

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА РАДИОТЕХНИКИ

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц И Й
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ»
ЧАСТЬ I

Салицкий В.Б., к.т.н., доцент
кафедры радиотехники

СЕВАСТОПОЛЬ
2002

УДК

Учебное пособие по дисциплине «Основы теории цепей». Краткий конспект лекций / Составил В.Б. Салицкий.– Севастополь, 2002.–...с.

Учебное пособие может быть использовано при изучении основных вопросов дисциплины «Основы теории цепей».

Рецензенты:

профессор кафедры радиотехники, д.т.н. Бабуров Э.Ф.
доцент кафедры радиотехники, к.т.н. Гимпилевич Ю.Б.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Основные понятия и определения	6
1.1 Основные определения	6
1.2 Электрический ток	6
1.3 Напряжение	7
1.4 Электродвижущая сила	8
1.5 Мощность и энергия	8
1.6 Схема электрической цепи	8
2 Идеализированные пассивные элементы электрической цепи	10
2.1 Сопротивление	10
2.2 Емкость	11
2.3 Индуктивность	12
2.4 Схемы замещения реальных элементов электрической цепи	14
3 Идеализированные активные элементы электрической цепи	15
3.1 Идеальный источник напряжения	15
3.2 Идеальный источник тока	15
3.3 Схемы замещения реальных источников электрической энергии	16
4 Топология электрических цепей	17
4.1 Электрические схемы. Основные определения	17
4.2 Топологические графы электрических цепей	18
5 Уравнения электрического равновесия цепи	19
5.1 Компонентные и топологические уравнения электрической цепи. Законы Кирхгофа	19
5.2 Основная система уравнений электрического равновесия цепи	21
6 Задачи анализа цепей с источниками гармонических токов и напряжений	22
6.1 Понятие гармонических функций времени	22
6.2 Среднее, средневыпрямленное и действующее значение гармонических токов и напряжений	23
6.3 Уравнения электрического равновесия цепи при гармоническом внешнем воздействии	23
7 Метод комплексных амплитуд	25
7.1 Понятие о символических методах	25
7.2 Комплексные числа и операции над ними	25
7.3 Графическое суммирование комплексных чисел	27
7.4 Представление гармонической функции времени с помощью вращающего вектора. Комплексные изображения гармонических функций	27
7.5 Комплексные сопротивления и проводимость участка цепи	29
7.6 Комплексная схема замещения цепи. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме	30
8 Идеализированные пассивные элементы при гармоническом воздействии	33
8.1 Сопротивление	33
8.2 Емкость	34
8.3 Индуктивность	35
9 Анализ простейших линейных цепей при гармоническом воздействии	37
9.1 Общая схема применения метода комплексных амплитуд	37
9.2 Последовательные RL и RC цепи	37
9.3 Последовательная RLC-цепь	39
9.4 Параллельная RLC-цепь	40
9.5 Правило делителя напряжения и делителя тока	42
10 Энергетические процессы в простейших цепях при гармоническом воздействии	44
10.1 Мгновенная мощность пассивного двухполюсника	44

10.2	Полная, комплексная, реактивная и активная мощности	44
10.3	Баланс мощностей	45
10.4	Согласование источника энергии с нагрузкой	46
11	Преобразования электрических цепей	48
11.1	Участки цепей с последовательным соединением элементов	48
11.2	Участки цепей с параллельным соединением элементов	49
11.3	Участки цепей со смешанным соединением элементов	49
11.4	Эквивалентное преобразование «треугольника» сопротивлений в «звезду» и обратно.....	50
11.5	Последовательная и параллельная схемы замещения пассивного двухполюсника	51
11.6	Комплексные схемы замещения источников энергии	52
11.7	Перенос источников	52
12	Цепи с взаимной индуктивностью.....	54
12.1	Понятие взаимной индуктивности.....	54
12.2	Понятие об одноимённых зажимах.....	55
12.3	Коэффициент связи между катушками индуктивности	55
12.4	Цепи с взаимной индуктивностью при гармоническом воздействии	56
12.5	Эквивалентные преобразования участков цепей со связанными индуктивностями	56
12.6	Линейный трансформатор без сердечника.....	57
13	Методы формирования уравнений электрического равновесия цепи	59
13.1	Общие представления о методах формирования уравнений	59
13.2	Метод контурных токов.....	59
13.3	Метод узловых напряжений	61
13.4	Метод наложения.....	62
13.5	Метод эквивалентного источника.....	63
14	Комплексные частотные характеристики линейных электрических цепей	65
14.1	Понятие о комплексных частотных характеристиках	65
14.2	Комплексные частотные характеристики идеализированных двухполюсных элементов.....	66
14.3	Комплексные частотные характеристики цепей с одним энергоемким элементом	67
14.4	Понятие о резонансе в электрических цепях	68
15	Последовательный колебательный контур.....	70
15.1	Элементы контура и их схемы замещения.....	70
15.2	Резонансная частота, характеристическое сопротивление и добротность контура.....	70
15.3	Входные характеристики последовательного колебательного контура	71
15.4	Передачные характеристики последовательного колебательного контура	73
15.5	Избирательные свойства последовательного колебательного контура	74
15.6	Влияние внутреннего сопротивления источника энергии и сопротивления нагрузки на избирательные свойства колебательного контура	75
16	Параллельный колебательный контур	77
16.1	Виды параллельных колебательных контуров	77
16.2	Параллельный колебательный контур основного вида	77
16.3	Влияние внутреннего сопротивления источника и сопротивления нагрузки на избирательные свойства параллельного колебательного контура	79
16.4	Параллельный колебательный контур второго вида	80
16.5	Параллельный колебательный контур третьего вида	82
17	Связанные колебательные контуры	83
17.1	Общие представления о связанных контурах. Коэффициент связи	83

17.2 Настройка связанных контуров.....	83
17.3 Частотные характеристики связанных контуров.....	84

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1 Основные определения

Электрической цепью называется совокупность устройств и объектов, предназначенных для прохождения электрического тока. Составные части (элементы) электрической цепи можно разделить на две группы: источники электрической энергии и приемники (нагрузка).

Источники электрической энергии представляют собой различные устройства, в которых происходит преобразование химической, тепловой, механической и других видов энергии в электрическую. Например: гальванические элементы, аккумуляторы, солнечные батареи, гидрогенераторы и т.п.

Приемники – это элементы электрической цепи в которых происходит преобразование электрической энергии в другие виды энергии, а также запасание энергии. Например: электрические двигатели, лампы накаливания, транзисторы, резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности.

Основные элементы электрической цепи – источники и приемники электрической энергии – соединяют между собой с помощью **вспомогательных элементов**: соединительных проводников, ключей, кнопок, разъемов и т.п. Для подключения к остальной части цепи каждый элемент имеет внешние выводы, называемые также **зажимами** или **полюсами**. В зависимости от числа внешних выводов различают двухполюсные (резистор, конденсатор, катушка индуктивности) и многополюсные (транзистор, трансформатор) элементы.

В теории электрических цепи предполагается, что каждый элемент полностью характеризуется зависимостью между током и напряжением на его зажимах, при этом процессы происходящие внутри элемента не рассматриваются. Т.е. **элемент известен только тогда, когда известна связь между током и напряжением на его зажимах**.

В теории цепей реальные элементы заменяются их упрощенными моделями, построенными из идеализированных элементов. Используется всего пять основных типов идеализированных элементов: **сопротивление, емкость, индуктивность, идеальный источник напряжения, идеальный источник тока**. Модель реального элемента может содержать несколько определенным образом соединенных идеализированных элементов.

Электрическая цепь, которая получается из реальной при замене каждого реального элемента его упрощенной моделью, состоящей из идеальных элементов, называется идеализированной цепью. Мы будем рассматривать **только** идеализированные электрические цепи.

1.2 Электрический ток

Электрический ток проводимости – упорядоченное направленное движение свободных носителей заряда. В металлах такими носителями являются электроны, в полупроводниках – электроны и дырки, в жидкостях и газах - положительные и отрицательные ионы.

За направление тока независимо от природы носителей электрического заряда принимают направление, в котором перемещаются **носители положительного заряда**.

При расчете электрических цепей направление тока **выбирается произвольно** (условно положительное направление). Если в результате расчетов ток получится со знаком «плюс», значит его направление **совпадает** с условно положительным, если со знаком «минус», то направление его **противоположно** выбранному условно положительному. Выбранное направление тока на схеме указывается стрелкой **непосредственно на проводнике** (см. рис. 1.1).

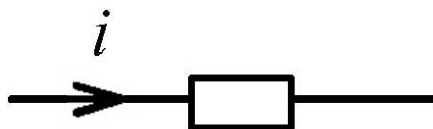


Рисунок 1.1

Количественно ток оценивается зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени. Для **переменного** тока, т.е. тока, изменяющегося во времени:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Для **постоянного** тока, т.е. тока, не меняющегося во времени:

$$I = \frac{q}{t}.$$

Иными словами, ток численно равен скорости изменения электрического заряда во времени. В международной системе СИ (международной системе единиц) ток измеряется в **амперах**, заряд – в **кулонах**, время – в **секундах**.

В нашем курсе мы будем использовать пять различных обозначений токов:

i – переменный ток (мгновенное значение тока);

I – постоянный ток или действующее значение гармонического тока;

I_m – амплитудное значение переменного гармонического тока;

$\dot{I}$ – комплексное действующее значение гармонического тока;

$\dot{I}_m$ – комплексное амплитудное значение гармонического тока;

Необходимо четко различать эти обозначения тока и применять в соответствии с их смыслом (смысл трех последних станет ясен в дальнейшем).

