

УДК621.833

В.П. Прохоров, профессор, канд. техн. наук,**В.А. Щипаков, ст. научный сотрудник,***Александровский филиал Российского нового университета**ул. Советская 25а, г. Александров, Россия, 601652**E-mail: afrosnou2009@yandex.ru***Г.А. Тимофеев, профессор, д-р техн. наук,****И.Н. Чернышева, доцент, канд. техн. наук***Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана**ул. 2-я Бауманская, д.5, Москва, Россия, 105005**E-mail: bauman@bmstu.ru***СИНТЕЗ ПЛОСКИХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ПО КРИТЕРИЮ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ ПРОФИЛЕЙ ЗУБЬЕВ**

Обоснована актуальность постановки задачи синтеза плоских зацеплений по критерию кривизны профилей зубьев колес. На базе математической модели плоских зацеплений с постоянным передаточным отношением приведен алгоритм решения задачи при заданной постоянной кривизне. Полученные решения позволяют выполнить анализ плоских цевочных зацеплений общего вида.

Ключевые слова: алгоритм синтеза, кривизна, цевочное зацепление, линия зацепления, профили зубьев.

Введение

Проблема повышения долговечности, технологичности и снижения энергетических потерь является актуальной для всех видов зубчатых передач. Применение плоских полюсных и внеполюсных цевочных зацеплений позволяет улучшить эти показатели за счет исключения трения скольжения в контакте. Теория высшей кинематической пары, предложенная М.Ф. Ленским в [1], может быть использована для исследования (анализа и синтеза) плоских зубчатых и реечных механизмов с общих позиций.

В настоящей работе авторами на основе [1] предложена теоретическая модель плоских полюсных и внеполюсных цевочных зацеплений. Показано, что они могут быть получены как результат решения задачи синтеза по критерию постоянной кривизны профиля зуба. В перспективе на основе модели можно установить оптимальные сочетания постоянных параметров цевочной передачи.

1. Постановка задачи. Работа выполнена в русле концепций и методов, представленных в [1-4]. Зубчатые колеса с постоянной кривизной профилей зубьев, в основном, конструктивно выполняют цевочными. Это позволяет повысить технологичность, исключить в контактной точке относительное скольжение и, соответственно, на порядок снизить износ профилей, потери мощности на трение и увеличить коэффициент полезного действия [5-7].

2. Математическая модель и алгоритм синтеза

Математическую модель плоского зацепления с постоянным передаточным отношением можно представить в виде [1, 2]:

$$v_j = -a_j \omega_j \sin \alpha + r(\dot{\alpha} - \omega_j), \quad (1)$$

$$\dot{r} + a_j \omega_j \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$k_j = (\dot{\alpha} - \omega_j) / v_j, \quad (3)$$

где $j=1,2$ – индекс колеса; v_j – скорость точки контакта по профилю зуба; a_j – радиус центроиды; ω_j – угловая скорость; α – угол зацепления; r – расстояние от точки контакта до полюса зацепления; k_j – кривизна профиля зуба, точка над параметром означает его производную по времени t . Приведенная модель успешно использовалась нами в [8-10] и др. работах.

3. Зацепления с постоянной кривизной профиля зуба

Рассмотрим решение задачи синтеза зацепления по критерию постоянной нормальной кривизны $k_j = \text{const}$. Запишем (3) с учетом (1) в виде

$$R_j = \frac{v_j}{\dot{\alpha} - \omega_j} = r - \frac{a_j \omega_j \sin \alpha}{\dot{\alpha} - \omega_j}.$$

Отсюда

$$r = R_j + \frac{a_j \omega_j \sin \alpha}{\dot{\alpha} - \omega_j}, \quad (4)$$

где $R_j = 1/k_j$ – радиус кривизны, а второе слагаемое, как легко непосредственно убедиться, это линия зацепления для критерия $v_j = 0$. Она определяется формулой [5]

$$\tilde{r}|_{v_j=0} = -a_j \sin \alpha \pm a_j \sqrt{\sin^2 \alpha + c_0},$$

где для параметра c_0 следует выражение

$$c_0 = \frac{2\tilde{r}_0}{a_j} \left(\frac{\tilde{r}_0}{2a_j} + \sin \alpha_0 \right).$$

