

УДК 681.3

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Бохонский А.И.

В системе аналитических вычислений Maple V создана программа поиска методом Галеркина приближенного аналитического решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений.

Наблюдаемый прогресс в моделировании сложных систем связан с переходом от линейных моделей и ставших традиционными численных экспериментов к нелинейным и аналитическим экспериментам с использованием систем компьютерной алгебры. Современное математическое обеспечение ЭВМ позволяет находить точные аналитические решения линейных дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), а для нелинейных дифференциальных уравнений реализованы в виде отдельных процедур методы численного интегрирования. Приближенные аналитические методы решения нелинейных дифференциальных уравнений, эффективно используемые, например, при исследовании колебаний сложных механических систем, и до настоящего времени не нашли своего отражения в математическом обеспечении ЭВМ.

Реализация метода Галеркина в системе Maple V иллюстрируется на примере нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с численными значениями коэффициентов. При чисто символьных коэффициентах в общем случае поиск решения не представляется возможным даже при использовании систем компьютерной алгебры.

Согласно методу Галеркина, при решении нелинейных уравнений, удовлетворяющих исходным уравнениям “в среднем” за цикл колебаний [1], неизвестные параметры находятся из условий равенства нулю средних значений виртуальной работы за цикл. Этим методом удобно находить частные решения нелинейных уравнений в случае вынужденных колебаний.

Дальше реализация метода иллюстрируется на примере. Дифференциальное уравнение записывается в операторном виде

$$L(x) = 2\cos(4t), \quad (1)$$

где дифференциальный оператор $L(x)$ записывается как

$$L(x) \equiv \ddot{x} + 100x - 100x^3 / 6. \quad (2)$$

В первом приближении вынужденные колебания предполагаются гармоническими с частотой $\omega = 4$ рад/с и решение ищется в виде:

$$x_1(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t = C \cos(\omega t + \alpha), \quad (3)$$

где неизвестными являются постоянные C и α . Для определения C и α в соответствии с методом Бубнова-Галеркина используются условия ортогональности

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} L(x_1) \cos \omega t \, dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi/\omega} L(x_1) \sin \omega t \, dt &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

которые приводят к системе уравнений:

$$\begin{aligned} 65,9734 \cos(\alpha) C - 9,9875 \cos(\alpha) C^3 - 1,5707 &= 0, \\ -65,9734 \sin(\alpha) C - 9,9875 \sin(\alpha) C^3 - 1,5707 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) имеет шесть пар корней, из которых в соответствии с теоремой существования и единственности решения [3] уравнения (1) взяты:

$$C = 0,0238, \quad \alpha = 0,0.$$

Тогда частное решение примет вид:

$$x_1(t) = 0,0238 \cos(4t). \quad (6)$$

Естественно, что на данном этапе невозможно проверить полученное решение путем непосредственного численного интегрирования исходного уравнения. Поэтому для поиска общего решения однородного нелинейного дифференциального уравнения использовался метод Ван-дер-Поля, который также был реализован в системе Maple V. Общее решение однородного уравнения в этом случае

$$x_*(t) = -C_1 \sin(C_1^2 10t/16 - 10t - C_2), \quad (7)$$

где произвольные постоянные C_1, C_2 должны быть найдены из начальных условий для общего решения неоднородного уравнения. В данном случае при $t=0$ начальные условия:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Реализация начальных условий для суммы решений (6) и (7) приводит к системе нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} 0,002381 + C_1 \sin C_2 &= 0; \\ C_1 \cos C_2 (-10,0 + 0,625 C_1^2) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Система (8) имеет шесть пар корней, из которых в соответствии с теоремой существования и единственности решения взяты следующие:

$$C_1 = -0,0281; \quad C_2 = 1,5707. \quad (9)$$

Итак, окончательно приближенное общее решение исходного нелинейного уравнения принимает вид:

$$x(t) = 0,02381 \cos(4t) - 0,02381 \sin(10,0 + 1,5708). \quad (10)$$

Следует отметить, что для данного исходного нелинейного дифференциального уравнения, описывающего колебания системы с нелинейной восстанавливающей силой, справедлив принцип суперпозиции и общее решение – это сумма решений (6) и (7). На графиках, представленных непосредственно в программе, приведены результаты табуляции зависимости (10) и численного интегрирования исходного уравнения при нулевых начальных условиях. Графики решений практически совпадают.

При написании программы на языке Maple V использовались функции: diff, int, solve, subs; из библиотеки DEtools – функция DEplot численного интегрирования уравнения с непосредственным графическим представлением результатов[2]. Программа на языке Maple V прилагается. В этой программе опущен блок, реализующий метод Ван-дер-Поля для поиска общего решения однородного уравнения (для дальнейших вычислений взят ранее полученный окончательный результат).