1.3 Напряжение

Как известно, на всякий заряд, помещенный в электрическое поле, действует сила, значение и направление которой определяется напряженностью электрического поля, а также зарядом и его знаком. Если носитель заряда является свободным, т.е. не закрепленным в какой-то фиксированной точке, то под действием приложенной силы он перемещается. Перемещение заряда происходит за счет энергии электрического поля. При перемещении единичного положительного заряда между любыми двумя точками **A** и **B** электрического поля силами этого поля совершается работа, равная разности потенциалов этих точек. Напомним, что **потенциал** φ_A произвольной точки **A** электрического поля определяется как работа, которая совершается силами электрического поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность. Разность потенциалов точек **A** и **B** называется напряжением между этими точками:

$$u = \varphi_A - \varphi_B.$$

Напряжение между точками **A** и **B** может быть определено как предел отношения энергии электрического поля w , затрачиваемой на перенос положительного заряда q из точки **A** в точку **B**, к этому заряду при $q \rightarrow 0$:

$$u = dw/dq.$$

В Международной системе единиц напряжение выражают в **вольтах** (В), а работу – в **джоулях** (Дж). Обычно под направлением напряжения понимают направление, в котором перемещаются под действием электрического поля свободные носители положительного заряда, т.е. направление от точки цепи с большим потенциалом к точке цепи с меньшим потенциалом. Очевидно, что на участках цепи, в которых нет источников электрической энергии, направление напряжения и тока **совпадают**. На зажимах источников электрической энергии направление напряжения **всегда противоположно** направлению тока. Напряжение будем обозначать стрелкой, расположенной рядом с участком электрической цепи (см. рис. 1.2).

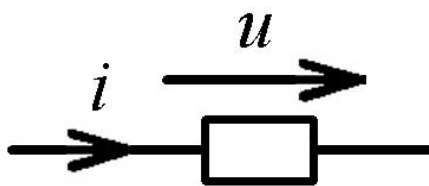


Рисунок 1.2

В нашем курсе мы будем использовать пять различных обозначений напряжений:

- u – переменное напряжение (мгновенное значение напряжения);
- U – постоянное напряжение или действующее значение гармонического напряжения;
- U_m – амплитудное значение переменного гармонического напряжения;
- $\dot{U}$ – комплексное действующее значение гармонического напряжения;
- $\dot{U}_m$ – комплексное амплитудное значение гармонического напряжения;

Необходимо четко различать эти обозначения напряжений и применять в соответствии с их смыслом (смысл трех последних станет ясен в дальнейшем)

1.4 Электродвижущая сила

Источники электрической энергии характеризуются электродвижущей силой (э.д.с.), которая определяется как работа сторонних сил источника, затрачиваемая на перемещение единичного положительного заряда внутри источника от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с большим потенциалом, т.е. **против** поля. Независимо от природы сторонних сил **э.д.с. источника численно равна напряжению между зажимами источника при отсутствии в нем тока**. Э.д.с. так же, как и напряжение, измеряется в вольтах. В зависимости от смысла, э.д.с. обозначается $e, E, E_m, \dot{E}, \dot{E}_m$, аналогично введенным обозначениям для напряжений.

1.5 Мощность и энергия

При перемещении элементарного электрического заряда dq между двумя точками, разность потенциалов которых составляет u силы электрического поля совершают элементарную работу:

$$dw = udq = uidt.$$

Энергия, поступившая в рассматриваемый участок цепи к моменту времени $t = t_1$, определяют интегрированием:

$$w = w(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} uidt.$$

Если для любого момента времени энергия $w(t)$ неотрицательна, то рассматриваемый участок цепи является **потребителем** энергии и называется **пассивным**. Если хотя бы для какого-то момента времени энергия отрицательна, то участок цепи содержит источник энергии и называется **активным**.

Производная энергии по времени, т.е. **скорость поступления энергии** в текущий момент времени t , представляет собой **мгновенную мощность** участка цепи:

$$p = dw/dt = ui$$

В СИ работу и энергию выражают в **джоулях** (Дж), а мощность – в **ваттах** (Вт).

1.6 Схема электрической цепи

Электрическая схема – это условное графическое изображение электрической цепи. В электротехнике и радиоэлектронике встречаются различные типы электрических схем: структурные, принципиальные и эквивалентные (расчетные) схемы.

Структурная электрическая схема – это условное графическое изображение реальной цепи, на котором отражены только важнейшие функциональные части цепи и основные связи между ними.

Принципиальная электрическая схема представляет собой графическое изображение реальной цепи, на котором с помощью условных графических обозначений показаны все

элементы цепи и все соединения между ними. Каждому реальному элементу электрической цепи (транзистору, резистору, конденсатору, трансформатору и т.п.) соответствуют условные графическое и буквенное обозначения, определяемые действующими стандартами ЕСКД.

Эквивалентной, или расчетной электрической схемой цепи называется условное графическое изображение моделирующей цепи, т.е. цепи, составленной из идеализированных элементов, замещающей исследуемую реальную цепь в рамках решаемой задачи. Каждому идеализированному элементу цепи присваиваются определенные условные графическое и буквенное обозначения (эти обозначения не стандартизованы). Эквивалентная схема цепи может быть получена из принципиальной электрической схемы, если каждый изображенный на ней реальный элемент заменить его эквивалентной схемой или схемой замещения.

Схема замещения реального элемента представляет собой условное графическое изображение идеализированной электрической цепи, модулирующей данный элемент в рамках поставленной задачи.

2 ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

2.1 Сопротивление

Сопротивление – идеализированный пассивный элемент электрической цепи, в котором электрическая энергия необратимо преобразуется в какой-либо другой вид энергии. При этом запасание энергии электрического и магнитного полей в нем не происходит.

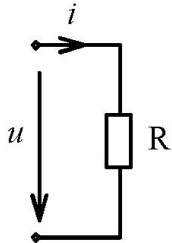


Рисунок 2.1

Наиболее близкий к нему реальный элемент – высококачественный резистор, в котором электрическая энергия преобразуется в тепловую. Однако в реальном резисторе происходит запасание энергии электрического и магнитного полей, в чем мы убедимся позднее. Идеализированный элемент сопротивление можно рассматривать как упрощенную модель резистора, в котором выделяется только его основная характеристика – сопротивление. Условное графическое изображение сопротивления представлено на рис 2.1. Как мы уже говорили, элемент нам известен тогда, когда известна связь между протекающим по нему током и падающим на нем напряжением. Эта связь устанавливается из вольт-амперной характеристики резистора.

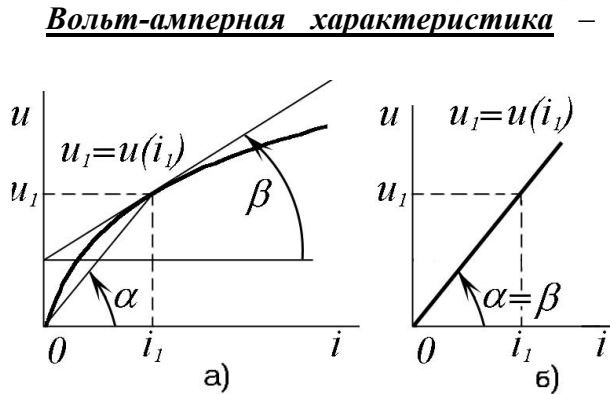


Рисунок 2.2

Вольт-амперная характеристика – это зависимость тока, протекающего через сопротивление, от приложенного к нему напряжения. В общем случае вольт-амперная характеристика (ВАХ) резистора нелинейна (см. рис 2.2а). Используя зависимость между мгновенными значениями токов и напряжений на зажимах резистора, можно определить его статическое и динамическое сопротивления.

Статическое сопротивление – это отношение мгновенных значений тока и напряжений на зажимах резистора:

$$R_{cm} = u/i.$$

Динамическое сопротивление резистора определяется производной мгновенного значения напряжения на его зажимах по току.

$$R_{дин} = du/di.$$

Из рисунка 2.2а видно, что $R_{cm} = \operatorname{tg} \alpha$, а $R_{дин} = \operatorname{tg} \beta$. В общем случае $R_{cm} \neq R_{дин}$. Если ВАХ резистора линейна (см. рис. 2.2б), то значения R_{cm} и $R_{дин}$ совпадают:

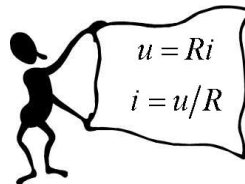
$$R_{cm} = R_{дин} = R,$$

где R – сопротивление резистора. Сопротивление в СИ выражается в **омах** (Ом).

Резистор с линейным сопротивлением – это резистор с линейной ВАХ.

Резистор с нелинейным сопротивлением – это резистор с нелинейной ВАХ.

В дальнейшем, за исключением особо оговоренных случаев, мы будем иметь дело с линейными сопротивлениями. Для линейного сопротивления уравнения, связывающие ток и напряжение на его зажимах, определяются законом Ома и выглядят следующим образом:



Мгновенная мощность сопротивления – величина **всегда неотрицательная**:

$$p = ui = Ri^2 = u^2/R.$$

То же справедливо и для энергии, поступающей в сопротивление и преобразующейся в другие виды энергии:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p dt = R \int_{-\infty}^t i^2 dt = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^t u^2 dt \geq 0.$$

Т.о., в любой момент времени сопротивление может **только потреблять энергию** от источника и ни в какие моменты времени не может отдавать электрическую энергию другим элементам цепи. Т.е. сопротивление относится к пассивным элементам.

2.2 Емкость

Емкость – идеализированный пассивный элемент электрической цепи, обладающий свойством запасать энергию электрического поля, причем в нем не происходит запасаения энергии магнитного поля или преобразование электрической энергии в другие виды энергии.

Наиболее близкий к нему реальный элемент – **конденсатор**. Основной особенностью конденсатора является его способность запасать энергию электрического поля. Однако, в отличие от идеального элемента – емкости – в конденсаторе имеют место **потери энергии** в диэлектрике и в обкладках, т.е. происходит преобразование электрической энергии в другие виды энергии, а также происходит запасаение энергии магнитного поля. Условное графическое изображение емкости приведено на рисунке 2.3.