Таким образом, получено

$$r = R_j - a_j \sin \alpha \pm a_j \sqrt{\sin^2 \alpha + c_0}. \quad (5)$$

Здесь выбор знака определяется заданием начальных условий. Дифференцируя (5) по времени и сравнивая с (2), находим, что функция $\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\alpha} = \frac{\omega_j}{1 \mp \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + c_0}}}, \quad (6)$$

решение которого имеет вид

$$\varphi_1 = \alpha - \alpha_0 \pm \left[\arcsin \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{c_0 + 1}} \right) - \arcsin \left(\frac{\cos \alpha_0}{\sqrt{c_0 + 1}} \right) \right]. \quad (7)$$

По выражениям (5) и (7) можно записать формулы для профилей зубьев колес в виде:

$$\begin{aligned} x_j &= a_j \cos \varphi_j + r \sin(\alpha - \varphi_j), \\ y_j &= -a_j \sin \varphi_j - r \cos(\alpha - \varphi_j) \end{aligned}$$

или, если 2-ое звено – поступательно движущаяся рейка, то

$$\begin{aligned} x'_2 &= r \sin \alpha, \\ y'_2 &= -a_j \varphi_j - r \cos \alpha. \end{aligned}$$

Полученные зависимости соответствуют внеполусному цевочному зацеплению [6] путем введения в модель дополнительной геометрической связи

$$(a_1 + e) \sin \varphi_1 = -(r + \rho) \cos \alpha. \quad (8)$$

Здесь ρ – радиус цевки; e – смещение центра цевки относительно полюса. Установим связь между постоянными c_0 и e . Сравнивая (7) и (8), получим

$$e = a_1(\sqrt{c_0 + 1} - 1). \quad (9)$$

Линии зацепления для постоянной кривизны профиля 1-ого звена для внеполусного цевочного зацепления с $a_1 = 50$ мм и передаточного отношения $i_{12} = 2$ изображены на рисунке 1. Две кривые линии зацепления соответствуют знаку $\pm$ в (5): линия, соответствующая знаку $+$, находится внутри линии центров цевки, а линия, соответствующая знаку $-$, находится снаружи. В обоих случаях профиль цевки – дуга окружности. Более подробно профиль цевки и профили 2-ого звена показаны на рисунке 2.

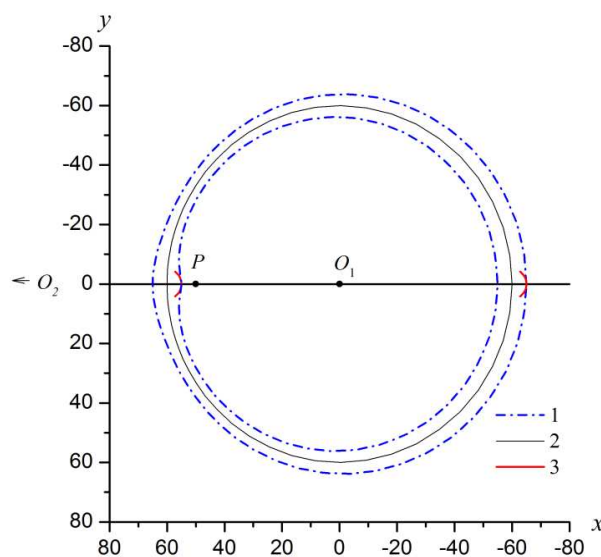
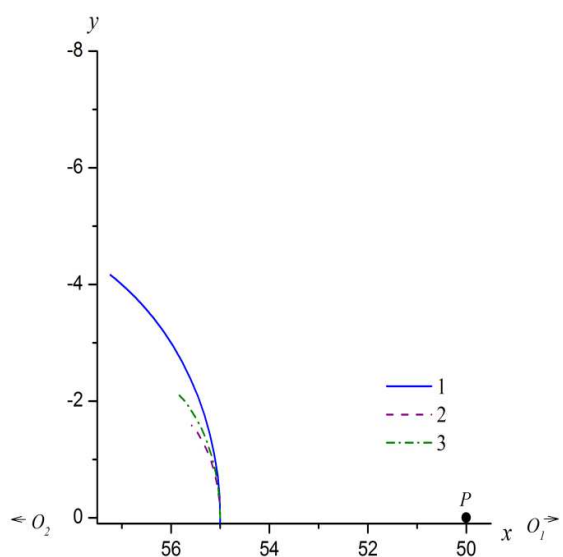
Координаты линии зацепления и профилей звеньев даны в таблице 1.

