ равны нулю и наступает покой.

Исследовано движение объекта при различных ускорениях

$$U_e(t) = a \cos^{2n-1}(pt), \quad (20)$$

где $n = 1, 2, 3, 4$. В таблице 1 приведены результаты вычислений параметров, характеризующих движение ($S_e(T)$, $|a|$, $\int_0^T U_e^2 dt$).

Таблица 1 – Параметры движения объекта

n	$S_e(t), \text{ м}$	$ a , \text{ м/с}^2$	$\int_0^T U_e^2 dt, \text{ м}^2/\text{с}^3$
1	1,817	$\frac{\pi V_0}{2T}$	$1,237 \frac{V_0^2}{T}$
2	1,286	$\frac{3\pi V}{4T}$	$1,735 \frac{V_0^2}{T}$
3	1,045	$\frac{15 \pi V_0}{16 T}$	$2,135 \frac{V_0^2}{T}$
4	0,905	$\frac{35 \pi V_0}{32 T}$	$2,473 \frac{V_0^2}{T}$

Заключение

В некоторых задачах механики используются процедуры, приводящие к оперированию величинами, физические размерности которых не тождественны общепринятым. Например, в теореме Резаля, являющейся кинематической интерпретацией теоремы об изменении кинематического момента системы, «скорость» имеет размерность момента. Теорема используется при описании движения твердого тела с одной неподвижной точкой, в теории гироскопов [4]. В теории оптимального управления критерий нормы мощности не соответствует размерности энергии либо мощности, но его использование приводит к простому и полезному для практики результату [5].

Функционал (11), как критерий оптимального движения объекта, по математическому образу напоминает вариационный принцип действия и отражает оптимальное движение объекта.

Интеграл $\int_0^T [U_e(t)]^2 dt$ характеризует энергетические затраты на управляемое движение (норму мощности). С ростом энергопотребления возрастает максимальное по абсолютной величине значение замедления объекта и уменьшается длина пути до полной остановки. Рассмотренное управление (ускорение) в виде (1) применимо для оптимального перемещения упругих объектов.

Предложенный подход позволяет задаваемые кинематические свойства движения в виде аналитических функций оценивать с точки зрения их оптимальности по восстановленному функционалу – критерию.

Дальнейшие исследования связаны с применением реверсионно восстанавливаемых функционалов для оценки оптимального движения упругих систем с конечным числом степеней свободы.

Библиографический список использованной литературы

1. Спасский Р.А. Классическое вариационное исчисление и вариационные принципы механики: учеб. пособие / Р.А. Спасский. — Севастополь: СевНТУ, 2004. — 176 с.
2. Пантелеев Л.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / Л.В. Пантелеев, Т.Л. Летов. — М.: Высш. шк., 2002. — 544 с.
3. Бохонский А.И. Вариационное и реверсивное исчисления в механике: монография / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская. — Севастополь: СевНТУ, 2012. — 212 с.
4. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики. Т. II. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.П. Лунц, Д.Р. Меркин. — М.: Наука, 1985. — 496 с.
5. Теория автоматического управления. Ч II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / под ред. А.А. Воронова. — М.: Высш. школа, 1977. — 288 с.

Поступила в редакцию 16.04.2013 г.

Бохонський О.І., Круговий О.М. Функціонал оптимального переміщення об'єкта

По заданій аналітичній функції одержано диференціальне рівняння Ейлера і відповідний йому функціонал як критерій оптимальності переміщення об'єкта.

Ключові слова: аналітична функція, диференціальне рівняння, функціонал, оптимальне переміщення об'єкта.

Bokhonsky A.I., Krugovoi A.N. Optimal functional movement of the object

For a given analytic function the differential equation and the corresponding Euler functional as a optimality criterion for moving the object.

Keywords: analytic function, differential equation, functionality, optimum movement of the object.