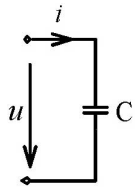


Рисунок 2.3

Кулон-вольтной характеристикой конденсатора называется зависимость заряда q , накопленного в емкости, от напряжения на его зажимах u . В общем случае эта характеристика имеет нелинейный характер (см. рис 2.4, кривая 1). Количественно зависимость заряда, накопленного в емкости, от напряжения, оценивают значениями статической и динамической емкости:

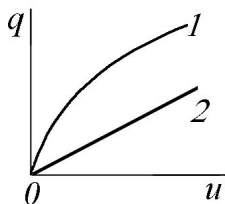


Рисунок 2.4

$$\begin{aligned} C_{ст} &= q/u \\ C_{дин} &= dq/du \end{aligned}$$

В общем случае динамическая емкость не равна статической. Если зависимость заряда, накопленного в емкости, от напряжения имеет линейный характер (рис. 2.4, кривая 2), то значения статической и динамической емкостей равны и не зависят от напряжения:

$$C_{ст} = C_{дин} = C.$$

В СИ емкость C выражается в **фарадах (Ф)**.

Емкость с линейной кулон-вольтной характеристикой называется **линейной**.

Емкость с нелинейной кулон-вольтной характеристикой называется **нелинейной**.

В дальнейшем, мы будем иметь дело только с линейными емкостями.

Найдем зависимость между мгновенными значениями тока и напряжения на зажимах линейной емкости:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du} \frac{du}{dt} = C \frac{du}{dt}.$$

Как видно из последнего выражения, ток в емкости пропорционален скорости изменения ее напряжения. **Если напряжение на зажимах емкости не изменяется во времени, то ток в емкости равен нулю.** Т.е. **сопротивление емкости постоянному току бесконечно велико.** Решим предыдущее уравнение относительно напряжения u и запишем оба уравнения емкости:



$$i = C \frac{du}{dt}; \quad u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt.$$

Предел «минус бесконечность» ставится для того, чтобы учесть все изменения заряда в емкости, как бы давно они ни происходили.

Если наблюдение за напряжением емкости начинается с некоторого момента времени t_0 , то последний интеграл можно разбить на сумму, и тогда уравнения емкости запишутся в следующем виде:

$$i = C \frac{du}{dt}; \quad u = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt.$$



Мгновенная мощность емкости:

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt}.$$

Мгновенная мощность емкость может быть как положительной (емкость заряжается), так и отрицательной (емкость разряжается).

Энергия электрического поля, запасенного емкостью в произвольный момент времени t определяется напряжением емкости или ее зарядом и **всегда неотрицательна**:

$$w = w(t) = \int_{-\infty}^t p dt = C \int_0^{u_C} u du = C \frac{u_C^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

$$w = \frac{Cu^2}{2}$$

Следовательно, емкость является пассивным элементом электрической цепи.

2.3 Индуктивность

Индуктивность – идеализированный пассивный элемент электрической цепи, в котором происходит запасание энергии магнитного поля. Наиболее близок к идеализированному элементу – индуктивности – реальный элемент электрической цепи **катушка индуктивности**. В отличие от индуктивности, в катушке индуктивности кроме запасания энергии магнитного поля происходит запасание энергии электрического поля и преобразование электрической энергии в тепловую.

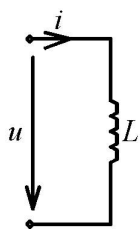


Рисунок 2.5

Условное графическое изображение индуктивности приведено на рисунке. 2.5. По закону электромагнитной индукции э.д.с., наводимая на зажимах индуктивности:

$$e = -d\Psi/dt$$

где Ψ – потокосцепление катушки индуктивности, определяемое как сумма магнитных потоков Φ_i , пронизывающих ее отдельные витки:

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i,$$

где N – число витков катушки. В СИ магнитный поток и потокосцепление выражают в **веберах** (Вб).

Магнитный поток, пронизывающий каждый из витков катушки в общем случае может содержать две составляющие: магнитный поток самоиндукции Φ_{cu} и магнитный поток внешних полей Φ_{en} .

$$\Phi = \Phi_{cu} + \Phi_{en}.$$

Первая составляющая представляет собой магнитный поток, вызванный протекающим по катушке током; вторая – определяется магнитными полями, существование которых не

связано с током катушки (например, магнитное поле Земли, магнитные поля других катушек и др.). Если вторая составляющая магнитного потока вызвана магнитным полем другой катушки, то ее называют **магнитным потоком взаимной индукции**. Соответственно и потокосцепление катушки состоит из двух составляющих:

$$\Psi = \Psi_{cu} + \Psi_{en}.$$

Наведенная в катушке э.д.с. в свою очередь может быть представлена в виде суммы э.д.с. самоиндукции, которая вызвана изменением магнитного потока самоиндукции и э.д.с., вызванной изменением магнитного потока внешних по отношению к катушке полей:

$$e = e_{cu} + e_{en}.$$

Рассмотрим магнитоэкранированную катушку, у которой внешние магнитные поля отсутствуют. Для нее:

$$e = e_{cu} = -d\Psi_{cu}/dt.$$

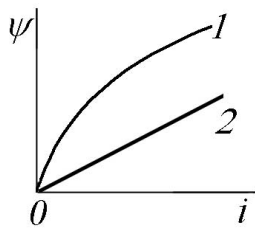


Рисунок 2.6

Потокосцепление самоиндукции зависит от протекающего по катушке тока. Эта зависимость носит название **вебер-амперной характеристики** катушки индуктивности. В общем случае она имеет нелинейный характер (рис 2.6, кривая 1). В частном случае, например, для катушки без магнитного сердечника эта зависимость может быть линейной (рис 2.6, кривая 2). Количественно зависимость потокосцепления самоиндукции от тока определяется статической и динамической индуктивностями катушки:

$$L_{ст} = \Psi_{cu}/i_L, \quad L_{дин} = d\Psi_{cu}/di_L.$$

Значения $L_{ст}$ и $L_{дин}$ в общем случае не равны между собой и зависят от выбора значения тока i . При линейной зависимости вебер-амперной характеристики статическая и динамическая индуктивности катушек равны и не зависят от выбора рабочей точки: $L_{ст} = L_{дин} = L$.

В СИ индуктивность выражается в **генри** (Гн). В дальнейшем ограничимся рассмотрением только линейных индуктивностей. Для катушки с линейной индуктивностью э.д.с. e может быть представлена в следующем виде:

$$e = -\frac{d\Psi_{cu}}{dt} = -\frac{d\Psi_{cu}}{di} \frac{di}{dt} = -\frac{d\Psi_{cu}}{di} \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$

При анализе цепей обычно рассматривают не значение э.д.с., наведенной в катушке, а напряжение u_L на ее зажимах, положительное направление которого выбирают совпадающим с положительным направлением тока (т.е. противоположно направлению э.д.с., рис. 2.5):

$$u = -e = L \frac{di_L}{dt}.$$

Т.о., для линейной индуктивности **напряжение на ее зажимах прямо пропорционально скорости изменения тока**. При протекании через индуктивность постоянного тока напряжение на ее зажимах равно нулю, следовательно, **сопротивление индуктивности постоянному току равно нулю**. Решим предыдущее уравнение относительно напряжения u и запишем оба уравнения индуктивности:



$$u = L \frac{di}{dt}; \quad i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt.$$

Нижний предел берется равным минус бесконечности для того, чтобы учесть все изменения магнитного потока, как бы давно они ни происходили.

Если наблюдение за током индуктивности начинается с некоторого момента времени t_0 , то последний интеграл можно разбить на сумму, и тогда уравнения индуктивности запишутся в следующем виде:

$$u = L \frac{di}{dt}; \quad i = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u dt.$$



Мгновенная мощность индуктивности:

$$p = ui = Li \frac{di}{dt}.$$

Мгновенная мощность емкость может быть как положительной (индуктивность запасает энергию магнитного поля), так и отрицательной (индуктивность отдает запасенную в ней энергию в остальную цепь). Энергия магнитного поля, запасенного индуктивностью, в произвольный момент времени t определяется током через индуктивность или ее потокосцеплением и **всегда неотрицательна**:

$$w = w(t) = \int_{-\infty}^t p dt = L \int_0^{i_L} i di = L \frac{i_L^2}{2} = \frac{\Psi_{cu}^2}{2L}$$

$$w = \frac{Li_L^2}{2}$$

Следовательно, индуктивность является пассивным элементом электрической цепи.

Идеализированные пассивные элементы электрической цепи, емкость и индуктивность, способные запасать энергию электрического или магнитного полей, называются **энергоемкими** или **реактивными** элементами цепи.

2.4 Схемы замещения реальных элементов электрической цепи

Как уже отмечалось, процессы в реальных элементах существенно сложнее, чем в идеализированных, в частности, в каждом реальном элементе наряду с основным имеют место другие, т.н. **паразитные** процессы. Вследствие этого схемы замещения реальных элементов в общем случае состоят из нескольких идеализированных элементов различных типов. Вид эквивалентной схемы и параметры входящих в нее идеализированных элементов существенным

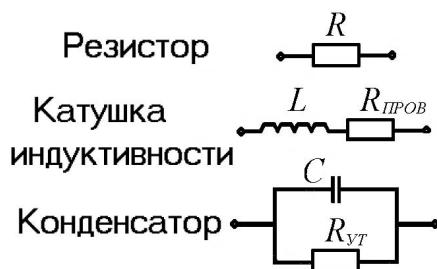


Рисунок 2.7

образом зависит от конструкции реального элемента, технологии его изготовления, и свойств применяемых материалов. Следует отметить, что схемы замещения одного и того же элемента могут иметь различный вид в зависимости от рассматриваемого диапазона частот. Мы будем применять схемы замещения реальных пассивных элементов на низких частотах (см. рис. 2.7). Пренебрегаем всеми паразитными процессами в резисторе и считаем его эквивалентным сопротивлению. В катушке индуктивности учитываем лишь сопротивление провода $R_{пров}$, из которого

она изготовлена, а в конденсаторе – сопротивление утечки диэлектрика между обкладками $R_{ум}$.

3 ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ АКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

3.1 Идеальный источник напряжения

Идеальный источник напряжения (источник э.д.с.) представляет собой идеализированный активный элемент, напряжение на зажимах которого *не зависит от протекающего через него тока*. Условное графическое обозначение источника напряжения приведено на рис. 3.1. Стрелка внутри кружка на рисунке указывает направление э.д.с. и направлена от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с большим потенциалом, в то время как напряжение на внешних зажимах источника направлено от зажима с более высоким потенциалом к зажиму с меньшим потенциалом.