Рассмотрим случай $k_j = \text{const}$, $v_j = \text{const}$. Для относительной скорости с учетом (5) и (6) получено следующее выражение:

$$\begin{aligned} v_j &= -a_j \omega_j \sin \alpha + \left(R_j - a_j \sin \alpha \pm a_j \sqrt{\sin^2 \alpha + c_0} \right) \left(\frac{\omega_j}{1 \mp \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + c_0}}} - \omega_j \right) = \\ &= -a_j \omega_j \sin \alpha + \left(R_j - a_j \sin \alpha \pm a_j \sqrt{\sin^2 \alpha + c_0} \right) \frac{a_j \omega_j \sin \alpha}{-a_j \sin \alpha \pm a_j \sqrt{\sin^2 \alpha + c_0}} = \frac{R_j}{r - R_j} a_j \omega_j \sin \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Таблиця 1 – Координаты линии зацепления и профилей звеньев для случая $k_1 = -0,2 \text{ мм}^{-1}$, $c_0 = 1100$

α (град.)	r , мм	x , мм	y , мм	ϕ_1 (град.)	x_1 , мм	y_1 , мм	x_2 , мм	y_2 , мм	x'_2 , мм	y'_2 , мм
90	5.00	55.00	0.00	0.00	55.00	0.00	55.00	0.00	55.00	0.00
135	8.12	55.74	5.74	8.90	55.96	-2.95	55.58	-1.58	55.74	-2.02
180	28.17	50.00	28.17	33.56	57.24	-4.17	46.13	-1.90	50.00	-1.12
225	78.83	-5.74	55.74	98.90	55.96	-2.95	6.39	-82.10	-5.74	-30.56
270	105.00	-55.00	0.00	180.00	55.00	0.00	150.00	-205.00	-55.00	-157.08
315	78.83	-5.74	-55.74	261.10	55.96	2.95	293.61	-82.10	-5.74	-283.60
360	28.17	50.00	-28.17	326.44	57.24	4.17	253.87	-1.90	50.00	-313.04
405	8.12	55.74	-5.74	351.10	55.96	2.95	244.42	-1.58	55.74	-312.14
450	5.00	55.00	0.00	360.00	55.00	0.00	245.00	0.00	55.00	-314.16

Рисунок 1 – Линии зацепления для случая $k_1 = \text{const}$ (внеполюсное цевочное зацепление, $c_0 > 0$): 1 – линия зацепления; 2 – линия центров цевки; 3 – профиль 1-ого звена (цевки); O_1 – ось вращения 1-го звена; O_2 – ось вращения 2-ого звена; P – полюс зацепленияРисунок 2 – Профили звеньев для случая $k_1 = \text{const}$ (внеполюсное цевочное зацепление, $c_0 > 0$): 1 – профиль 1-ого звена (цевки); 2 – профиль 2-ого звена; 3 – профиль рейки; O_1 – ось вращения 1-го звена; O_2 – ось вращения 2-ого звена; P – полюс зацепления

Отсюда, чтобы $v_j = \text{const}$, должно быть $r = R_j + C \sin \alpha$. Подставив последнее в (10), получим тождество

$$((C + a_j)^2 - a_j^2) \sin^2 \alpha - a_j^2 c_0 = 0.$$

Оно выполняется для любого α только при условии $C = -2a_j$, $c_0 = 0$. Из (9) следует также $e = 0$, т.е. случай постоянной кривизны и скорости соответствует полюсному цевочному зацеплению. Линия зацепления имеет вид:

$$r = R_j - 2a_j \sin \alpha, \quad (11)$$

что представляет собой полярное уравнение улитки Паскаля.

Линии зацепления и профили звеньев для постоянной кривизны профиля 1-ого звена для полюсного цевочного зацепления с $a_1 = 50$ мм и передаточного отношения $i_{12} = 2$ изображены на рисунке 3. Линия зацепления – улитка Паскаля, а профиль 1-ого звена – окружность.