Программа позволяет находить решения в широком диапазоне изменения коэффициентов исходного уравнения и начальных условий.

> restart; om:=4.0;q:=2.0:# МЕТОД ГАЛЕРКИНА ПОИСКА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

```
> U1:=diff(x(t),t$2)+100.0*x(t)-(100.0*x(t)^3)/6.0-q*cos(om*t):
> x(t):=c*cos(om*t+aL):
> U(t):=diff(x(t),t$2)+100.0*x(t)-(100.0*x(t)^3)/6.0-q*cos(om*t):
> A1:=int(U(t)*cos(om*t),t=0..2*Pi/om):
> A2:=int(U(t)*sin(om*t),t=0..2*Pi/om):
> soln:=solve({A1,A2},{c,aL});
```

```
soln := {aL = 0, c = -2.604120024}, {aL = 0, c = .02381153287},
```

```
{aL = 0, c = 2.580308491}, {aL = 3.141592654, c = -2.580308491},
{aL = 3.141592654, c = -.02381153287},
{aL = 3.141592654, c = 2.604120024}
```

```
> x2(t):=subs(soln[2],c)*cos(om*t+subs(soln[2],aL));
```

```

x2(t) := .02381153287 cos(4.0 t)
> y2(t):=-C1*sin(-10.0*t+C1^2*t*10.0/16.0-C2): # ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ
ОДНОРОДНОГО НАЙДЕНО МЕТОДОМ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ
> xx(t):=.2381153287e-1*cos(4.0*t)+y2(t):

```

```

> t:=0.0:
> z1:="":
> t:=t':
> dxx(t):=diff(.2381153287e-1*cos(4.0*t)+C1*sin(10.0*t-
6250000000*C1^2*t+C2),t):

```

```

> t:=0.0:
> z2:="":
> om:=4.0;q:=2.0:
> soln:=solve({z1,z2},{C1,C2});

```

```

soln := {C1 = -.02381153287, C2 = 1.570796327},

```

```

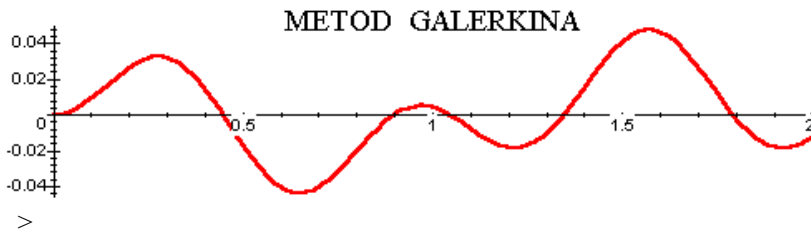
{C1 = .02381153287, C2 = -1.570796327},
{C1 = 4., C2 = -3.135639735}, {C1 = 4., C2 = -.005952918377},
{C1 = -4., C2 = 3.135639735}, {C1 = -4., C2 = .005952918377}

```

```

> t:=t':
> xx(t):=.2381153287e-1*cos(4.0*t)-subs(soln[1],C1)*sin(-
10.0*t+.6250000000*(subs(soln[1],C1))^2*t-subs(soln[1],C2)):
> plot({xx(t)},t=0..2,title='METOD GALERKINA',thickness=2);

```

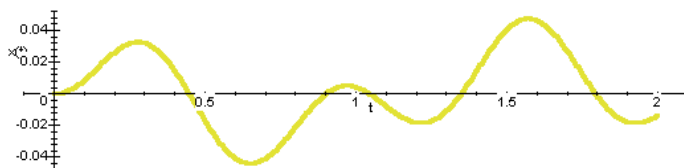


```

> # ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИСХОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВ-
НЕНИЯ
> restart;
> with(DEtools): om:=4.0: q:=2.0:
> U(t):=diff(x(t),t$2)+100.0*x(t)-(100.0*x(t)^3)/6.0-q*cos(om*t):

```

> DEplot({U(t)},{x(t)},t=0.0..2.0,[[x(0)=0.0,D(x)(0)=0.0]],stepsize=0.005);



>#при реализации метода Галеркина в MAPLE V использовались функции:
> diff,int,solve,subs,DEplot

Выражаю благодарность фирме Waterloo Maple Inc за использование математической системы, позволяющей программировать приближенные аналитические методы решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Библиография

1 Вибрации в технике: Справ.: В 6 т. — М.: Машиностроение, 1979 — Т.2.: Колебание нелинейных механических систем. — 351 с.

2 Дьяконов В.П. Математическая система Maple V R3/R4/R5 / В.П. Дьяконов. — М.: Изд-во “Салон”, 1998. — 400 с.

3 Корн Г. Справочник математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1977. — 932 с.

Поступила в редакцию 5.01.2001 г.