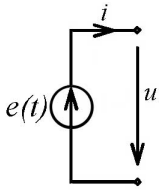


Рисунок 3.1

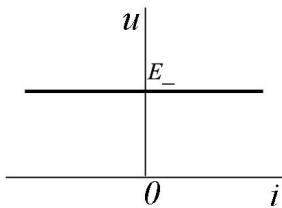


Рисунок 3.2

Внешней характеристикой любого источника электрической энергии называется зависимость напряжения на его зажимах от тока источника. Внешняя характеристика идеального источника напряжения является прямой линией, параллельной оси токов (рис. 3.2).

3.2 Идеальный источник тока

Идеальный источник тока (источник тока) – это идеализированный активный элемент, ток которого *не зависит от напряжения на его зажимах*. Условное графическое обозначение

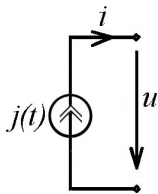


Рисунок 3.3

источника тока приведено на рисунке 3.3. Двойная стрелка на рисунке показывает направление тока внутри источника. Это направление совпадает с направлением перемещения положительных зарядов внутри источника, т.е. с направлением от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с большим потенциалом.

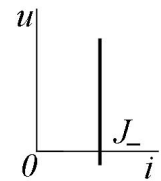


Рисунок 3.4

Внешняя характеристика источника тока показана на рис. 3.4.

Идеальные источники тока и напряжения представляют собой идеализированные источники энергии. Они обладают способностью отдавать энергию подключенным к ним участкам электрической цепи, другими словами, потребляемая ими энергия может быть *отрицательна*. Т.о., указанные источники относятся к **идеализированным активным** элементам.

Ток источника тока и напряжение источника напряжения являются параметрами идеализированных активных элементов, подобно тому как сопротивление, емкость и индуктивность являются параметрами одноименных идеализированных пассивных элементов. Можно показать, что идеальный источник напряжения и идеальный источник тока представляют собой идеализированные (нереальные) элементы с бесконечно большой мощностью.

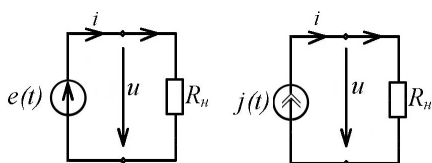


Рисунок 3.5

На рис. 3.5 изображены идеальные источники электрической энергии с подключенным к ним сопротивлением нагрузки.

Для схемы с идеальным источником напряжения ток в цепи и мощность, выделяемая в нагрузке, соответственно:

$$i = \frac{u}{R_n}, \quad p = \frac{1}{R_n} u^2 = \frac{1}{R_n} e^2.$$

С уменьшением R_n ток нагрузки и выделяемая в ней мощность неограниченно возрастают. Аналогично в схеме с идеальным источником тока при увеличении сопротивления нагрузки напряжение на зажимах и мощность, выделяемая на R_n , бесконечно возрастают.

Реальные источники электрической энергии, в отличие от идеальных, всегда обладают конечной мощностью.

3.3 Схемы замещения реальных источников электрической энергии

Идеализированные источники тока и напряжения можно рассматривать как упрощенные модели реальных источников электрической энергии. При определенных условиях, в достаточно узком диапазоне токов и напряжений, внешние характеристики ряда реальных источников энергии могут приближаться к характеристикам идеализированных активных элементов. Так, внешняя характеристика гальванического элемента в области малых токов имеет вид, близкий к внешней характеристике источника напряжения (рис. 3.2), а внешняя характеристика выходного каскада на транзисторе в определенном диапазоне напряжений приближается к внешней характеристике источника тока (рис. 3.4).

В то же время свойства реальных источников энергии значительно отличаются от свойств идеализированных активных элементов. Реальные источники энергии обладают конечной мощностью; их внешняя характеристика, как правило, не параллельна оси токов или оси напряжений, а пересекает эти оси в двух характерных точках, соответствующих режимам холостого хода (U_x) и короткого замыкания (I_k). С достаточной для практики точностью внешние характеристики большинства реальных источников энергии могут быть приближенно представлены прямой линией, пересекающей оси токов и напряжений в точках 1 и 2 (рис. 3.6).

Уравнение этой прямой, записанное по координатам точек 1 и 2, может быть представлено в двух видах:

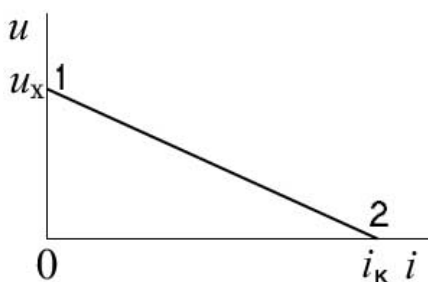


Рисунок 3.6



$$u = u_x - \frac{u_x}{i_k} i,$$

$$i = i_k - \frac{i_k}{u_x} u.$$

Этим уравнениям соответствует две схемы замещения реальных источников электрической энергии, составленных из идеализированных элементов: последовательная и параллельная (рис. 3.7 а,б) при условии, что $u_x/i_k = R_i$, а $i_k/u_x = G_i$, где R_i – внутреннее сопротивление источника в последовательной схеме замещения, а G_i – внутренняя проводимость в параллельной схеме замещения.

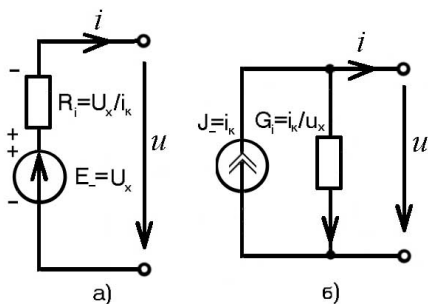


Рисунок 3.7

Таким образом, идеальный источник напряжения можно рассматривать как реальный источник, внутреннее сопротивление которого равно нулю, а идеальный источник тока можно рассматривать как такой реальный, внутренняя проводимость которого равна нулю. Обе рассмотренные схемы замещения реального источника

были получены из одной и той же внешней характеристики источника и, следовательно, их поведение относительно внешних зажимов совершенно одинаково. Выбор той или иной схемы замещения может быть сделан совершенно произвольно, однако в процессе исследования цепи может возникнуть необходимость перехода от одной схемы к другой. Формулы перехода от последовательной схемы замещения к параллельной на постоянном токе: $J = E / R_i$; $G_i = 1/R_i$ и от параллельной к последовательной: $E = J / G_i$; $R_i = 1/G_i$. Необходимо обратить внимание на то, что переход от одной схемы замещения к другой возможен только для источников внутреннего сопротивления которых имеет конечное значение ($R_i \neq 0, R_i \neq \infty$).

4 ТОПОЛОГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

4.1 Электрические схемы. Основные определения

Электрическая схема – это условное графическое изображение электрической цепи. В теории цепей рассматривают исключительно эквивалентные схемы. В дальнейшем под термином электрическая схема будем понимать именно эквивалентную схему электрической цепи. Схема будет содержать идеализированные активные и пассивные элементы, а также идеализированные **вспомогательные** элементы: выводы цепи или ее частей, соединительные проводники и элементы коммутации (разъемы, ключи, переключатели и т.п.). Следует иметь в виду, что способ изображения идеализированных активных, пассивных и вспомогательных элементов и их взаимное расположение на схеме не оказывают влияние на характер электрических процессов в исследуемой цепи. В зависимости от характера соединений идеализированных элементов различают **неразветвленные** и **разветвленные** цепи. В неразветвленной цепи через все элементы протекает один и тот же ток (рис 4.1,а). В

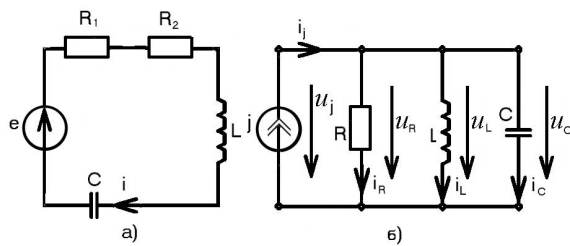


Рисунок 4.1

разветвленных цепях (рис 4.1,б) токи через различные элементы могут быть неодинаковы. **Последовательным** называется такое соединение элементов, при котором через них протекает один и тот же ток (рис. 4.1,а). **Параллельным** называется такое соединение элементов, при котором все элементы находятся под одним и тем же напряжением (рис. 4.1,б).

Комбинация последовательного и

параллельного соединения элементов называется **смешанным** соединением элементов. Кроме того, различают соединение «**треугольником**» и «**звездой**» (рис. 4.2).

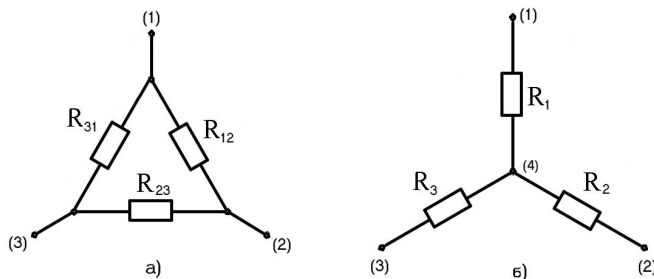


Рисунок 4.2

Ветвь – представляет собой участок электрической цепи, вдоль которого протекает один и тот же ток. Ветви нумеруются арабскими цифрами начиная с единицы. Для нумерации ветвей используют индексы протекающих по ним токов.

Узел электрической цепи называется место соединения трех и более ветвей. Узлы нумеруются арабскими цифрами в круглых скобках,

начиная с нуля. Обычно в качестве нулевого выбирается узел, к которому сходится наибольшее количество ветвей.

Контур – замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям цепи, где ни одна из ветвей не повторяется дважды. Контур характеризуется направлением обхода (порядком перечисления ветвей). Направление обхода выбирается произвольно и указывается изогнутой стрелкой. Контур нумеруются римскими цифрами начиная с единицы.

На рис. 4.3 показаны все виды нумераций и обозначений.

