

УДК 621.833

В.П. Прохоров, профессор, канд. техн. наук,**В.А. Щипаков, ст. научный сотрудник***Александровский филиал Российского нового университета**ул. Советская 25а, г. Александров, Россия, 601652**E-mail: afrosnou2009@yandex.ru***Г.А. Тимофеев, профессор, д-р техн. наук****И.Н. Чернышева, доцент, канд. техн. наук***Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана**ул. 2-я Бауманская, д.5, Москва, Россия, 105005**E-mail: bauman@bmstu.ru***СИНТЕЗ ПЛОСКИХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ПО КРИТЕРИЮ
ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ ТОЧКИ КОНТАКТА**

Обоснована актуальность постановки задачи. На базе математической модели плоских зацеплений с постоянным передаточным отношением рассмотрено решение задачи синтеза взаимноогibaемых профилей зубьев колес и инструментальной рейки по критерию относительной скорости точки контакта. Подробно рассмотрены случаи линейной, постоянной и нулевой скоростей.

Ключевые слова: плоские зацепления, точка контакта, алгоритм синтеза, относительная скорость.

Введение

Первое применение зубчатых передач началось несколько тысячелетий назад в Древнем Египте. Проблема повышения качества и технологичности, естественно, возникла с момента их изобретения. Предложенную Л. Эйлером эвольвентную передачу в современных терминах можно рассматривать как результат решения задачи оптимизации по критерию технологичности.

Разработке прямых методов оптимизации форм профилей зубьев колес плоских зацеплений посвящены работы М.Ф. Ленского [1]. Прямые методы оптимизации пространственных зацеплений приведены в [2-4]. В [5, 7] изложена системная концепция проектирования механизмов произвольной

структуры. В настоящей работе *предложен алгоритм однокритериальной оптимизации по критерию относительной скорости точки контакта.* Использование алгоритма позволило получить линию зацепления, форму профилей зубьев зубчатых и реечных передач с линейной, постоянной и нулевой скоростями контактной точки. В результате выполненных исследований, в частности, появляется возможность эффективно распределить на профилях зубьев маслопроводы в передаче с гидростатической смазкой.

1. Постановка задачи

Работа является естественным продолжением изложенных в [1-7] общих концепций и методов. Известно, что величина и направление относительной скорости точки контакта по профилям зубьев сопряженных колес существенно влияет на условия образования и устойчивость масляного слоя в контактной зоне [8]. Возможна и другая интерпретация решаемой задачи. При постоянной скорости точка контакта M_j за равные угловые перемещения колеса проходит по профилю зуба F_j равные длины дуг, занимая положения 1, 2, ..., 5 на рисунке 1. Если в такой передаче с гидростатической смазкой каналы (маслопроводы) для подвода смазки в M_j на F_j расположить равноудаленными в точках 1, 2, ..., 5, то каналы 1'-5' на ступице колеса, через которые поступает смазка от насосной станции и маслораспределителя M , также можно расположить

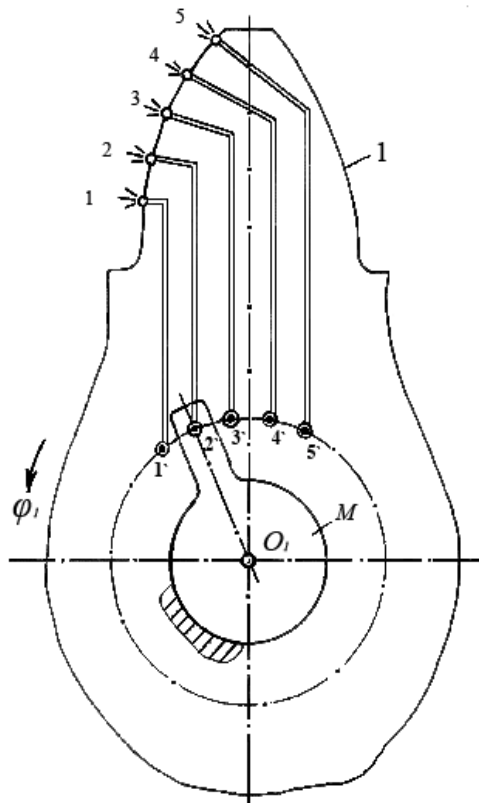


Рисунок 1 – Зубчатое колесо передачи с гидростатической смазкой и постоянной скоростью контактной точки по профилю зуба

равномерно по окружности радиуса O_1-1' . Это позволяет существенно упростить конструкцию зубчатого колеса и повысить эффективность передачи с гидростатической смазкой и, как следствие, повысить надежность и точность позиционирования привода стола делительного устройства.

