

УДК 539.3/8/07

В.Г. Хромов, профессор, д-р техн. наук**И.В. Хромов, канд. техн. наук**

Севастопольский национальный технический университет

Ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОЛОГИИ ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Рассматриваются вопросы методологического характера, связанные с выводом физических уравнений теории пластичности. Предложена новая, более строгая схема формальных преобразований для построения явной формы уравнений пластического течения материала.

Установление зависимостей между напряжениями и деформациями материала $d\epsilon_{ij} \leftrightarrow d\epsilon_{ij}$ (уравнения пластического течения) является одной из важных задач теории пластичности. Эти зависимости, очевидно, определяются природой взаимодействия частиц тела на молекулярном уровне, т. е. имеют физический характер. Поскольку современное состояние науки все еще не позволяет отобразить в пригодной для технических расчетов математической форме взаимосвязи между отдельными частицами (молекулами или атомами) тела при его деформации, то приходится довольствоваться данными, обнаруживаемыми на уровне макроэкспериментов при механических испытаниях образцов. Такие эксперименты дают возможность установить зависимость между напряжениями и деформациями в виде некоторых графиков в системе осей напряжение-деформация при определенных частных условиях нагружения.

Таким образом, сопротивление тела деформации в механике описывается без анализа исходных физических причин, т.е. отражается лишь внешняя картина процесса. Подобное изучение является феноменологическим, однако получаемые уравнения часто называют физическими или уравнениями пластического течения [1]. Ввиду многообразия свойств реальных материалов и трудоемкости последовательного теоретического решения не представляется возможным получение универсального вида физических уравнений, пригодных для моделирования любых видов материала.

Задача поиска подходящей формы уравнений для конкретных видов материала постоянно привлекает внимание специалистов. В связи с этим остаются актуальными вопросы критического анализа известных и выработки новых, более строгих подходов, касающихся методологии вывода указанных уравнений.

Целью статьи является разработка максимально формализованной схемы вывода уравнений пластического течения без традиционного использования понятия работы на пластических деформациях и условного отображения тензорных величин с помощью векторных образов или кинематической модели Прагера.

Согласно теории пластического течения напряжения в конечном состоянии материала зависят не только от конечных значений тензора деформации, но и от траектории ("истории") деформирования. Это означает, что уравнения, описывающие пластическую деформацию, являются дифференциальными зависимостями, которые в общем случае не могут быть приведены к конечным аналитическим зависимостям. В известных монографиях и учебниках [1-3] на заключительном этапе вывода физических уравнений для объемного напряженного состояния традиционно приводят следующие соотношения

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + df \cdot s_{ij} \quad \text{или} \quad d\epsilon_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + df \cdot s_{ij}, \quad (1)$$

где $\epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}^e$ – тензоры полной и упругой деформаций, соответственно; df – неопределенный, бесконечно малый, скалярный множитель; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \cdot \delta_{ij}$ – девиатор напряжений; σ_{ij} – тензор напряжений; $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}$ – среднее напряжение; δ_{ij} – символ Кронекера (дельта-символ); G – модуль упругости при сдвиге.

Неопределенный множитель df рекомендуется определять на основе введения дополнительного понятия – работы напряжений на приращениях пластических деформаций $d\epsilon_{ij}^p$:

$$dA_p = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p = df \cdot \sigma_{ij} s_{ij} = 2 \cdot df \cdot T^2,$$

отсюда

$$df = \frac{dA_p}{2T^2} = \frac{\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p}{2T^2}, \quad (2)$$

где $T = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} s_{ij}}$ – интенсивность касательных напряжений.

В приведенных формулах и далее используем тензорное правило суммирования по повторяющемуся индексу (запись $\sigma_{ij} s_{ij}$ означает $\sum_i \sum_j \sigma_{ij} s_{ij}$).

Уравнения (1) представляют неявную форму искомых соотношений $d\sigma_{ij} \leftrightarrow d\epsilon_{ij}$. Вывод уравнений в явной форме с учетом (2) обычно [1 – 3] рассматривается только для частного варианта плоского напряженного состояния (совместное растяжение и кручение тонкостенной трубы). В последнем случае используют также [4,5] условные векторные изображения тензоров и кинематическую модель процесса упругопластической деформации (рисунок 1).

