

УДК 621.833

В.П. Прохоров, профессор, канд. техн. наук**Н.И. Прохорова, профессор, канд. техн. наук****В.А. Щипаков, ст. научный сотрудник***Александровский филиал Российского нового университета**ул. Советская 25а, г. Александров, Россия, 601652**E-mail: afrosnou2009@yandex.ru***СИНТЕЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ПЕРЕДАТОЧНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПО КРИТЕРИЮ БЕЗУДАРНОГО КОНТАКТА**

Рассмотрены безударные механизмы с переменным передаточным отношением при равенстве нулю угловой скорости выходного звена вместе с ее m -первыми производными в моменты начала и окончания контакта.

Ключевые слова: плоские механизмы, безударный контакт, алгоритм синтеза, переменное передаточное отношение.

Введение

Важным фактором бесшумной, износоустойчивой работы механизмов является отсутствие ударных нагрузок на рабочее звено при входе в контакт и выходе из контакта входного и выходного звеньев или при реверсе выходного звена. Классическим критерием «безударного контакта» является требование равенства нулю угловой скорости и углового ускорения выходного звена в момент начала и окончания контакта. Но из-за наличия ошибок изготовления и сборки применение классического критерия в реальных механизмах не обеспечивает достижения безударного контакта. В этой ситуации более эффективными оказываются критерии, требующие равенства нулю высших производных угловой скорости выходного звена.

В настоящей работе рассмотрены механизмы с переменным передаточным отношением, удовлетворяющим более общему критерию безударного контакта – равенства нулю угловой скорости выходного звена вместе с ее m -первыми производными в момент начала и окончания контакта. Таким требованиям отвечает ряд функций, например, синусоидальный и степенной законы. На базе предложенных авторами ранее методов получены безударные профили звеньев в мальтийских и кулисных механизмах. Алгоритм может быть расширен также для синтеза кулачковых и др. механизмов.

Алгоритм синтеза. Задача синтеза механизмов с переменным передаточным отношением по критерию безударности состоит в том, чтобы по заданному закону движения 2-ого (выходного) звена $\varphi_2(t)$ и при постоянных угловой скорости 1-ого звена $\omega_1 = \text{const}$ и межосевом расстоянии $a = \text{const}$ определить линию зацепления $r(\alpha)$ [1, 2], форму элементов звеньев и другие значимые критерии качества механизма. Пусть задано соотношение: $r = r(a_1, \varphi_1, \varphi_2)$.

Если известна зависимость $a_1(t)$, то с помощью этого соотношения и условия взаимноограничения $\dot{r} = -a_1\omega_1 \cos \alpha - \dot{a}_1 \sin \alpha$ можно решить задачу. Искомую зависимость установим исходя из теоремы Виллиса $a_1\omega_1 = a_2\omega_2$.

Поскольку $a = a_1 - a_2$, то отсюда следует $a_1 = \frac{a\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$.

При постоянных a и ω_1 и заданной функции $\varphi_2(t)$, а значит и $\omega_2(t) = \dot{\varphi}_2(t)$, полученная формула дает требуемую функцию $a_1(t)$. В частности, для производной имеем:

$$\dot{a}_1 = -\frac{a\omega_1\dot{\omega}_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2}.$$

Рассмотрим подробнее несколько широко используемых механизмов.

Мальтийский механизм. Мальтийский механизм осуществляет прерывистое движение, используемое в различных автоматах [3, 4]. Геометрическая модель мальтийского механизма с 4 пазми показана на рисунке 1 (для внешнего зацепления) и на рисунке 2 (для внутреннего зацепления).

В начале цикла толчка контакта M_0 кривошипа (1-ое звено длиной l и нулевым радиусом цевки) входит в паз 2-ого звена и выходит из контакта в точке M_k . За время контакта 2-ое звено поворачивается

на угол $\varphi_{\mu 2} = \frac{2\pi}{z}$ (z – количество пазов), а 1-ое звено на угол $\varphi_{\mu 1}$, значение которого можно определить из $O_1M_0O_2M_k$, учитывая что углы $O_1M_0O_2$ и $O_2M_kO_1$ прямые: $\varphi_{\mu 1} = \pi - \varphi_{\mu 2}$ для внешнего зацепления