Математическая модель и алгоритм синтеза

Математическую модель плоского зацепления с постоянным передаточным отношением можно представить в виде [1, 2]:

$$v_j = -a_j \omega_j \sin \alpha + r(\dot{\alpha} - \omega_j), \quad (1)$$

$$\dot{r} + a_j \omega_j \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$k_j = (\dot{\alpha} - \omega_j) / v_j, \quad (3)$$

где $j=1,2$ – индекс колеса; v_j – скорость точки контакта по профилю зуба; a_j – радиус центроиды; ω_j – угловая скорость; α – угол зацепления; r – расстояние от точки контакта до полюса зацепления; k_j – кривизна профиля зуба, точка над параметром означает его производную по времени t .

Рассмотрим алгоритм синтеза по заданной относительной скорости точки контакта в виде

$$v_j = F(\varphi_1), \quad (4)$$

где $\varphi_1 = \omega_1 t$ – угол поворота 1-ого колеса. Тогда уравнения (1)–(2) с учетом (4) образуют систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \omega_j + \frac{a_j \omega_j \sin \alpha + F(\varphi_1)}{r}, \\ \dot{r} = -a_j \omega_j \cos \alpha. \end{cases} \quad (5)$$

Выразив r из (1), продифференцировав эту функцию по времени и воспользовавшись (2), получим дифференциальное уравнение 2-ого порядка, эквивалентное системе (5):

$$\frac{a_j \omega_j \cos \alpha \dot{\alpha} + \dot{F}(\varphi_1)}{\dot{\alpha} - \omega_j} - \frac{a_j \omega_j \sin \alpha + F(\varphi_1)}{(\dot{\alpha} - \omega_j)^2} \ddot{\alpha} = -a_j \omega_j \cos \alpha. \quad (6)$$

Оно может быть решено относительно функции $\alpha(t)$ с начальными условиями $\alpha(0) = \alpha_0$, $\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0$. Функцию $r(t)$ получим интегрированием (2). Функции $\alpha(t)$, $r(t)$ определяют «размеченную» линию зацепления в полярных координатах. Переходя стандартным образом к координатным системам колес и рейки, получим соответствующие профили зубьев.

Частные решения задачи

Рассмотрим сначала случай, когда скорость задается линейной функцией

$$F(\varphi_1) = b_0 + bt. \quad (7)$$

Определим решения системы (5) с конечной производной $\dot{\alpha}$, для линий зацепления, проходящих через полюс. Без ограничения общности для линий зацепления можно в качестве начальной точки взять $r = 0$. Тогда условие конечности $\dot{\alpha}$ при $r = 0$ принимает вид:

$$b_0 = -a_j \omega_j \sin \alpha_0.$$

Заметим, что частным случаем линейной функции (7) является скорость в классическом эвольвентном зацеплении ($\alpha = \text{const}$):

$$v_j = -a_j \omega_j \sin \alpha_0 - \omega_j (r_0 - a_j \omega_j \cos \alpha_0 t).$$

Линии для внешнего зацепления с $a_1 = 50$ мм для функции (7), проходящие через полюс, показаны на рисунке 2, а профили зубьев – на рисунке 3.

Рассмотрим подробнее случай $F(\varphi_1) = v_0 = \text{const}$. Дифференциальное уравнение (6) принимает вид

$$\ddot{\alpha} = \frac{\cos \alpha (\dot{\alpha} - \omega_j)(2\dot{\alpha} - \omega_j)}{\sin \alpha + \eta_0}, \quad (8)$$

где $\eta_0 = \frac{v_0}{a_j \omega_j} = \text{const}$. Линию зацепления $r(\alpha)$ можно получить, не прибегая к решению дифференциального уравнения (8). Действительно, из (1) – (2) следует

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{r}} = \frac{\omega_j + \frac{v_j + a_j \omega_j \sin \alpha}{r}}{-a_j \omega_j \cos \alpha}. \quad (9)$$

