

УДК 621.531

В.В. Леонтьев, доцент, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

СХОДИМОСТЬ И ТОЧНОСТЬ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧ В FEMLAB

Анализируются сходимость и точность решения плоской упругой и упруго-пластической задач при моделировании растяжения полосы с круглым вырезом по методу конечных элементов в FEMLAB.

Для исследования напряженно-деформированного состояния деталей и конструкций по методу конечных элементов (МКЭ) в настоящее время применяются различные программные комплексы. Можно утверждать, что наиболее удобным из них является FEMLAB компании COMSOL. В отличие от распространенного ANSYS, он имеет более простой, удобный и интуитивно понятный интерфейс, позволяя при этом решать практически столь же сложные задачи.

Цель статьи – исследовать сходимость и точность решения плоской упругой и упруго-пластической задач в FEMLAB и выработать рекомендации по выбору сетки конечных элементов и степени полинома, аппроксимирующего функцию перемещений.

Для создания модели и расчета принимается следующая последовательность действий.

1. Выбирается размерность модели, определяется физический раздел в Model Navigator (Навигатор моделей, где каждому разделу соответствует определенное дифференциальное уравнение) и определяется вид анализа (в механике деформируемого твердого тела – статический линейный, нелинейный и упруго-пластический анализы, расчет устойчивости и т.п.).

2. Задается геометрия.

3. Указываются механические свойства материала, начальные и граничные условия и функция перемещений для конечных элементов

4. Строится сетка конечных элементов.

5. Определяются параметры решаемого устройства и выполняется расчет.

6. Настраивается режим отображения.

7. Анализируются результаты.

При задании геометрии в окне рабочей области с использованием кнопок построения (точка, прямая, кривая, прямоугольник, эллипс) и редактирования (переместить, повернуть, изменить масштаб, копировать) создается контур исследуемой детали. Следует отметить, что это – наиболее трудоемкий этап решения задачи. К счастью, FEMLAB позволяет импортировать файлы, созданные CAD-системами, гораздо лучше приспособленными к описанию геометрии, в особенности – в трехмерном случае.

Механические свойства материала детали, начальные условия и функция перемещений задаются во вкладке Physics в окне Subdomain Settings. В этой же вкладке в окнах Boundary Settings и Point Settings задаются граничные условия – нагрузки и закрепления.

После задания всех свойств и граничных условий строится сетка. На первом этапе оценочного расчета можно задать сетку по умолчанию (Mesh>Initialize Mesh), несколько раз нажать Mesh>Refine mesh и, получив достаточно мелкую сетку, приступить к решению. При нажатии этих кнопок рабочая область переходит в режим Mesh Mode, и в рабочей области отображается разбиение фигуры на конечные элементы. Если в какой-либо части детали необходима более густая сетка, то можно нажать кнопку Refine selection и указать нужную область.

Параметры решаемого устройства выбираются кнопкой Solve>Solver parameters. Здесь в зависимости от типа задачи (линейная, нелинейная, упруго-пластическая и т.п.) используется тот или иной решатель. Большая часть времени расчета занята решением систем линейных уравнений; за их решение отвечает Linear system solver. По умолчанию используется Direct (UMFPACK). Этот решатель отнимает много ресурсов компьютера и для моделей, требующих длительного расчета, можно подобрать более подходящий. Если предыдущий решатель не работает или работает недопустимо долго, то можно попробовать Direct (SPOOLE). Он требует меньше памяти, но работает нестабильно. В крайнем случае выбирается итеративный решатель GMRES. Для положительно определенных систем с симметричными матрицами в выбирается Direct Cholesky (TAUCS) или итеративный Conjugate Gradients. Итеративные решатели потребляют меньше памяти, но надо следить за тем, чтобы процесс сходился, и, в случае необходимости, увеличивать количество итераций. Запускается решающее устройство кнопкой Solve или пунктом меню Solve>Solve problem.

После завершения решения автоматически включается режим Postprocessing mode (Режим постобработки), в котором можно наблюдать результаты вычисления. Вручную этот режим можно включить командой Postprocessing> Postprocessing mode. Имеется возможность выводить на монитор цветные эпюры напряжений, деформаций, перемещений и др. Каждый из полученных графиков можно сохранить как в виде рисунка, так и в текстовый файл. Полностью экспортировать все полученные данные можно с помощью пункта меню File>Export>Postprocessing Data.

Одной из основных проблем при использовании как этого, так и других пакетов программ является скорость сходимости и точность получаемого решения. Они зависят от разбиения конструкции на элементы, выбора функции перемещений, описывающей свойства конечного элемента, и числа элементов. FEMLAB, как и многие другие программы, использует треугольный конечный элемент. Функция же перемещений может быть выбрана в виде полиномов Лагранжа от 1-ой до 5-ой степеней.

Целью исследования является скорость сходимости решения в зависимости от количества конечных элементов и, прежде всего, степени аппроксимирующего полинома. Задача решалась при изучении напряженно – деформированного состояния растягиваемой полосы с круглым центральным отверстием, схема которой с разбивкой на конечные элементы изображена на рисунке 1. Материал полосы – сталь, размеры 160х160х10 мм, радиус отверстия 20 мм, интенсивность распределенной нагрузки 100 кН/м.