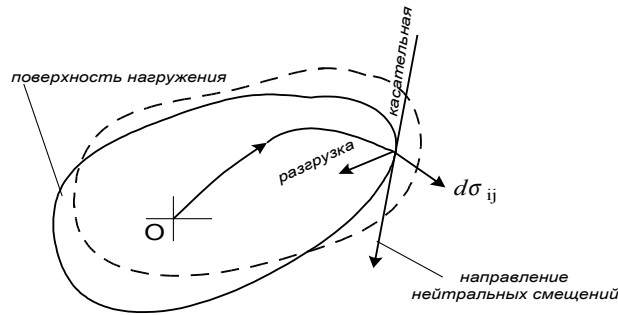


Рисунок 1 – Векторные образы тензора напряжений и кинематическая модель упругопластических деформаций

При критическом анализе указанного раздела теории пластичности возникают следующие вопросы: насколько обязательным является использование понятия работы dA_p ; почему в (2) предполагается справедливым равенство $\sigma_{ij} s_{ij} = s_{ij} \sigma_{ij}$ и можно ли исключить его из рассмотрения; возможна ли запись физических уравнений в явном виде для объемного напряженного состояния и их последующие простые преобразования в частных случаях напряженного состояния.

Предварительные исследования показали, что для положительного решения данных вопросов достаточно внести частичные изменения в методологию вывода искомых уравнений. Основные результаты этих исследований рассмотрим на классическом примере построения математической модели для идеального несжимаемого упругопластического материала:

– коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$;

– относительное объемное сжатие материала $\epsilon_0 = \epsilon_{ij} \delta_{ij} = 3 \frac{1-2\mu}{E} \sigma_0 = 0$;

– компоненты девиатора e_{ij} и тензора ϵ_{ij} деформаций равны

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_0 \cdot \delta_{ij} = \epsilon_{ij} \quad \text{или} \quad de_{ij} = d\epsilon_{ij}; \quad (1)$$

– модули упругости при сдвиге G и растяжении E связаны соотношением

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{E}{3}; \quad (2)$$

– при нагружении материала интенсивность касательных напряжений T остается постоянной (условие текучести Мизеса)

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot s_{ij} s_{ij}} = \tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} = \text{const}, \quad (3)$$

где σ_T, τ_T – предел текучести материала при растяжении и сдвиге, соответственно.

Далее используем три общих положения теории пластического течения [1-3]:

1) приращение компонент полной деформации $d\epsilon_{ij}$ можно представить в виде суммы приращений упругой $d\epsilon_{ij}^e$ и пластической $d\epsilon_{ij}^p$ деформаций

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p; \quad (4)$$

2) компоненты тензора приращений пластической деформации $d\epsilon_{ij}^p$ пропорциональны компонентам девиатора напряжений s_{ij} (тензорное свойство среды, подобной вязкой жидкости)

$$d\epsilon_{ij}^p = df \cdot s_{ij}; \quad (5)$$

3) приращения компонент девиатора упругой деформации de_{ij}^e и девиатора напряжений s_{ij} в процесс разгрузки материала связаны законом Гука

$$ds_{ij} = 2G \cdot de_{ij}^e. \quad (6)$$

Для вывода соотношений $d\sigma_{ij} \leftrightarrow d\epsilon_{ij}$ выполним ряд преобразований. Продифференцируем обе части (3), и тогда получим условие

$$dT = \frac{s_{ij} ds_{ij}}{2T} = 0. \quad (7)$$

Домножим обе части равенства (4) на s_{ij} и просуммируем по индексам i, j . С учетом (1), (6) и (7) запишем следующее:

$$s_{ij} d\epsilon_{ij} = s_{ij} de_{ij}^e + s_{ij} d\epsilon_{ij}^p = \frac{s_{ij} ds_{ij}}{2G} + s_{ij} d\epsilon_{ij}^p = s_{ij} d\epsilon_{ij}^p. \quad (8)$$

Аналогично преобразуем равенство (5) с учетом (8) и (3):

$$s_{ij} d\epsilon_{ij}^p = s_{ij} d\epsilon_{ij} = df \cdot s_{ij} s_{ij} = df \cdot 2T^2 = df \cdot 2\tau_{\tau}^2.$$