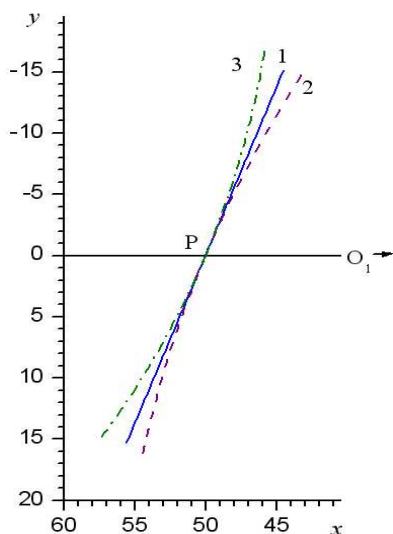


Рисунок 2 – Линии зацепления для случая $v_j = b_0 + bt$:
1 – $b = 47$ (эвольвентное зацепление); 2 – $b = 25$;
3 – $b = 75$

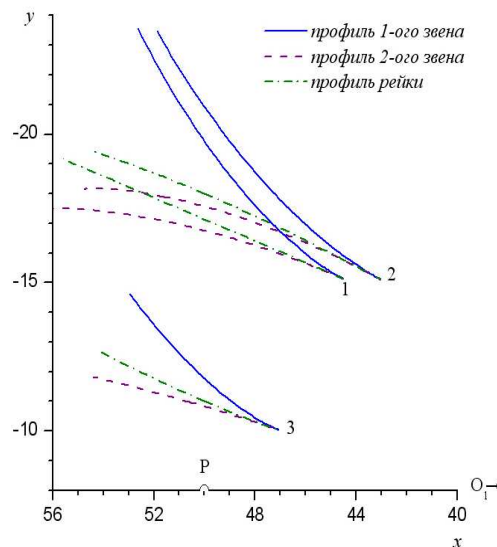


Рисунок 3 – Профили звеньев для случая $v_j = b_0 + bt$:
1 – $b = 47$ (эвольвентное зацепление); 2 – $b = 25$;
3 – $b = 75$

Введем функцию $s = \sin \alpha$. Уравнение (9) принимает вид: $\frac{ds}{dr} = -\frac{s}{r} - \frac{\eta_0}{r} - \frac{1}{a_j}$.

Положим $s = \frac{u}{r}$. Отсюда следует $\frac{du}{dr} = -\eta_0 - \frac{r}{a_j}$.

Решение этого уравнения запишем в форме $u = u_0 - \eta_0 r - \frac{r^2}{2a_j}$.

Таким образом,

$$\sin \alpha = \frac{u_0}{r} - \eta_0 - \frac{r}{2a_j}. \quad (10)$$

Отсюда получаем

$$r^2 + 2a_j(\sin \alpha + \eta_0)r - 2a_j u_0 = 0. \quad (11)$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$r = -a_j(\sin \alpha + \eta_0) \pm a_j \sqrt{(\sin \alpha + \eta_0)^2 + c_0}. \quad (12)$$

Параметр c_0 можно выразить из начальных условий с помощью (10):

$$c_0 = \frac{2u_0}{a_j} = \frac{2r_0}{a_j} \left(\eta_0 + \frac{r_0}{2a_j} + \sin \alpha_0 \right) = \frac{r_0^2}{a_j^2 \omega_j} (2\dot{\alpha}_0 - \omega_j).$$

Дифференцируя по времени формулу для линии зацепления (12) с учетом (2), получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{\alpha} = \pm \frac{\omega_j \sqrt{(\sin \alpha + \eta_0)^2 + c_0}}{-(\sin \alpha + \eta_0) \pm \sqrt{(\sin \alpha + \eta_0)^2 + c_0}} = \frac{\omega_j}{1 \mp \frac{\sin \alpha + \eta_0}{\sqrt{(\sin \alpha + \eta_0)^2 + c_0}}}. \quad (13)$$

Его общее решение имеет вид

$$\varphi_j = (\alpha - \alpha_0) \mp \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{(\sin \alpha + \eta_0)}{\sqrt{(\sin \alpha + \eta_0)^2 + c_0}} d\alpha.$$

Запишем линию зацепления (12) в декартовых координатах

$$x = a_1 + r \sin \alpha, \quad y = -r \cos \alpha.$$

С учетом (11) имеем $(x - a_1)^2 + y^2 = r^2 = -2a_j(x - a_1) - 2a_j\eta_0 r + a_j^2 c_0$.