и $\varphi_{y1} = 2\pi - (\pi - \varphi_{y2}) = \pi + \varphi_{y2}$ для внутреннего или, используя верхний знак для внутреннего зацепления, а нижний – для внешнего, имеем $\varphi_{y1} = \pi \pm \varphi_{y2}$. Из соображений симметрии начальные углы относительно осей O_1 и O_2 , отсчитываемые от оси x против часовой стрелки, даются выражениями: $\varphi_{10} = \pm \varphi_{y1} / 2$, $\varphi_{20} = \pi \mp \varphi_{y2} / 2$. Длина кривошипа $l = a \cos \varphi_{10}$. Таким образом, два параметра мальтийского механизма – a и z – полностью определяют его геометрическую модель. Кроме того, вращение 2-ого звена совпадает с вращением кривошипа для внутреннего зацепления и противоположно ему для внешнего.

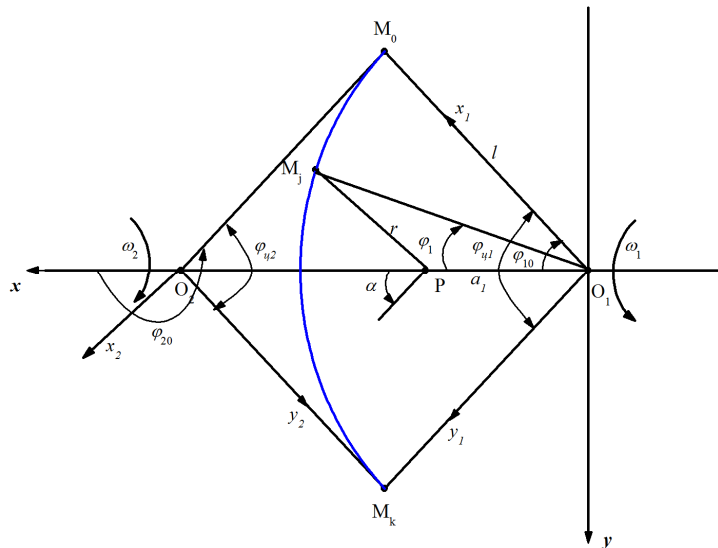


Рисунок 1 – Геометрическая модель мальтийского механизма с 4 пазми для внешнего зацепления

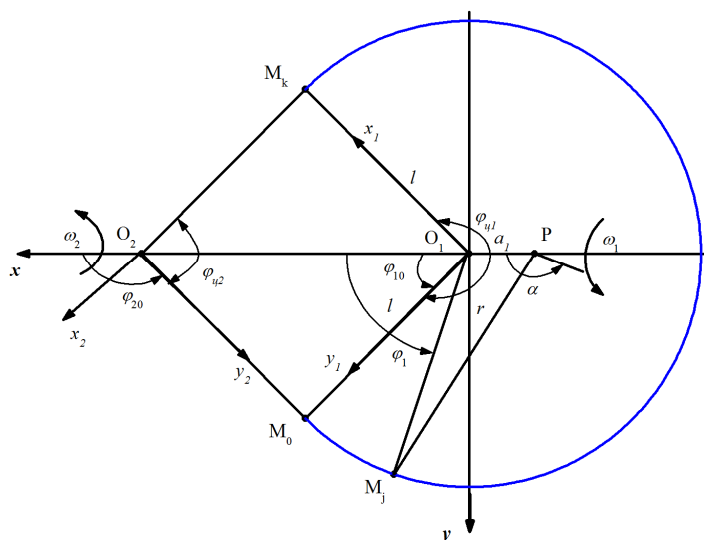


Рисунок 2 – Геометрическая модель мальтийского механизма с 4 пазми для внутреннего зацепления

Для определения полярных координат линии зацепления найдем проекцию на координатные оси (x, y) равенство $\overrightarrow{PM_j} = \overrightarrow{O_1M_j} - \overrightarrow{O_1P}$ (рисунок 2):

$$r \cos \alpha = -l \sin \varphi_1, \quad (1)$$

$$r \sin \alpha = l \cos \varphi_1 - a_1. \quad (2)$$

$$\text{Отсюда} \quad r = \sqrt{a_1^2 - 2a_1l \cos \varphi_1 + l^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 - l \cos \varphi_1}{l \sin \varphi_1}.$$