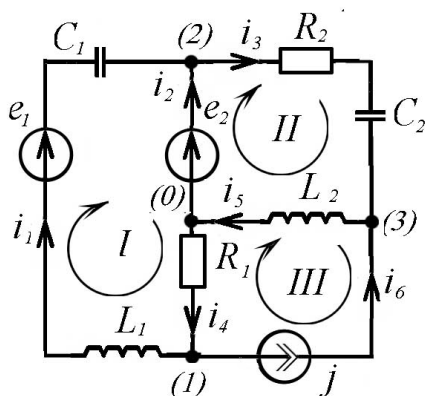


Рисунок 4.3

4.2 Топологические графы электрических цепей

Граф – это совокупность отрезков линий произвольной длины и формы.

Ветвь графа – отрезок линии произвольной длины и формы.

Узел графа – точка соединения трех и более ветвей.

В теории электрических цепей применяются направленные (ориентированные) графы, у которых каждой ветви приписывается определенное направление, указываемое стрелкой.

Направленный топологический граф – это упрощенная модель электрической цепи, отражающая только ее структурные свойства. Граф строится по эквивалентной схеме цепи. Каждую ветвь цепи заменяют ветвью графа, а каждый узел цепи преобразуется в узел графа. На ветвях графа стрелками указывают их направления, которые совпадают с положительными направлениями токов, протекающих по соответствующим ветвям цепи. Нумерация ветвей и узлов графа та же, что нумерация ветвей и узлов ветвей и узлов цепи.

Свойства графа не зависят от формы и длины ветвей а также от взаимного расположения узлов графа на плоскости и определяются только числом ветвей p , числом узлов q и способом соединения ветвей между собой. Если ветвь подсоединена к узлу, то говорят, что ветвь **инцидентна** этому узлу.

Планарным (плоским) называется такой граф, который в результате преобразований может быть изображен на плоскости без пересечения ветвей. Непланарный (объемный) граф не может быть изображен на плоскости без пересечения ветвей. Таким же образом вводится понятие планарной и непланарной электрической цепи. Планарный граф делит плоскость, на которой он изображен, на внешнюю и внутреннюю области. Внутренние области, ограниченные ветвями графа, называются ячейками или окнами графа.

Контур графа – замкнутый путь, проходящий по ветвям графа, где ни одна из ветвей не повторяется дважды.

Дерево графа – подграф, содержащий все узлы, но не содержащий ни одного контура.

Ветви дерева – это ветви графа, вошедшие в дерево. Количество ветвей дерева $M = q - 1$. В качестве ветвей дерева **запрещается** выбирать ветви, содержащие источник тока.

Главные ветви – ветви, не вошедшие в дерево. Количество главных ветвей $N = p - q + 1$.

Главный контур графа – это контур, образованный добавлением к дереву графа любой главной ветви. Количество главных контуров $N = p - q + 1$.

На рисунке 4.4 приведена схема электрической цепи и соответствующий ей граф. В

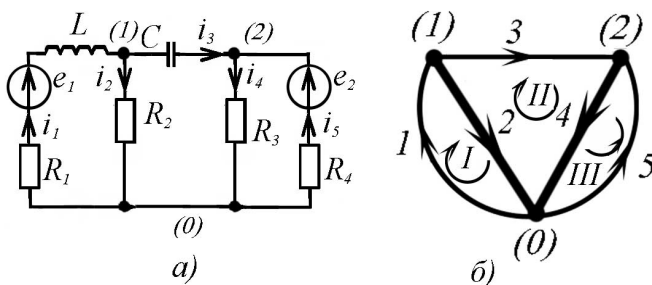


Рисунок 4. 4

качестве ветвей дерева выбрана одна из возможных комбинаций (ветвь 2-4). Ветви 1-3-5 – главные ветви. С ветвями дерева они образуют три главных контура (I-II-III).

С помощью топологических графов будем **определять количество и состав независимых контуров**, для которых составляются уравнения по второму закону Кирхгофа для заданной электрической цепи.

5 УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЦЕПИ

5.1 Компонентные и топологические уравнения электрической цепи. Законы Кирхгофа

Математическое описание процессов в электрических цепях базируется на уравнениях двух типов: компонентных и топологических.

Компонентные уравнения — устанавливают связь между током и напряжением пассивной части ветви каждой электрической цепи. Количество таких уравнений равно числу ветвей, а вид каждого зависит от состава ветви. Если ветвь содержит один пассивный элемент, то компонентное уравнение ветви совпадает с компонентным уравнением этого элемента, если несколько — вид компонентных уравнений усложняется. Примеры компонентных уравнений для различных ветвей приведены на рис. 5.1:

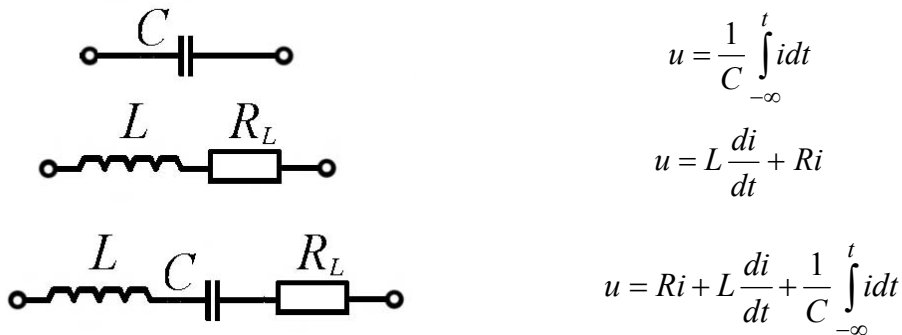


Рисунок 5.1

Топологические уравнения отражают свойства цепи, которые определяются только ее конфигурацией и не зависят от того, какие электрические элементы входят в состав цепи. К топологическим уравнениям относятся уравнения, составленные на основании первого и второго законов Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами ветвей в каждом из узлов цепи: *алгебраическая сумма мгновенных значений токов всех ветвей, подключенных к данному узлу в любой момент времени равна нулю.*



В соответствие с первым законом Кирхгофа для каждого из узлов цепи может быть составлено **уравнение баланса токов**:

$$\sum_k i_k = 0$$

где k — номер ветви, подключенной к рассматриваемому узлу. Суммирование токов производится с учетом выбранных положительных направлений: всем токам, одинаково ориентированным относительно узла, приписывается одинаковый знак. Условимся токи, направленные к узлу, брать со знаком «плюс», а токи, направленные от узла, со знаком «минус».

Например, для рис. 5.2 первый закон Кирхгофа запишется в виде:

$$i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_5 = 0.$$

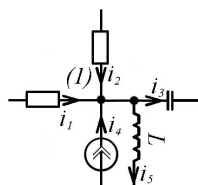


Рисунок 5.2

Количество уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа:

$$M = q - 1$$

где q — число узлов в заданной электрической цепи. Уравнение,

составленное для последнего их узлов, будет линейно зависимым от предыдущих уравнений, т.е. оно может быть получено из них, поэтому для последнего узла уравнение не составляется. Обычно не составляется уравнение для нулевого узла.

Существует другая формулировка первого закона Кирхгофа. Если токи, втекающие в узел, перенести в одну часть равенства, а токи, вытекающие из узла – в другую, то первый закон Кирхгофа можно сформулировать следующим образом: **сумма мгновенных значений токов, втекающих в узел, в любой момент времени равна сумме мгновенных значений токов, вытекающих из узла.**

Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между напряжениями ветвей, входящих в произвольный контур: **алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений ветвей, входящих в контур, в любой момент времени равна нулю:**

$$\sum_k u_k = 0,$$

где k – номер ветви, входящей в рассматриваемый контур. Суммирование напряжений производится с учетом выбранных положительных направлений: напряжения, совпадающие по направлению с направлением обхода контура, берутся со знаком «плюс», не совпадающие – со знаком «минус».

Количество линейно независимых уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа:

$$N = p - q + 1,$$

где p – количество ветвей, q – число узлов в заданной электрической цепи.

Если напряжения на пассивных элементах контура и на источнике тока перенести в одну часть равенства, а все э.д.с., входящие в контур, – в другую, то получим вторую формулировку второго закона Кирхгофа: **алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на пассивных элементах ветвей, входящих в контур, в любой момент времени равна алгебраической сумме э.д.с., действующих в этом контуре:**

$$\sum_i u_i = \sum_j e_j$$

где u_i – напряжение на пассивной части каждой ветви, входящей в контур, e_j – э.д.с. источников напряжения, действующих в контуре. Напряжения на элементах контура и э.д.с. источников напряжения берутся со знаком «плюс», если направления напряжений и направления э.д.с. совпадают с направлением обхода контура. В противном случае соответствующие слагаемые берутся со знаком «минус».

Для контуров, в которых есть источник тока, уравнение баланса напряжений составляется по общему правилу, причем напряжение на источнике указывается в левой части уравнения. Для примера рассмотрим контур некоторой электрической цепи, представленный на

рис. 5. 3.

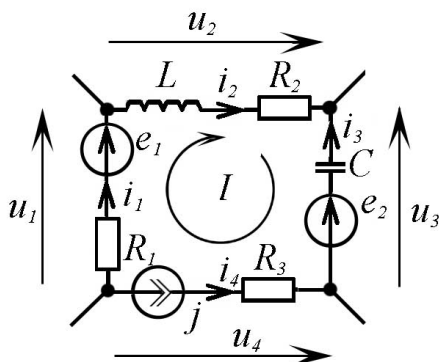


Рисунок 5. 3

По первой формулировке второго закона Кирхгофа:
 $u_1 + u_2 - u_3 - u_4 = 0.$

По второй формулировке второго закона Кирхгофа:
 $u_{R1} + u_{R2} + u_L - u_C - u_{R3} + u_j = e_1 - e_2.$

5.2 Основная система уравнений электрического равновесия цепи

Математически задача анализа электрической цепи сводится к составлению и решению системы линейно независимых уравнений, в которых в качестве неизвестных фигурируют токи и напряжения исследуемой цепи.