Перепишем это равенство в переменных $\tilde{x} = x - a_1$, $\tilde{y} = y$:

$$(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 2a_j\tilde{x} - a_j^2 c_0)^2 = 4a_j^2 \eta_0^2 (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2). \quad (14)$$

Уравнение (14) при $c_0 = 0$ описывает улитку Паскаля, а при $\eta_0 = 0$ ($v_j = 0$) – окружность с центром $(x_0 = a_1 - a_j, y_0 = 0)$ и радиусом $R_0 = a_j \sqrt{c_0 + 1}$.

Координаты профилей зубьев определяются формулами

$$\begin{aligned} x_j &= a_j \cos \varphi_j + r \sin(\alpha - \varphi_j), \\ y_j &= -a_j \sin \varphi_j - r \cos(\alpha - \varphi_j), \end{aligned} \quad (15)$$

а для поступательно движущегося звена 2' (рейки) получим:

$$\begin{aligned} x'_2 &= r \sin \alpha, \\ y'_2 &= -a_j \varphi_j - r \cos \alpha. \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее отмеченные частные случаи.

Если $r_0 = 0$ либо $\dot{\alpha}_0 = \frac{\omega_j}{2}$, то $c_0 = 0$ и для линии зацепления (12) получим

$$r = -2a_j \sin \alpha - 2a_j \eta_0 = R_j - 2a_j \sin \alpha,$$

где $R_j = -\frac{2v_0}{\omega_j} = \text{const}$ – радиус кривизны. Таким образом, случай $c_0 = 0$ соответствует постоянной кривизне. При этом из (13) следует $\dot{\alpha} = 0,5\omega_j$.

Отсюда

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{\omega_j}{2} t, \quad (16)$$

$$r = R_j - 2a_j \sin\left(\alpha_0 + \frac{\omega_j}{2} t\right). \quad (17)$$

Уравнение (17) – полярное уравнение улитки Паскаля. Таким образом, как уже было показано, линией зацепления для критерия $v_j = \text{const}$, $k_j = \text{const}$ ($j=1$ либо $j=2$) является улитка Паскаля.

Пусть $k_j = \text{const}$. Найдем выражение для профиля 1-ого звена. Подставляя в (15) выражения (16)-(17) с $j=1$, получим:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos \varphi_1 + (R_1 - 2a_1 \sin \alpha) \sin(\alpha - \varphi_1) = R_1 \sin(\alpha - \varphi_1) + a_1 \cos 2\alpha_0, \\ y_1 &= -a_1 \sin \varphi_1 - (R_1 - 2a_1 \sin \alpha) \cos(\alpha - \varphi_1) = -R_1 \cos(\alpha - \varphi_1) + a_1 \sin 2\alpha_0. \end{aligned}$$

Следовательно, профиль зуба 1-ого звена с постоянной кривизной является окружностью с центром в точке с координатами $x_c = a_1 \cos 2\alpha_0$ и $y_c = a_1 \sin 2\alpha_0$ и радиусом R_1 :

$$(x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 = R_1^2.$$

Рассмотрим случай, когда $v_0 = 0$. Линия зацепления определяется формулой (12) с $\eta_0 = 0$:

$$r = -a_j \sin \alpha \pm a_j \sqrt{\sin^2 \alpha + c_0}, \quad (18)$$

где параметр c_0 имеет выражение $c_0 = \frac{r_0}{a_j^2} (r_0 + 2a_j \sin \alpha_0)$.

В данном случае линия зацепления (18) является окружностью. Дифференциальное уравнение (13) принимает вид

$$\dot{\alpha} = \frac{\omega_j}{1 \mp \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + c_0}}}.$$

Его решение запишем в виде
$$\varphi_1 = \alpha - \alpha_0 \pm \left[\arcsin \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{c_0 + 1}} \right) - \arcsin \left(\frac{\cos \alpha_0}{\sqrt{c_0 + 1}} \right) \right].$$

Для начальных условий $r_0 = -2a_1 \sin \alpha_0$ имеем параметр $c_0 = 0$ – случай постоянной кривизны $k_1 = \infty$.