Из соотношений (1)–(2) получим выражения для линии зацепления и профиля 1-ого звена, не зависящие от функции $\varphi_2(t)$.

$$x = a_1 + r \sin \alpha = l \cos \varphi_1,$$

$$y = -r \cos \alpha = l \sin \varphi_1,$$

$$x_1 = a_1 \cos \varphi_1 + r \sin(\alpha - \varphi_1) = a_1 \cos \varphi_1 + l \cos^2 \varphi_1 - a_1 \cos \varphi_1 + l \sin^2 \varphi_1 = l,$$

$$y_1 = -a_1 \sin \varphi_1 - r \cos(\alpha - \varphi_1) = -a_1 \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - l \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + a_1 \sin \varphi_1 = 0.$$

Очевидно, что линия зацепления – дуга окружности радиуса l , а профиль 1-ого звена – точка с координатами $(l, 0)$.

Для профиля 2-ого звена имеем:

$$\begin{aligned} x_2 &= a_2 \cos \varphi_2 + r \sin(\alpha - \varphi_2) = -a \cos \varphi_2 + l \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ y_2 &= -a_2 \sin \varphi_2 - r \cos(\alpha - \varphi_2) = a \sin \varphi_2 + l \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Эти формулы позволяют вычислять профили паза без определения полярных координат линии зацепления.

Если профиль паза 2-ого звена задан, то он определяет закон вращения этого звена в фазе его движения. Например, для широко применяемого в практике и подробно описанного в литературе прямолинейного радиального паза [4] закон движения задается в виде:

$$\varphi_2 = \pi - \arctg[l \sin \varphi_1 / (a - l \cos \varphi_1)],$$

угловая скорость

$$\omega_2 = -\omega_1 \frac{\lambda(\cos \varphi_1 - \lambda)}{\lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi_1 + 1},$$

угловое ускорение

$$\varepsilon_2 = \omega_1^2 \frac{\lambda(1 - \lambda^2) \sin \varphi_1}{(\lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi_1 + 1)^2},$$

где параметр $\lambda = l/a = \cos \varphi_{10}$. При этом ускорение в начале и конце контакта не равно нулю (рисунок 3), что вызывает ударные нагрузки при входе и выходе кривошипа из паза. Вертикальная черта на рисунке 3 разделяет области внешнего (слева) и внутреннего зацепления. Как видно, при внутреннем зацеплении механизм функционирует более плавно (с меньшим ускорением).

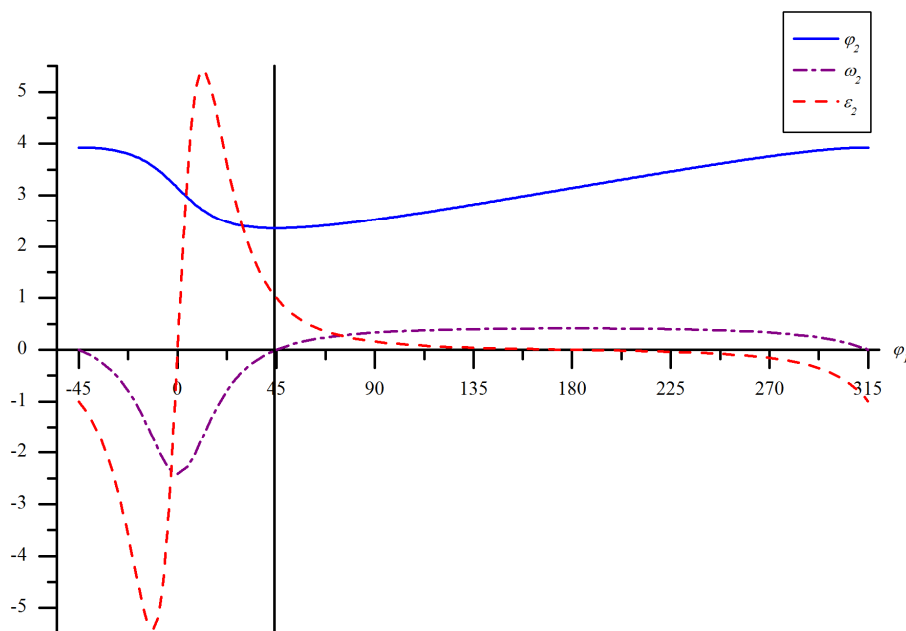


Рисунок 3 – Мальтийский механизм с 4-мя прямолинейными пазами

Рассмотрим обратную задачу – по заданному закону вращения 2-ого звена $\varphi_2(t)$ определим профиль его паза. Выберем эту функцию так, чтобы угловая скорость вместе со своими первыми n

производными обращалась в нуль в начале и конце контактного цикла, что обеспечит выполнение условий безударного контакта.