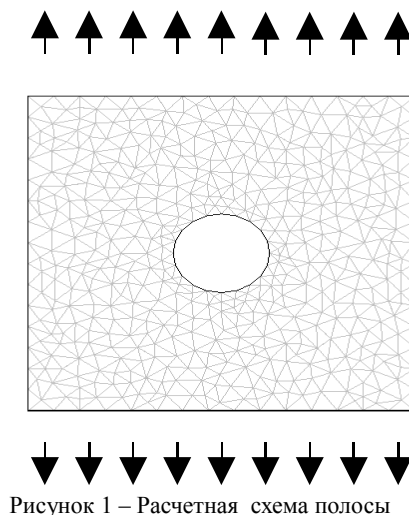


Рисунок 1 – Расчетная схема полосы

Этот классический пример концентрации напряжений удобен как тестовый по двум причинам: во-первых, существует точное решение, и, во-вторых, вблизи отверстия возникает резкое изменение напряжений, а и именно такие зоны наиболее интересны для исследования сходимости и точности решения. Результаты расчетов представлены в таблицах 1-5.

Таблица 1 – Линейная аппроксимация функции перемещений

Число КЭ	Максимальное напряжение на кромке выреза, МПа	Время расчета, с
950	325,5377	0,422
3800	355,2051	0,25
15200	361,8376	0,781
60800	361,4402	3,954
243200	360,2460	25,141

Таблица 3 – Кубичная аппроксимация функции перемещений

Число КЭ	Максимальное напряжение на кромке выреза, МПа	Время расчета, с
950	357,6852	0,703
3800	358,1657	2,672
15200	358,265	14,203

Таблица 5 – Аппроксимации функции

Таблица 2 – Квадратичная аппроксимация функции перемещений

Число КЭ	Максимальное напряжение на кромке выреза, МПа	Время расчета, с
950	361,1423	0,704
3800	359,6160	2,813
15200	358,7110	4,343
60800	358,4270	25,875

Таблица 4 – Аппроксимация функции перемещений полиномом 4-ой степени

Число КЭ	Максимальное напряжение на кромке выреза, МПа	Время расчета, с
950	358,2787	1,25
3800	358,1711	5,891
15200	358,2771	31,312

перемещений полиномом 5-ой степени

Число КЭ	Максимальное напряжение на кромке выреза, МПа	Время расчета, с
950	358,5504	2,719
3800	358,3374	12,297

Приведенные результаты получены для задачи в упругой постановке. Точное значение напряжений на кромке выреза составляет 358,1822 МПа. Поскольку далее будет рассмотрено решение соответствующей упруго-пластической задачи, то нагрузка была выбрана так, чтобы максимальные напряжения превосходили предел текучести.

Анализ результатов показывает, что при использовании весьма грубого разбиения, но с высокой степенью аппроксимирующего полинома, получается практически точное решение (полином 4-ой степени, 950 КЭ). При увеличении числа элементов при столь же высокой степени полинома решение несущественно уточняется, однако время решения задачи возрастает в несколько раз (5,891 с, при 3800 КЭ против 1,25 с, при 950 КЭ). Полиномы же степени выше четвертой использовать не рационально, поскольку решение начинает отклоняться от точного. Это связано, по-видимому, с накоплением вычислительной погрешности.

Полученный результат в целом соответствует теоретическому [1], т.е. с ростом степени полинома и числа конечных элементов решение упругой задачи более или менее быстро сходится к точному. Однако, как показано в [1, 2], этого априори нельзя утверждать для упруго-пластической задачи. Результаты решения такой задачи приведены в таблицах 6, 7. При расчете материал принимался изотропно упрочняющимся с пределом текучести 200 МПа. Точное значение напряжений на кромке выреза составляет 221,4536 МПа.

Таблица 6 – Линейная аппроксимация функции перемещений

Число КЭ	Максимальное напряжение на кромке выреза, МПа	Время расчета, с
950	227,4644	0,297
3800	229,4561	0,327
15200	228,1543	1,125
60800	226,3730	6,281

Таблица 7 – Квадратичная аппроксимация функции перемещений

Число КЭ	Максимальное напряжение на кромке выреза, МПа	Время расчета, с
950	225,5929	0,375
3800	224,5320	0,984
15200	223,8923	4,875

Анализ результатов показывает, что при использовании квадратичного полинома решение сходится к точному, однако в практических задачах нет необходимости использовать слишком мелкую сетку – удовлетворительный результат получается и при весьма грубой (950 КЭ). Линейный же полином дает удовлетворительное решение лишь при значительном числе элементов. Особо следует отметить, что использование полиномов степени выше второй ведет к расходящемуся итерационному процессу, используемому при решении упруго-пластической задачи.

Выводы

1. При использовании пакета FEMLAB для решения плоской упругой задачи и достижения необходимой точности достаточно использовать предлагаемую программой “грубую” сетку КЭ и задавать функцию перемещений в виде полинома Лагранжа 4-ой степени.

2. При решении упруго-пластической задачи для практических расчетов достаточно использовать квадратичный полином при “грубой” сетке КЭ.

Полученные результаты позволяют при решении практических задач рациональнее формировать сетку конечных элементов, давая тем самым возможность исследовать напряженно – деформированное состояние весьма сложных конструкций.

В заключение следует отметить, что возможности FEMLAB не ограничиваются только статическими задачами механики деформируемого твердого тела. Возможен анализ устойчивости, колебаний и других динамических процессов – для этого достаточно лишь выбрать соответствующий пункт в Навигаторе моделей. Более того, программный комплекс позволяет решать задачи электро- и термодинамики, механики жидкости и газа и даже рассматривать биохимические процессы. Возможно построение и мультифизических моделей, например, взаимодействие колеблющейся жидкости с цистерной и движение крови в кровеносной системе.

Автор выражает благодарность фирме COMSOL за предоставленную возможность пользоваться ее, без сомнения, замечательным программным продуктом.

Библиографический список

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 541 с.

2. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган; под ред. О. Зенкевича. — М.: Мир, 1986. — 318 с.

Поступила в редакцию 21.01.2008 г.