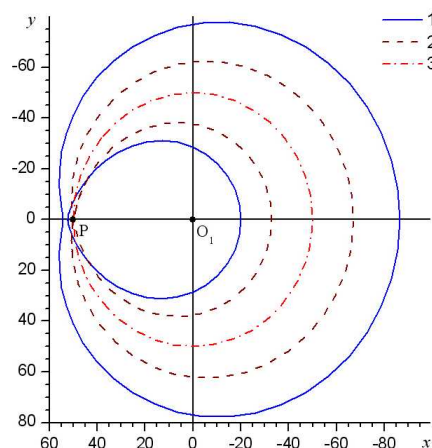


Рисунок 4 – Линии зацепления для случая $v_j = \text{const}$:

1 – $c_0 > 0$, 2 – $c_0 = 0$, 3 – $c_0 = 0, v_j = 0$

На рисунке 4 показаны линии внешнего зацепления с $a_1 = 50$ мм и передаточным отношением $i_{12} = 2$, а значения координат ее точек приведены в таблицах 1-3.

Рассмотрим, наконец, случай $v_1 = \text{const}$, $v_2 = \text{const}$. Поскольку из (1) следует соотношение $v_2 = v_1 + r(\omega_1 - \omega_2)$, то отсюда сразу получаем $r = \frac{v_2 - v_1}{\omega_1 - \omega_2} = R = \text{const}$.

Далее из (2) находим $\dot{r} = -a_j \omega_j \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pm 90^\circ$, т.е. линия зацепления вырождается в 2 точки с декартовыми координатами

$$x = a_1 + r \sin \alpha = a_1 \pm R, \quad y = -r \cos \alpha = 0. \quad (19)$$

Координаты профилей зубьев колес

$$x_j = a_j \cos \varphi_j + r \sin(\alpha - \varphi_j) = (a_j \pm R) \cos \varphi_j, \quad (20)$$

$$y_j = -a_j \sin \varphi_j - r \cos(\alpha - \varphi_j) = -(a_j \pm R) \sin \varphi_j, \quad (21)$$

т.е. профилем j -ого звена является окружность радиуса $(a_j \pm R)$:

$$x_j^2 + y_j^2 = (a_j \pm R)^2. \quad (22)$$

Для профиля зуба рейки имеем

$$x'_2 = r \sin \alpha = \pm R, \quad (23)$$

$$y'_2 = -a_1 \varphi_1 - r \cos \alpha = -a_1 \omega_1 t = -u_2 t, \quad (24)$$

т.е. профили зубьев рейки – вертикальные прямые $x = \pm R$, $u_2 = a_1 \omega_1$ – скорость рейки.

Случаю $v_1 = v_2 = \text{const}$ соответствуют вышеприведенные отношения (19)-(24) с $R = 0$, т.е. линия зацепления вырождается в точку с координатами $(a_1, 0)$.

Таблица 1 – Координаты линии зацепления для $v_1 = 17,1$ мм/с, $c_0 = 0,117$

α (град.)	r , мм	x , мм	y , мм	r , мм	x , мм	y , мм
340	17.10101	44.15111	-16.0697	-17.101	55.84889	16.06969
0	7.083469	50	-7.08347	-41.2855	50	41.28548
45	2.717132	51.9213	-1.9213	-107.63	-26.1058	76.10578
90	2.144856	52.14486	0	-136.347	-86.3469	0
135	2.717132	51.9213	1.921303	-107.63	-26.1058	-76.1058
180	7.083469	50	7.083469	-41.2855	50	-41.2855
225	43.26763	19.40517	30.59483	-6.75897	54.77931	-4.77931
270	69.97713	-19.9771	0	-4.17914	54.17914	0
315	43.26763	19.40517	-30.5948	-6.75897	54.77931	4.779311
360	7.083469	50	-7.08347	-41.2855	50	41.28548

Таблиця 2 – Координати лінії зацеплення для $v_1 = 8,55$ мм/с, $c_0 = 0$

α (град.)	r , мм	x , мм	y , мм
340	17.1	44.2	-16.1
0	-17.1	50	17.1
45	-87.81	-12.1	62.1
90	-117.1	-67.1	0
135	-87.81	-12.1	-62.1
180	-17.1	50	-17.1
225	53.6	12.1	37.9
270	82.9	-32.9	0
315	53.6	12.1	-37.9
360	-17.1	50	17.1