Тригонометрический (синусоидальный) закон $\varphi_2(\varphi_1)$. Возьмем, например, функцию

$$\omega_2(\varphi_1) = K_n \sin^{n+1} \varphi, \quad (4)$$

где фаза

$$\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_{10}}{\varphi_{\mu 1}} \pi, \quad (5)$$

K_n – нормировочный множитель. Тогда,

$$\omega_2^{(k)}(\varphi_{10}) = \omega_2^{(k)}(\varphi_{10} + \varphi_{\mu 1}) = 0, \quad (k = 0, \dots, n). \quad (6)$$

Для самого угла поворота φ_2 имеем:

$$\varphi_2 = \varphi_{20} \pm \frac{K_n}{\dot{\varphi}} J_n(\varphi_1) = \frac{K_n}{\omega_1} \frac{\varphi_{\mu 1}}{\pi} J_n(\varphi_1), \quad (7)$$

где знак $\pm$ относится к внутреннему/внешнему зацеплению, J_n – табличные интегралы

$$J_n(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sin^{n+1} x dx. \quad (8)$$

Из (7), при $\varphi_2 = \varphi_{20} \pm \varphi_{\mu 2}$, получаем соотношение для определения нормировочного множителя

$$K_n = \pm \frac{\varphi_{\mu 2} \dot{\varphi}}{J_n(\pi)}. \quad (9)$$

Таким образом, формулы (4)-(9) полностью определяют функцию $\varphi_2(\varphi_1)$ для безударного контакта. Кинематические переменные для $n=2,3,4$ показаны на рисунке 4. Вертикальная черта разделяет области внешнего и внутреннего зацепления. Как и в случае прямолинейных пазов, угловое ускорение 2-ого звена для внутреннего зацепления меньше, чем для внешнего.

Профили паза для значений $n=1-4$ показаны на рисунке 5. Они образуют замкнутую кривую с общей точкой входа/выхода M_0 , причем точка контакта обходит эту кривую по часовой стрелке таким образом, что траектория не имеет точек самопересечения. Длина паза одинакова для всех n и составляет величину $l_2 = a$ для внутреннего зацепления и $l_2 = 2l - a$ для внешнего, а ширина увеличивается с ростом n . Профили для внешнего зацепления показаны на отдельном рисунке в увеличенном масштабе. При $n=1,2$ функция $y_2(\varphi_1)$ имеет дополнительные нули, соответственно профиль образует дополнительную петлю. При $n \geq 3$ дополнительных нулей функция $y_2(\varphi_1)$ не имеет, и профиль состоит из одной замкнутой петли каплевидной формы.

Покажем, что замкнутость профиля является следствием симметричности паза и не зависит от явного вида функции φ_2 . Имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= -\frac{\varphi_{\mu 1}}{2}, & \varphi_{1\kappa} &= \frac{\varphi_{\mu 1}}{2} = \varphi_{10} + \varphi_{\mu 1}, \\ \varphi_{20} &= \pi + \frac{\varphi_{\mu 2}}{2}, & \varphi_{2\kappa} &= \pi - \frac{\varphi_{\mu 2}}{2} = \varphi_{20} - \varphi_{\mu 2}. \end{aligned}$$

Учитывая также соотношение $\varphi_{\mu 1} + \varphi_{\mu 2} = \pi$, получим $\varphi_{10} - \varphi_{20} = -\frac{3\pi}{2}$, $\varphi_{1\kappa} - \varphi_{2\kappa} = -\frac{\pi}{2}$. Тогда из (3) следует:

$$\begin{aligned} x_{2\kappa} &= -a \cos \varphi_{2\kappa} + l \cos(\varphi_{1\kappa} - \varphi_{2\kappa}) = -a \cos \varphi_{20} = x_{20}, \\ y_{2\kappa} &= a \sin \varphi_{2\kappa} + l \sin(\varphi_{1\kappa} - \varphi_{2\kappa}) = -a \sin \varphi_{20} - l \sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) = -y_{20} = l - a \cos \varphi_{10} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, координаты начальной и конечной точек совпадают.