Используя компонентные уравнения и топологические уравнения, составленные на основании законов Кирхгофа, всегда можно сформулировать систему уравнений электрического равновесия, число уравнений которой достаточно для определения всех неизвестных токов и напряжений. Будем называть такую систему основной системой уравнений электрического равновесия цепи.

В общем случае в цепи, содержащей p ветвей и q узлов, имеется $2p$ неизвестных токов и напряжений в цепи. Используя законы Кирхгофа для такой цепи можно составить $M = q - 1$ независимых уравнений баланса токов и $N = p - q + 1$ независимых уравнений баланса напряжений. В сочетании с компонентными уравнениями, количество которых равно p , получаем $2p$ независимых уравнений, что достаточно для определения неизвестных токов и напряжений. Если в рассматриваемой цепи имеется p_{um} ветвей, в которых содержится идеальные источники тока (т.е. токи этих ветвей заданы, а напряжения неизвестны) и p_{un} ветвей, состоящих только из идеальных источников напряжения (напряжения этих ветвей известны, а токи – нет), то общее число неизвестных токов и напряжений, а следовательно, и число необходимых уравнений системы, уменьшается до $2p - p_{um} - p_{un}$. Как было показано ранее, топологические уравнения являются алгебраическими, а компонентные уравнения могут быть как алгебраическими, так и дифференциальными или интегральными. Вследствие этого уравнения электрического равновесия цепи представляют собой в общем случае систему интегродифференциальных уравнений.

Составим основную систему уравнений электрического равновесия для цепи, приведенной на рис. 4.3. Число ветвей в этой цепи $p = 6$, число узлов $q = 4$, число ветвей, содержащих вырожденный источник напряжения, $p_{un} = 1$, число ветвей, содержащих вырожденный источник тока, $p_{um} = 1$. Количество уравнений в основной системе электрического равновесия цепи $2p - p_{um} - p_{un} = 10$. Полученная система имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} i_4 - i_1 - j &= 0 \\ i_1 + i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 - i_5 + i_6 &= 0 \end{aligned} \right\} q - 1$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 + u_4 &= e_1 - e_2 \\ u_3 + u_5 &= e_2 \\ -u_4 - u_5 + u_j &= 0 \end{aligned} \right\} p - q + 1$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i_1 dt \\ u_3 &= R_2 i_3 + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i_3 dt \\ u_4 &= R_1 i_4 \\ u_5 &= L_2 \frac{di_5}{dt} \end{aligned} \right\} p - p_{um} - p_{un}$$

6 ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ С ИСТОЧНИКАМИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

6.1 Понятие гармонических функций времени

Гармоническими называются функции времени $a(t)$, изменяющиеся по синусоидальному или косинусоидальному закону:

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) = A_m \sin(\omega t + \psi'), \text{ где } \psi' = \psi + \frac{\pi}{2}.$$

Традиционно в радиотехнической литературе используют *косинусоидальную* форму записи гармонической функции времени. Пример гармонической функции времени представлен на рис. 6.1.

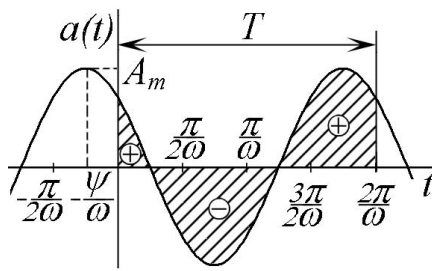


Рисунок 6.1

Амплитудой A_m называется наибольшее значение гармонической функции времени. Ее размерность совпадает с размерностью гармонической функции.

Мгновенной фазой гармонического колебания носит название аргумент при косинусе $\theta = \omega t + \varphi$.

Начальной фазой ψ называется значение мгновенной фазы $\theta(t)$ при $t = 0$. Мгновенная и начальная фазы функции времени выражаются в

радианах (рад) и градусах ($^\circ$).

Угловой частотой ω называется скорость изменения мгновенной фазы во времени: $\omega = d\theta/dt$. Угловая частота выражается в радианах в секунду (рад/сек).

Периодом гармонической функции времени T называется наименьший промежуток времени, через который значения функции повторяются, т.е. $a(t) = a(t \pm nT)$, где n – целое число. Период измеряется в секундах (сек).

Частотой f называется величина, обратная периоду: $f = 1/T$. Частота выражается в герцах (Гц).

Угловая частота, период и частота связаны следующими соотношениями:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

Положительным (отрицательным) полупериодом называется интервал времени, в котором значения гармонической функции положительны (отрицательны, рис. 6.1).

Положительной (отрицательной) полуволной называется совокупность значений функций в положительном (отрицательном) полупериоде.

При построении временных диаграмм (графиков) гармонических функций обычно бывает удобно откладывать по оси абсцисс не время t , а пропорциональную ему величину ωt . В этом случае смещения точки $\omega t = 0$ относительно ближайшего максимума функции равно начальной фазе ψ . Если начало координат смещено вправо относительно ближайшего максимума, то начальная фаза положительна, если влево – отрицательна. Гармонические функции с положительной и отрицательной начальными фазами в функции от ωt представлены на рис. 6.2.

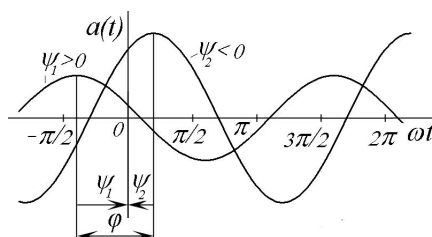


Рисунок 6.2

Если мгновенные фазы двух гармонических функций времени с одинаковой угловой частотой $a_1(t) = A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)$ и $a_2(t) = A_{m2} \cos(\omega t + \psi_2)$ отличаются на $\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \psi_1 - \psi_2 > 0$, то говорят, что эти функции сдвинуты по фазе, причем функция

$a_1(t)$ опережает по фазе функцию $a_2(t)$. Если разность фаз этих функций равна нулю, то говорят, что функции совпадают по фазе или **синфазны**. Если разность начальных фаз равна $\pm \pi$, то эти функции **противофазны**.

6.2 Среднее, средневывпрямленное и действующее значение гармонических токов и напряжений

Среднее значение периодической функции $a(t)$ за период T определяется выражением:

$$A_{cp} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) dt,$$

и для гармонической функции времени равно нулю.

Средневывпрямленное значение периодического тока или напряжения называется среднее значение модуля соответствующей периодической функции $a(t)$ за период:

$$A_{cp.e} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |a(t)| dt,$$

и для гармонической функции времени $A_{cp.e} = 2A_m/\pi \approx 0.637 A_m$.

Действующим значением периодической функции $a(t)$ называется среднеквадратическое значение этой функции за период T :

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [a(t)]^2 dt}.$$

Для гармонической функции времени:

$$A = A_m / \sqrt{2} \approx 0.707 A_m$$

Действующее значение гармонического тока численно равно значению постоянного тока, при протекании которого по сопротивлению за время T выделится такое же количество энергии, как при протекании гармонического тока.

Выражая амплитуду A_m через действующее значение A , получим еще одну форму записи гармонической функции: $a(t) = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \psi)$.

Мгновенные значения токов и напряжений ветвей, токов источников тока и э.д.с. источников напряжения, являющихся гармоническими функциями времени, изображают строчными буквами: $i = i(t), u = u(t), j = j(t), e = e(t)$; действующие значения этих величин – соответствующими прописными буквами I, U, J, E и амплитудные значения – теми же прописными буквами с индексом m : I_m, U_m, J_m, E_m . Размерность средних, средневывпрямленных и действующих значений гармонических токов и напряжений совпадает с размерностью соответствующих функций и, следовательно, с размерностью их амплитуд.

6.3 Уравнения электрического равновесия цепи при гармоническом внешнем воздействии

Рассмотрим линейную электрическую цепь, находящуюся под одночастотным гармоническим воздействием. Уравнения электрического равновесия такой цепи можно свести к одному линейному неоднородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, правая часть которого является гармонической функцией времени. Решением этого уравнения, как известно из теории дифференциальных уравнений, является гармоническая функция времени той же частоты. Важнейшим свойством гармонической функции времени является то, что в результате линейных операций, производимых над ними (умножением на постоянное число, дифференцированием, интегрированием, алгебраическим

сложением нескольких гармонических функций одинаковой частоты), получают гармонические функции той же частоты. Это приводит к тому, что в установившемся режиме токи и напряжения всех ветвей линейной цепи, находящейся под гармоническим воздействием, являются гармоническими функциями времени одной частоты и, следовательно, ***задача анализа цепи сводится к определению начальных фаз и амплитуд (или действующих значений) интересующих нас токов или напряжений.***

7 МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

7.1 Понятие о символических методах

Установившиеся значения токов и напряжений линейной цепи, находящейся под гармоническим внешним воздействием, могут быть найдены путем непосредственного решения основной системы уравнений электрического равновесия цепи. Однако, эта система уравнений, как мы уже отмечали, интегро-дифференциальная, и задача оказывается весьма трудоемкой. На практике анализ таких цепей выполняют с помощью метода **комплексных амплитуд**.

Метод комплексных амплитуд, подобно известному логарифмическому методу, основан на идее функционального преобразования, при котором операции над исходными функциями (**оригиналами**) заменяются более простыми операциями над некоторыми новыми функциями, которые носят название **изображений** или **символов** исходных функций. Методы такого типа называются символическими. Независимо от типа используемых функциональных преобразований решения любой задачи символическими методами содержит, как правило, следующие основные этапы:

- прямое преобразование, в результате которого осуществляется переход от исходных величин (оригиналов) к их символам (изображениям);
- определение изображений искомых величин путем выполнения по специально установленным правилам операций над изображениями;
- обратное преобразование, с помощью которого переходят от найденного изображения к оригиналу.

В частности, при использовании логарифмического метода исходные величины на первом этапе заменяются их логарифмами. При этом между числом и его логарифмом существует взаимно однозначное соответствие. На втором этапе, выполняя необходимые действия над логарифмами исходных величин, находят логарифмы искомых величин, при этом операции над логарифмами оказываются проще, чем соответствующие им операции над исходными величинами (например, умножению исходных величин соответствует сложение их логарифмов, возведение исходной величины в степень заменяется умножением ее логарифма на показатель степени и т.д.). На третьем этапе осуществляют обратный переход от логарифмов непосредственно к исходным величинам (потенцирование).