Рассмотрим случай $k_1 = \text{const}$, $k_2 = \text{const}$. В этом случае получаем совместно с (1)–(3) избыточную систему уравнений, решение которой приводит к наложению дополнительной связи на постоянные параметры зацепления. Перепишем соотношение (4) в виде

$$\dot{\alpha} - \omega_j = \frac{a_j \omega_j \sin \alpha}{r - R_j}. \quad (12)$$

Отсюда при $R_1 = \text{const}$, $R_2 = \text{const}$:

$$\omega_1 + \frac{a_1 \omega_1 \sin \alpha}{r - R_1} = \omega_2 + \frac{a_2 \omega_2 \sin \alpha}{r - R_2}. \quad (13)$$

Формула для линии зацепления для случая $k_1 = 0$, $k_2 = \text{const}$ получается из (13) в виде:

$$r = R_2 + \frac{a_j \omega_j \sin \alpha}{\omega_1 - \omega_2}. \quad (14)$$

Здесь, как и (11), будет полярное уравнение улитки Паскаля. Из (12) следует

$$\dot{\alpha} = \omega_1. \quad (15)$$

Дифференцируя (14) по t и приравнявая к правой части (2), с учетом (15), получим

$$\frac{\omega_1 a_j \omega_j \cos \alpha}{\omega_1 - \omega_2} = -a_j \omega_j \cos \alpha.$$

Отсюда $\frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} = -1$. Это означает, что такая передача может быть выполнена в виде торцевой

[6] с внутренним зацеплением и передаточным отношением $i_{12} = 1, 2$. При этом цевки располагаются на втором колесе, а профили зубьев первого колеса – прямые, параллельные радиальным прямым. При этом, скорости имеют выражения соответственно: $v_1 = -a_1 \omega_1 \sin \alpha$, $v_2 = R_2 (\omega_1 - \omega_2) = \text{const}$.

Если $k_1 = k_2$, то из (4) следует $\omega_1 = \omega_2$ и $a_1 = a_2$, что соответствует механизму муфты с нулевым межосевым расстоянием с произвольными, но конгруэнтными элементами звеньев. Такому же результату соответствует решение при $k_1 = k_2 = \text{const}$, $k_1 = k_2 = \infty$ ($R_1 = R_2 = 0$).

На рисунке 4 показана линия зацепления для случая $k_1 = 0$, $k_2 = \text{const}$.

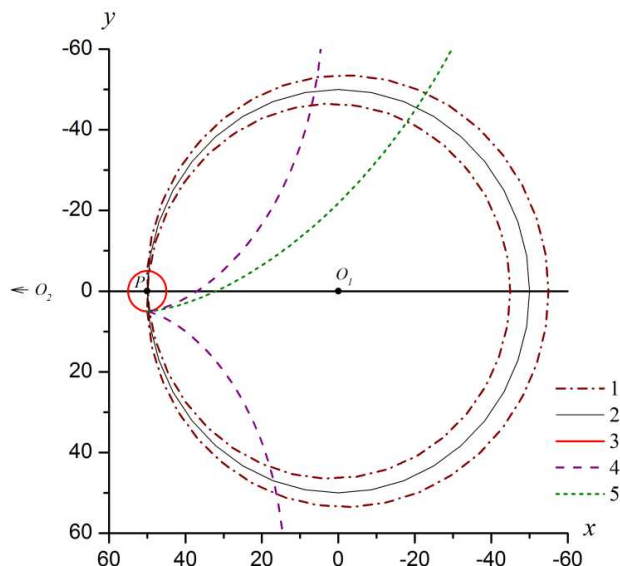


Рисунок 3 – Линии зацепления и профили звеньев для случая $k_1 = \text{const}$ (полосное цевочное зацепление, $c_0 = 0$): 1 – линия зацепления; 2 – линия центров цевки; 3 – профиль 1-ого звена (цевки); 4 – профиль 2-ого звена; 5 – профиль рейки; O_1 – ось вращения 1-го звена; O_2 – ось вращения 2-ого звена; P – полюс зацепления

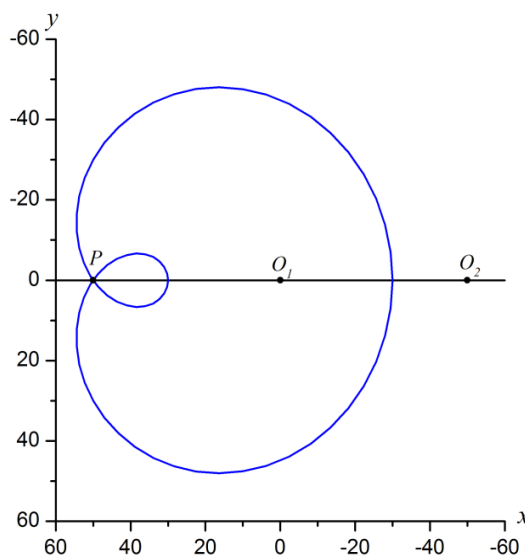


Рисунок 4 – Линия зацепления для случая $k_1 = 0$, $k_2 = \text{const}$: O_1 – ось вращения 1-го звена; O_2 – ось вращения 2-ого звена; P – полюс зацепления

Вывод. Полученные формулы с общих позиций описывают все множество полюсных и внеполюсных плоских цевочных передач с внутренним, внешним и реечным зацеплениями. В результате решения задачи возникает возможность их анализа по всему множеству основных и производных критериев эффективности, а также возможность выбора оптимальных соотношений постоянных

параметров – межосевого расстояния, передаточного отношения, радиуса цевок и радиуса установки цевок, что является предметом дальнейших исследований.