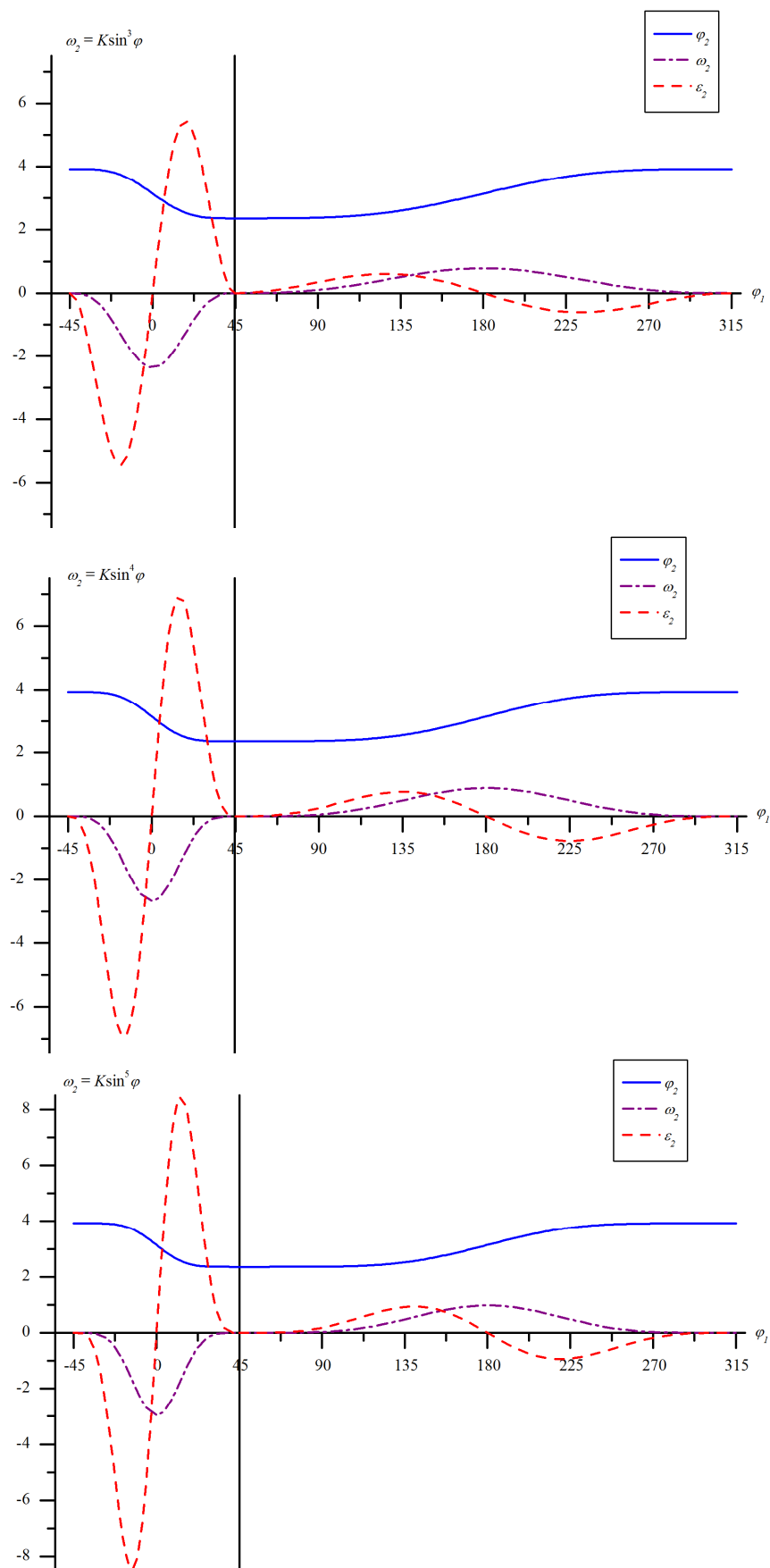


Рисунок 4 –Мальтийский механизм с заданным законом вращения

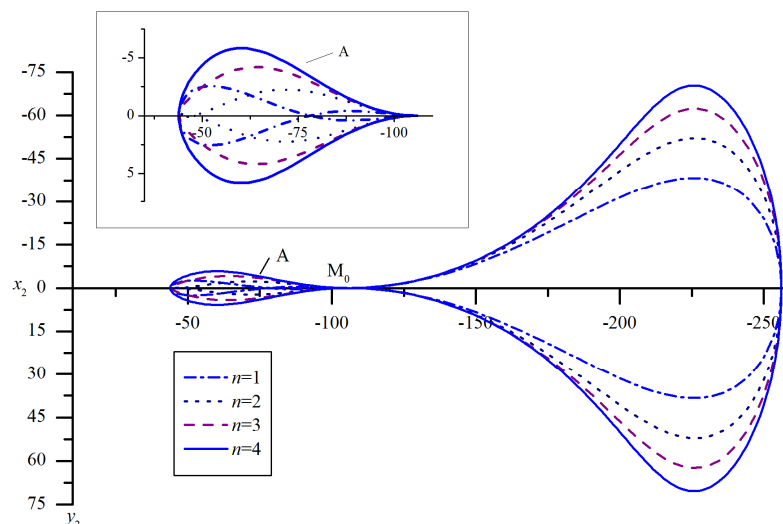


Рисунок 5 – Профиль паза мальтийского механизма с 4 пазами

Для получения незамкнутого профиля надо нарушить его симметрию. Для этого уменьшим отклонение начального положения 1-ого звена от оси x на некоторую величину $\Delta\varphi$ и соответственно увеличим отклонение начального положения паза 2-ого звена на такую же величину, так что углы $O_1M_0O_2$ и $O_1M_KO_2$ (рисунок 1) остаются прямыми. Но тогда $\cos\varphi_{2K} \neq \cos\varphi_{20}$ и, следовательно, $|O_1M_0| \neq |O_1M_K|$, что противоречит условию нахождения точки контакта на дуге окружности с центром в O_1 . Таким образом, установлено, что для кривошипа с точечным окончанием, профиль паза 2-ого звена является замкнутым.