Мы поставим во взаимно однозначное соответствие гармонической функции времени (оригиналу) комплексное число (изображение) и будем проводить операции с комплексными числами с целью найти искомое изображение. Как будет ясно в дальнейшем, уравнения электрического равновесия цепи в изображениях будут алгебраическими. После этого найденное комплексное изображение переведем в искомую гармоническую функцию времени (ток или напряжение).

7.2 Комплексные числа и операции над ними

Комплексным числом $\underline{A}$ называется выражение вида: $\underline{A} = A' + jA''$ (**алгебраическая форма записи комплексного числа**), где A' и A'' - действительные числа, называемые: A' - **вещественной частью** и A'' - **мнимой частью** комплексного числа, $j = \sqrt{-1}$ - **мнимая единица**.

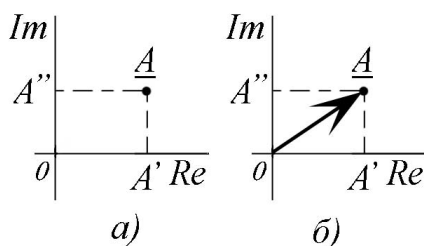


Рисунок 7.1

Комплексное число - на плоскости изображается в виде точки $\underline{A}$ координаты которой $\{A', A''\}$ (рис. 7.1а). Ось абсцис - **действительная** (Re), ось ординат (Im) - **мнимая** ось. $A' = \text{Re}[\underline{A}]$, $A'' = \text{Im}[\underline{A}]$.

Каждой точке $\underline{A}$ комплексной плоскости можно поставить в соответствие вектор $\underline{A}$, проведенный из начала координат в точку $\underline{A}$ (рис. 7.1б). Длину вектора,

изображающего комплексное число называют **модулем** комплексного числа:

$$|\underline{A}| = A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}.$$

Аргумент комплексного числа – угол α , образованный вектором $\underline{A}$ с положительным направлением вещественной оси. Положительное направление отсчета аргумента α – против часовой стрелки. $\alpha = \arctg \frac{A''}{A'}$ Аргумент имеет бесконечное множество значений, отличающихся на $2\pi n$, где n – целое число. Главные значения аргумента находятся в промежутке $-\pi \leq \alpha \leq \pi$.

A' – проекция вектора $\underline{A}$ на действительную ось: $A' = \operatorname{Re}[\underline{A}] = |\underline{A}| \cos \alpha$, A'' – проекция вектора $\underline{A}$ на мнимую ось: $A'' = \operatorname{Im}[\underline{A}] = |\underline{A}| \sin \alpha$.

Подставляя последние соотношения в алгебраическую форму записи комплексного числа, можно перейти к его **тригонометрической форме записи**:

$$\underline{A} = |\underline{A}| \cos \alpha + j |\underline{A}| \sin \alpha = |\underline{A}| \cdot (\cos \alpha + j \sin \alpha).$$

Используя формулу Эйлера: $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$, где e – основание натурального логарифма, получим **показательную форму записи** комплексного числа: $\underline{A} = |\underline{A}| \cdot e^{j\alpha}$.

Два комплексных числа $\underline{A}$ и $\underline{B}$ равны, если попарно равны их вещественные и мнимые части: $A' = B'$ и $A'' = B''$; или если равны их модули, а аргументы отличаются на целое число периодов: $|\underline{A}| = |\underline{B}|$ и $\alpha_A - \alpha_B = \pm 2\pi n$.

Два комплексных числа $\underline{A} = A' + jA''$ и $\underline{A}^* = A' - jA''$ называются **комплексно-сопряженными**, если их вещественные части равны, а мнимые отличаются только знаком. В показательной форме записи комплексно сопряженные числа записываются в виде:

$$\underline{A} = |\underline{A}| \cdot e^{j\alpha}, \quad \underline{A}^* = |\underline{A}| \cdot e^{-j\alpha}$$

Понятия "больше" и "меньше" для комплексных чисел отсутствуют (не имеют смысла).

Арифметические операции над комплексными числами выполняются так же, как и над обыкновенными двучленами, имея в виду, что $j^2 = -1$.

Операции сложения и вычитания **удобно выполнять в алгебраической форме записи**:

$$\underline{A} + \underline{B} = (A' + jA'') + (B' + jB'') = (A' + B') + j(A'' + B'')$$

$$\underline{A} - \underline{B} = (A' + jA'') - (B' + jB'') = (A' - B') + j(A'' - B'')$$

Сумма двух комплексно сопряженных чисел есть действительное число:

$$\underline{A} + \underline{A}^* = (A' + jA'') + (A' - jA'') = 2A'.$$

Умножение и деление удобно производить в **показательной форме записи**:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = |\underline{A}| e^{j\alpha_A} \cdot |\underline{B}| e^{j\alpha_B} = |\underline{A}| |\underline{B}| \cdot e^{j(\alpha_A + \alpha_B)}$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{|\underline{A}| e^{j\alpha_A}}{|\underline{B}| e^{j\alpha_B}} = \frac{|\underline{A}|}{|\underline{B}|} \cdot e^{j(\alpha_A - \alpha_B)}$$

Умножение и деление комплексных чисел можно производить и в алгебраической форме их записи, особенно в тех случаях, когда результат необходимо получить в алгебраической форме записи:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (A' + jA'') \cdot (B' + jB'') = (A'B' - A''B'') + j(A''B' + A'B'').$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A' + jA''}{B' + jB''} = \frac{(A' + jA'')(B' - jB'')}{(B' + jB'')(B' - jB'')} = \frac{A'B' + A''B''}{|B|^2} + j \frac{A''B' - A'B''}{|B|^2}.$$

Полезно запомнить некоторые часто встречающиеся соотношения:

• при умножении вектора $\underline{A} = |\underline{A}| \cdot e^{j\alpha}$ на действительное число m получается новый вектор, модуль которого в m раз больше модуля вектора $\underline{A}$:

$$\underline{A} \cdot m = |\underline{A}| \cdot m \cdot e^{j\alpha}$$

• при умножении вектора $\underline{A} = |\underline{A}| \cdot e^{j\alpha}$ на вектор $e^{j\beta}$, модуль которого равен 1, получим вектор, повернутый относительно вектора $\underline{A}$ на угол β против часовой стрелки.

$$\underline{A} \cdot e^{j\beta} = |\underline{A}| \cdot e^{j(\alpha+\beta)}.$$

• умножение вектора $\underline{A}$ на вектор $\pm j$ приводит к повороту вектора $\underline{A}$ на угол $\pi/2$ против часовой или по часовой стрелки соответственно.

$$\underline{A} \cdot (\pm j) = \underline{A} \cdot e^{\pm j\frac{\pi}{2}}.$$

• умножение вектора $\underline{A}$ на -1 соответствует повороту вектора $\underline{A}$ на угол $\pm \pi$.

$$\underline{A} \cdot (-1) = \underline{A} \cdot e^{\pm j\pi}.$$

7.3 Графическое суммирование комплексных чисел

Суммирование комплексных чисел во многих случаях бывает удобно производить

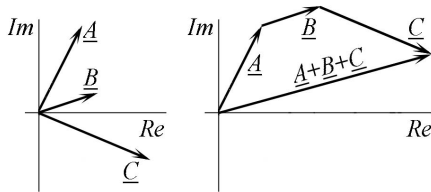


Рисунок 7.2

вектор.

графически, используя правила действий над векторами. Допустим требуется сложить три вектора $\underline{A} + \underline{B} + \underline{C}$ заданных графически (рис. 7.2). Суммарный вектор может быть построен следующим образом: из начала координат строят вектор $\underline{A}$, затем из его конца, как из начала координат, строят вектор $\underline{B}$ и т.д. Вектор, замыкающий полученную ломаную линию есть суммарный

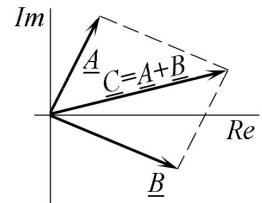


Рисунок 7.3

Сложение двух векторов $\underline{A}$ и $\underline{B}$ можно произвести по правилу параллелограмма, когда искомый вектор является диагональю параллелограмма, построенного на сторонах $\underline{A}$ и $\underline{B}$ (рис. 7.3).

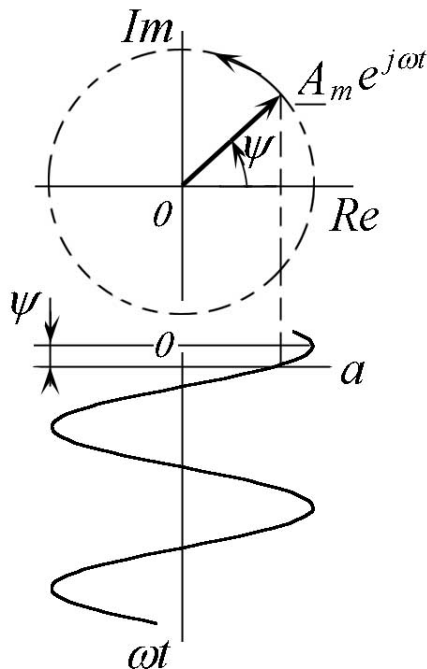


Рисунок 7.4

7.4 Представление гармонической функции времени с помощью вращающегося вектора. Комплексные изображения гармонических функций

Как мы уже отмечали, необходимо установить взаимно однозначное соответствие между гармонической функцией времени (оригиналом) и изображающим ее комплексным числом (изображением). Возьмем в комплексной плоскости вектор $\underline{A}_m$, который имеет длину A_m и образует с вещественной осью угол ψ (рис. 7.4), $\underline{A}_m = A_m \cdot e^{j\psi}$. Заставим этот вектор вращаться против часовой стрелки с постоянной угловой частотой ω , для

чего умножим его на **оператор вращения**.

Оператор вращения — множитель вида $e^{j\omega t}$.