Библиографический список использованной литературы

1. Ленский М.Ф. Инвариантная теория плоских кинематических пар с точечным касанием / М.Ф. Ленский // Машиноведение. — 1967. — № 5. — С. 32–36.
2. Ленский М.Ф. Теория зубчатых зацеплений с параллельными осями и постоянным передаточным отношением / М.Ф. Ленский, В.П. Прохоров // АН СССР. VI Совецание по основным проблемам теории машин и механизмов. Тезисы докладов. — Л.: 1970. — С. 78.
3. Ленский М.Ф. Теория зубчатых зацеплений с параллельными осями и постоянным передаточным отношением / М.Ф. Ленский, В.П. Прохоров // Теория передач в машинах. — М.: АН СССР, Наука, 1973. — С. 35–39.
4. Прохоров В.П. Трехзвенные механизмы с винтовым движением ведомого звена / В.П. Прохоров, Н.И. Прохорова // Машиноведение. — 1985. — № 6. — С. 54–59.
5. Синтез плоских зацеплений по относительной скорости точки контакта / В.П. Прохоров, В.А. Щипаков, Г.А. Тимофеев, И.Н. Чернышева // Динамика, надежность, долговечность механических и биомеханических систем: матер. междунар. науч.-техн. конф. — Севастополь, 2012. — С. 306–311.
6. Прохоров В.П. К вопросу синтеза разновидности торцовой цевочной передачи / В.П. Прохоров, И.Н. Чернышева // Изв. вузов. Машиностроение. — 1977. — № 12.
7. Прохоров В.П. Расчет постоянных параметров зубчатых передач с цевочным зацеплением / В.П. Прохоров, И.Н. Чернышева // Изв. вузов. Машиностроение. — 1978. — № 11.
8. Прохоров В.П. Аналитическая модель внеполюсных цевочных зацеплений / В.П. Прохоров, Н.А. Скворцова // Изв. вузов. Машиностроение. — 1985. — № 1.
9. Прохоров В.П. Variational and Non-Variational Solution Methods of Flat Engagements Optimization Problem by Friction Power Criterion / В.П. Прохоров // IFToMM-2011, 13th World Congress in Mechanism and Machine Science. — Guanajuato, Mexico, 2011. — P. A9-274. — официальный сайт: <http://www.iftomm.org>.
10. Прохоров В.П. Synthesis and Optimization of Engagements in a Plane by the Pressure Angle Criterion using Euler Method / В.П. Прохоров // IFToMM-2011, 13th World Congress in Mechanism and Machine Science. — Guanajuato, Mexico, 2011. — P. A9-275. — официальный сайт: <http://www.iftomm.org>.

Поступила в редакцию 15.03.2012 г.

Прохоров В.П., Щипаков В.О., Тимофеев Г.О., Чернышева И.М. Синтез плоских зацеплений за критерієм постійної кривизни профілів зубів

Обґрунтовано актуальність постановки завдання синтезу плоских зацеплень за критерієм кривизни профілів зубів коліс. На базі математичної моделі плоских зацеплень із постійним передатним відношенням наведено алгоритм розв'язання завдання за заданою постійною кривизною. Отримані розв'язання дозволяють виконати аналіз плоских цівкових зацеплень загального виду.

Ключові слова: алгоритм синтезу, кривизна, цівкове зачеплення, лінія зачеплення, профілі зубів.

Prokhorov V.P., Schipakov V.A., Timofeev G.A., Chernysheva I.N. Synthesis of plain engagements by constant curvature of the tooth profiles criterion

The solution of the problem of the synthesis of the tooth profiles by the constant curvature criterion is concerned on the base of mathematical model of plain engagements with permanent gear ratio. The obtained solutions allow for analysis of plain pin gearings of general type.

Keywords: plain engagements, profile curvature, synthesis algorithm, pin gearing.