Таблиця 3 – Координати лінії зацеплення для $v_1 = 0$ мм/с, $c_0 = 0$

α (град.)	r , мм	x , мм	y , мм
340	17.1	44.2	-16.1
0	7.1	50	-7.1
45	2.7	51.9	-1.9
90	2.1	52.1	0
135	2.7	51.9	1.9
180	7.1	50	7.1
225	43.3	19.4	30.6
270	69.9	-19.9	0
315	43.3	19.4	-30.6
360	7.1	50	-7.1

Заключення

Используя предложенный алгоритм синтеза зацеплений, можно задавать такой закон изменения относительной скорости точки контакта, который обеспечит максимальную работоспособность и технологичность профилей зубьев передачи, в т.ч. хорошие условия образования масляного слоя, минимальный износ и оптимальное конструктивное оформление передачи с гидростатической смазкой.

В перспективе предполагается исследование динамических процессов механизмов с плоскими зацеплениями.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Ленский М.Ф. Инвариантная теория плоских кинематических пар с точечным касанием / М.Ф. Ленский // Машиноведение. — 1967. — № 5. — С. 32–36.
2. Ленский М.Ф. Обобщенные показатели зубчатых зацеплений с параллельными осями / М.Ф. Ленский, В.П. Прохоров // Машиноведение. — 1971. — № 5. — С. 67–73.
3. Прохоров В.П. Об относительном движении звеньев в пространственном зацеплении / В.П. Прохоров, Н.И. Прохорова // Машиноведение. — 1978. — № 9. — С. 36–41.
4. Прохоров В.П. Аналитическая модель системы твердых тел произвольной структуры / В.П. Прохоров // Изв. АН ССР. Механика твердого тела. — 1986. — № 2. — С. 94–98.
5. Фролов К.В. Системная концепция и алгоритмы проектирования механизмов произвольной структуры / К.В. Фролов, В.П. Прохоров // Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Proceedings. — Oulu, Finland, 1999. — Vol. 7. — С. 689–694.
6. Фролов К.В. Structurization of the Basis of Knowledge in the Mechanisms of Machines and the Choice of Optimal Strategies of Research / К.В. Фролов, В.П. Прохоров // 11th World Congress in Mechanisms and Machine Science, Tianjin, China, 2004. — Tianjin, 2004. — P. 308–311.
7. Фролов К.В. Systems Engineering Frame Concept, Russian Academy of Sciences / К.В. Фролов, В.П. Прохоров // IFToMM-2007 World Congress, Besancon, France. — 2007. — V. 6. — P. 388–393.
8. Прохоров В.П. Kinematic Pairs With A Concave Line Of Contact / В.П. Прохоров // IFToMM-2011, 13th World Congress in Mechanism and Machine Science. — Guanajuato, Mexico, 2011. — P. A9-373. — официальный сайт: <http://www.iftomm.org>.

Поступила в редакцию 15.03.2012 г.

Прохоров В.П., Щипаков В.О., Тимофеев Г.О., Чернишова И.М. Синтез плоских зацеплений за критерієм відносної швидкості точки контакту

Наведено обґрунтування актуальності постановки завдання. На базі математичної моделі плоских зацеплень із постійним відношенням розглянуто розв'язання завдання синтезу профілів зубів коліс, які взаємно огинаються, і інструментальної рейки за критерієм відносної швидкості точки контакту. Докладно розглянуто випадки лінійної, постійної та нульової швидкостей.

Ключові слова: плоскі зацеплення, точка контакту, алгоритм синтезу, відносна швидкість.

Prokhorov V.P., Schipakov V.A., Timofeev G.A., Chernysheva I.N. Synthesis of plain engagements by the contact point relative velocity criterion

The solution of the problem of the synthesis of the tooth profiles by the contact point relative velocity criterion is concerned on the base of mathematical model of plain engagements with permanent gear ratio. The cases of linear of constant and zero velocity are concerned in details.

Keywords: plain engagements, contact point, synthesis algorithm, relative velocity.