Степенной закон $\varphi_2(\varphi_1)$. Рассмотрим теперь степенной закон движения 2-ого звена в виде $\omega_2 = K'_n \varphi^{n+1}$, где $\varphi = (\varphi_1 - \varphi_{10})(\varphi_1 - \varphi_{1K})$.

При таком выборе фазы и условия $\varphi_{1K} = \varphi_{10} + \varphi_{y1}$, обеспечиваются соотношения (6) и для угла φ_2 имеем: $\varphi_2(\varphi_1) = C + (K'_n / \omega_1) I_n(\varphi_1)$, где $I_n(\varphi_1) = \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_1} \varphi^{n+1} d\varphi_1$.

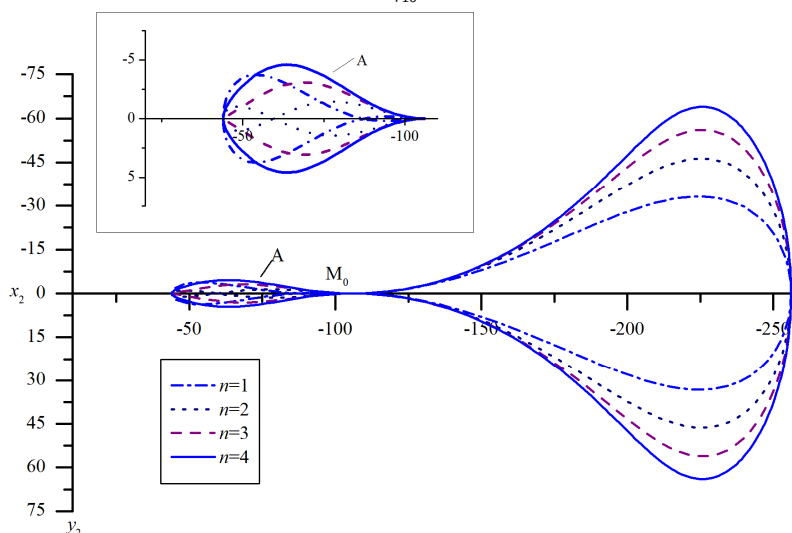


Рисунок 6 – Профиль паза механизма со степенным законом вращения

Для определения констант K'_n и C воспользуемся соотношениями:

$$\varphi_2(\varphi_{10}) = \varphi_{20} = C,$$

$$\varphi_2(\varphi_{1K}) = \varphi_{20} \pm \varphi_{y2} = C + \frac{K'_n}{\omega_1} I_n(\varphi_{1K}),$$