Отсюда найдем:

$$df = \frac{s_{ij} d\epsilon_{ij}}{2\tau_{\tau}^2} \quad \text{и} \quad d\epsilon_{ij}^p = \frac{s_{ij} d\epsilon_{ij}}{2\tau_{\tau}^2} \cdot s_{ij}. \quad (9)$$

Из (1) и (4) определяем приращения девиатора упругой деформации

$$de_{ij}^e = d\epsilon_{ij}^e = d\epsilon_{ij} - d\epsilon_{ij}^p. \quad (10)$$

Подставляя (9) в (10) и далее в (6) получаем искомые соотношения

$$ds_{ij} = 2G(d\epsilon_{ij} - \frac{s_{ij} d\epsilon_{ij}}{2\tau_{\tau}^2} \cdot s_{ij})$$

и окончательно

$$d\sigma_{ij} = 2G(d\epsilon_{ij} - \frac{s_{ij} d\epsilon_{ij}}{2\tau_{\tau}^2} \cdot s_{ij}) + d\sigma_0 \delta_{ij}. \quad (11)$$

Очевидно, что полученные уравнения пластического течения в явной форме (11) пригодны для описания произвольного варианта напряженного состояния материала. При этом их вывод построен на основе строгих математических преобразований без привлечения каких-либо вспомогательных понятий и моделей.

Рассмотрим вид этих уравнений для упомянутого выше частного случая напряженного состояния при совместном растяжении и кручении тонкостенной цилиндрической трубы: $\sigma_{11} = \sigma$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau$, $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma$, остальные $\sigma_{ij} = 0$. Здесь девиаторы напряжений и деформаций имеют следующие компоненты:

$$s_{11} = \frac{2}{3}\sigma, \quad s_{12} = s_{21} = \tau, \quad s_{22} = s_{33} = -\frac{1}{3}\sigma, \quad \text{остальные } s_{ij} = 0, \quad (12)$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon, \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2}\gamma, \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{1}{2}\epsilon, \quad \text{остальные } \epsilon_{ij} = 0. \quad (13)$$

Вычислим тензорную свертку $s_{ij} d\epsilon_{ij}$, используя (12), (13):

$$s_{ij} d\epsilon_{ij} = s_{11} d\epsilon_{11} + s_{12} d\epsilon_{12} + s_{21} d\epsilon_{21} + s_{22} d\epsilon_{22} + s_{33} d\epsilon_{33} = \sigma d\epsilon + \tau d\gamma. \quad (14)$$

Теперь последовательная подстановка (12) – (14) в (11) дает известные уравнения Прандтля-Рейса:

$$d\sigma_{11} = d\sigma = E[(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_T^2})d\varepsilon - \frac{\sigma\tau}{\sigma_T^2}d\eta], \quad d\sigma_{12} = d\tau = \frac{E}{3}[-\frac{3\sigma\tau}{\sigma_T^2}d\varepsilon + (1 - \frac{3\tau^2}{\sigma_T^2})d\eta]. \quad (15)$$

На основании изложенного можно утверждать, что предложенный вариант схемы вывода физических уравнений пластического течения является более строгим и не требует привлечения каких-либо дополнительных наглядных образов геометрического характера или понятия механической работы для моделирования напряженно-деформированного состояния.

Описанная методология вывода уравнений пластического течения в силу простоты и строгости может быть полезна как в учебном процессе, так и при разработке новых математических моделей для конкретных видов материалов. Эти модели предполагается использовать при решении задач технологической механики, что и составит предмет дальнейших исследований в данном направлении.

Библиографический список

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
2. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела / А.П. Филин. — М.: Наука, 1975. — Т. 1: Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. — 832 с.
3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 287 с.
4. Прагер В. Проблемы теории пластичности / В. Прагер. — М.: Физматгиз, 1958. — 136 с.
5. Хромов В.Г. Механика процесса холодной упругопластической деформации стержня: учеб. пособие / В.Г. Хромов. — К.: УМК ВО, 1990. — 50 с.

Поступила в редакцию 21.01.2008 г.