откуда

$$K'_n = \pm \frac{\omega_1 \varphi_{12}}{I_n(\varphi_{1k})},$$

при этом

$$I_n(\varphi_1) = (\varphi_1 - \varphi_{10})^{n+2} (-\varphi_{11})^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{1}{n+2+k} \left(-\frac{\varphi_1 - \varphi_{10}}{\varphi_{11}} \right)^k,$$

$$I_n(\varphi_{1k}) = \varphi_{11}^{2n+3} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{(-1)^{n+1-k}}{n+2+k}.$$

Зависимость кинематических переменных со степенным законом вращения выходного звена от угла φ_1 аналогична зависимости для тригонометрического закона (рисунок 4). Профили паза со степенным законом вращения выходного звена показаны на рисунке 6. Сравнение с рисунком 5 свидетельствует, что и профили паза в обоих случаях топологически аналогичны.

Кулисный механизм. Мальтийские механизмы с внешним и внутренним зацеплением кинематически эквивалентны одному и тому же кулисному механизму, отличаюсь друг от друга лишь пределами изменения угла поворота кривошипа, на которых происходит поворот ведомого звена. При этом точки входа кривошипа в паз и выхода из него соответствуют крайним положениям кулисы. Таким образом, в моменты остановки и смены направления движения кулисы тригонометрический и степенной законы обеспечивают безударный контакт с кривошипом. Соответственно, кулиса будет иметь форму, представленную на рисунке 5 или на рисунке 6.

Синусный механизм. Одной из разновидностей кулисного механизма является синусный механизм, в котором при вращении кривошипа кулиса совершает возвратно-поступательное движение. Для прямолинейной кулисы линейная скорость поступательного движения меняется по закону синуса: $\dot{u} \sim \sin \varphi_1$, соответственно, для ускорения имеем: $\ddot{u} \sim \cos \varphi_1$, так что в крайних положениях, $\varphi_1 = \pi k$, ускорение достигает экстремальных значений, что приводит к “мягкому” удару в этих точках контакта.

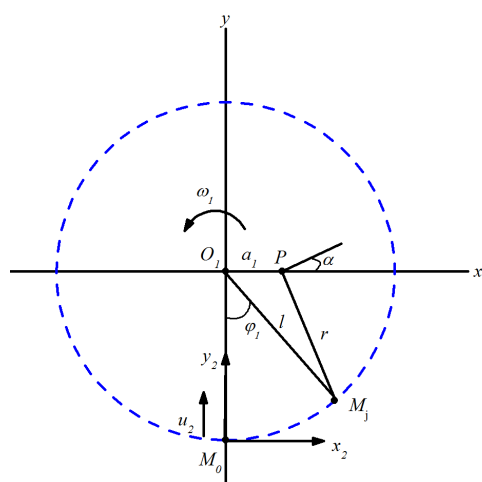


Рисунок 7 – Схема механизма с возвратно-поступательным движением кулисы

Рассмотрим аналогичный механизм с заданным законом движения $\dot{u}(\varphi_1)$, обеспечивающим условия безударного контакта в крайних положениях кулисы. Схема такого механизма показана на рисунке 7. Кривошип длиной l вращается вокруг точки O_1 с постоянной угловой скоростью ω_1 и сообщает поступательное движение кулисе, которая перемещается вдоль оси y с заданной линейной скоростью $\dot{u}_2(\varphi_1)$ между крайними положениями, соответствующими углам $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_1 = 180^\circ$. Закон движения должен обеспечивать, чтобы в этих точках скорость кулисы и ее первые n производные обращались в нуль.

Выбирая координаты так, как показано на рисунке 7, и отсчитывая угол поворота кривошипа φ_1 от начального положения, обозначенного точкой M_0 , получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + r \sin \alpha = l \sin \varphi_1, \\ y &= -r \cos \alpha = -l \cos \varphi_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда непосредственно видно, что линией зацепления (штриховая линия на рисунке 7) является окружность радиуса l : $x^2 + y^2 = l^2$.

Профиль кулисы описывается координатами $x_2 = x$, $y_2 = y + l - u_2$, где u_2 – заданный закон перемещения кулисы.

Выберем синусоидальный закон движения:

$$\dot{u}_2 = C_n \sin^{n+1} \varphi_1,$$

где

$$C_n = \begin{cases} \frac{2l}{J_n(\pi)}, & 0 \leq \varphi_1 \leq \pi, \\ (-1)^n \frac{2l}{J_n(\pi)}, & \pi \leq \varphi_1 \leq 2\pi. \end{cases}$$

Знаковый множитель учитывает возвратное движение кулисы для четных n . В частности, для $n = 0$

$$\begin{aligned}\dot{u}_2 &= l \sin \varphi_1, \\ u_2 &= l(1 - \cos \varphi_1).\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (10) получаем для координат профиля кулисы:

$$\begin{aligned}x_2 &= l \sin \varphi_1, \\ y_2 &= 0.\end{aligned}$$

Эти соотношения описывают прямолинейную кулису для классического синусного механизма.

Профили кулисы для $n > 0$, обеспечивающие безударный контакт в крайних положениях, показаны на рисунке 8. Видно, что по форме они аналогичны безударным профилям паза мальтийских механизмов.

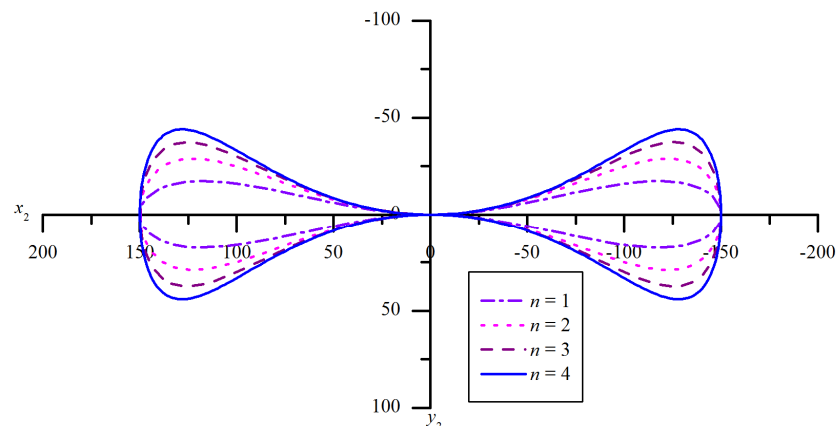


Рисунок 8 – Профили кулисы с синусоидальным законом движения

Далее предполагается решение задач динамического синтеза с учетом сопротивления движению.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Прохоров В.П. Элементы качественного синтеза зацеплений с параллельным расположением осей: дис... канд.техн. наук / В.П. Прохоров. — М.: Мосстанкин, 1974. — 151 с.
2. Прохоров В.П. Синтез зацеплений с постоянным передаточным отношением по критерию угла давления / В.П. Прохоров // Надежность и долговечность механизмов, элементов конструкций и биомеханических систем: матер. междунар. науч.-техн. конф., Севастополь, 14–19 сент. 2009 г. — Севастополь: СевНТУ, 2009. — С. 142–148.
3. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. — М.: Наука, 1988. — 760 с.
4. Теория механизмов и машин: учеб. для втузов / под редакцией К.В. Фролова. — М.: Высш. шк., 1987. — 482 с.

Поступила в редакцию 15.03.2012 г.

Прохоров В.П., Прохорова Н.І., Щипаков В.О. Синтез плоских механізмів зі змінним передатним відношенням за критерієм ненаголошеного контакту

У роботі розглянуто ненаголошені механізми зі змінним передатним відношенням при рівності нулю кутової швидкості вихідної ланки разом з її першими похідними в моменти початку і закінчення контакту.

Ключові слова: плоскі механізми, ненаголошений контакт, алгоритм синтезу, змінне передатне відношення.

Prokhorov V.P., Prokhorova N.I., Schipakov V.A. Synthesis of plain mechanisms with variable gear ratio by the unaccented contact criterion

The unaccented contact mechanisms with variable gear ratio are considered at zero angular velocity of the output link together with its m first derivatives at the initial and final moments of contact.

Keywords: plain mechanisms, unaccented contact, synthesis algorithm, variable gear ratio.