Вращающийся вектор носит название **мгновенного комплекса** и обозначается $\underline{a}$. Тогда $\underline{a} = \underline{A_m} \cdot e^{j\omega t} = A_m \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t} = A_m \cdot e^{j(\psi + \omega t)}$. Найдем проекцию вращающегося вектора на вещественную ось: $\text{Re}[\underline{a}] = A_m \cdot \cos(\psi + \omega t)$. Другими словами, мы выяснили, что проекция вращающегося вектора в точности соответствует записи гармонической функции времени $a(t) = A_m \cdot \cos(\psi + \omega t)$, причем очевидно, что гармоническая функция времени и вращающийся вектор связаны взаимно однозначно, т.е. изменение амплитуды гармонической функции времени приводит к изменению длины вектора (и наоборот). А изменение начальной фазы гармонической функции времени приводит к соответствующему изменению начального положения вектора в комплексной плоскости. Аналитически это записывается следующим образом: $\underline{a} \doteq a(t)$ или $A_m \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t} \doteq A_m \cos(\omega t + \psi)$, где знак « $\doteq$ » – знак **соответствия** (а не знак равенства!). В записи вращающегося вектора имеется информация об амплитуде, угловой частоте и начальной фазе гармонического колебания. Учитывая, что в установившемся режиме все токи и напряжения всех ветвей линейной электрической цепи являются гармоническими функциями одной частоты внешнего воздействия, то задача анализа цепи сводится к определению амплитуд (или действующих значений) и начальных фаз этих колебаний, а частота их нам заранее известна. Следовательно, информацию об угловой частоте гармонического колебания можно исключить из соответствующего комплексного числа, т.к. она избыточна. Поэтому из предыдущего выражения, устанавливающего соответствие между мгновенным комплексом и гармонической функцией времени, можно исключить оператор вращения: $A_m \cdot e^{j\psi} \doteq A_m \cos(\omega t + \psi)$. Выражение $A_m \cdot e^{j\psi}$ носит название **комплексной амплитуды гармонической функции времени** и представляет собой значение мгновенного комплекса в момент времени $t = 0$. Будем обозначать комплексную амплитуду гармонического колебания точкой сверху, а не подчеркиванием – как обычное комплексное число:

$$\dot{A}_m = \underline{a}|_{t=0} = A_m \cdot e^{j\psi}$$

Как следует из этого выражения, **комплексная амплитуда гармонической функции времени представляет собой комплексное число, модуль которого равен амплитуде гармонического колебания, а аргумент – начальной фазе гармонического колебания.**



Переход от гармонической функции к комплексному числу носит название **прямого К-преобразования**. Приведем примеры такого преобразования:

Пример 1. Найти комплексную амплитуду гармонического напряжения:
 $u = 11 \cdot \cos\left(10^4 t + \frac{\pi}{3}\right)$ В.

Решение: $\dot{U}_m = 11 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$ В.

Пример 2. Найти комплексную амплитуду гармонического тока: $i = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sin\left(10^6 t + \frac{\pi}{3}\right)$ А.

Решение: $i = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos\left(10^6 t - \frac{\pi}{6}\right)$, $\dot{I}_m = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}}$ А.

Переход от комплексного числа к гармонической функции времени носит название **обратного К-преобразования**. Приведем примеры и такого преобразования:

Пример 3. Найти, с точностью до частоты гармоническое напряжение, соответствующее заданной комплексной амплитуде: $\dot{U}_m = 5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{8}}$ В.

Решение: $u = 5 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{8}\right)$ В.

Пример 4. Найти с точностью до частоты гармонический ток, соответствующий заданной комплексной амплитуде: $\dot{I}_m = 10^{-3}$ А.

Решение: $i = 10^{-3} \cdot \cos \omega t$ А.

Наряду с комплексной амплитудой $\dot{A}_m$ в качестве изображения гармонической функции $a(t)$ в комплексной плоскости широко используют другую величину – комплексное действующее значение $\dot{A}$. По определению, **комплексное действующее значение гармонической функции $a(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \psi)$ представляет собой комплексное число, модуль которого равен действующему значению A гармонической функции, а аргумент – ее начальной фазе ψ .**



$$\dot{A} = A \cdot e^{j\psi}$$

Можно установить связь между комплексной амплитудой $\dot{A}_m$ гармонической функции времени $a(t)$ и ее комплексным действующим значением $\dot{A}$:

$$\dot{A} = \dot{A}_m / \sqrt{2}.$$

Все правила, устанавливающие соответствие между операциями над гармоническими функциями времени и операциями над их комплексными амплитудами, справедливы и для операций над комплексными действующими значениями гармонической функции времени.

Величины $\dot{I} = \dot{I}_m / \sqrt{2}$ и $\dot{U} = \dot{U}_m / \sqrt{2}$ обычно называют **комплексным током и комплексным напряжением**.

Комплексным током (напряжением) называется комплексное число, модуль которого равен действующему значению тока (напряжения), а аргумент – его начальной фазе.

7.5 Комплексные сопротивления и проводимость участка цепи

Возьмем произвольную линейную цепь, находящуюся под гармоническим воздействием.

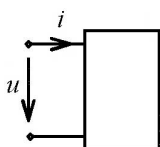


Рисунок 7.5

Выделим участок этой цепи, имеющий два внешних зажима и не содержащий источников энергии (рис. 7.5). Ток и напряжение на зажимах этого участка являются гармоническими функциями времени:

$$u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u); \quad i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i).$$

Комплексным сопротивлением $\underline{Z}$ пассивного участка цепи назовем отношение комплексной амплитуды напряжения на зажимах цепи к комплексной амплитуде тока:

$$\underline{Z} = \dot{U} / \dot{I} = \dot{U} / i.$$

Комплексное сопротивление участка цепи представляет собой в общем случае комплексное число и может быть представлено в показательной и алгебраической формах:

$$z = z \cdot e^{j\varphi} = r + jx,$$

где $z = |Z|$ – **модуль комплексного сопротивления**, или **полное сопротивление** цепи;

φ – **аргумент комплексного сопротивления**,

r – **вещественная (резистивная)** составляющая,

x – **мнимая (реактивная)** составляющая комплексного сопротивления.

По определению $\underline{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m e^{j\varphi_U}}{I_m e^{j\varphi_I}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_U - \varphi_I)} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}$, откуда видно, что **модуль**

комплексного сопротивления z равен отношению амплитуд или действующих значений напряжения и тока: $z = U_m / I_m = U / I$, а аргумент равен разности начальных фаз напряжения и тока.

В зависимости от фазовых соотношений между напряжений и током аргумент комплексного сопротивления φ может быть как положительным, так и отрицательным.

Комплексное сопротивление может быть представлено в виде вектора, расположенного в

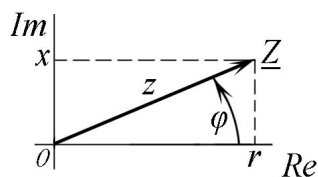


Рисунок 7.6

комплексной плоскости, длина которого в определенном масштабе равна z , а угол наклона к положительной вещественной полуоси равен φ (рисунок 7.6). Из рисунка видно, что $r = z \cdot \cos \varphi$ $x = z \cdot \sin \varphi$.

Величина, обратная комплексному сопротивлению, называется комплексной проводимостью участка цепи:

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z}.$$

Комплексная проводимость может быть определена как отношение комплексных амплитуд или комплексных действующих значений тока и напряжения на зажимах участка цепи:

$$\underline{Y} = \dot{I}_m / \dot{U}_m = \dot{I} / \dot{U}.$$

Комплексная проводимость как и комплексное сопротивление может быть представлена в алгебраической и показательной форме записи:

$$\underline{Y} = g + jb = y \cdot e^{j\alpha} = \frac{1}{r} e^{-j\varphi}.$$

Связь между составляющими комплексного сопротивления и комплексной проводимости в алгебраической форме записи:

$$\begin{aligned} r &= g / (g^2 + b^2), & g &= r / (r^2 + x^2) \\ x &= -b / (g^2 + b^2), & b &= -x / (r^2 + x^2). \end{aligned}$$

7.6 Комплексная схема замещения цепи. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Комплексное сопротивление и проводимость пассивного участка линейной цепи были введены как отношение комплексных действующих значений или комплексных амплитуд напряжения и тока. В то же время комплексные сопротивление и проводимость любого участка цепи, составленного из идеализированных пассивных элементов, не зависят от амплитуд (действующих значений) и начальных фаз токов и напряжений и определяются только параметрами элементов, входящих в рассматриваемый участок цепи, способом их соединения между собой и частотой внешнего воздействия.

Зная комплексное сопротивление (комплексную проводимость участка цепи) и одну из приложенных к данному участку величин: ток $\dot{I}_m$ или напряжение $\dot{U}_m$ можно найти неизвестное напряжение или неизвестный ток участка цепи:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \underline{Z} \dot{I}_m; & \dot{I}_m &= \underline{Y} \dot{U}_m \\ \dot{U} &= \underline{Z} \dot{I}; & \dot{I} &= \underline{Y} \dot{U}. \end{aligned}$$



Эти выражения по структуре напоминают соотношения между мгновенными значениям напряжения и тока на зажимах линейного сопротивления и являются математической записью **закона Ома в комплексной форме**. Независимо от состава элементов участка цепи эти уравнения всегда алгебраические. Используя закон Ома в комплексной форме, каждому участку линейной электрической цепи, составленному из идеализированных пассивных элементов и имеющему два внешних вывода (в т.ч. любому идеализированному пассивному двухполюсному элементу) можно поставить в соответствие **комплексную схему замещения**, на которой рассматриваемый участок цепи представлен комплексным сопротивлением или проводимостью, а токи или напряжения на его зажимах – комплексными амплитудами или комплексными действующими значениями.

Представляя все входящие в моделирующую цепь идеализированные пассивные элементы их комплексными схемами замещения, а токи и э.д.с. всех идеализированных источников – их комплексными амплитудами или комплексными действующими значениями, получаем **комплексную схему замещения цепи**. Т.о. комплексная схема замещения цепи может быть получена из эквивалентной схемы для мгновенных значений заменой всех идеализированных пассивных элементов их комплексными сопротивлениями (проводимостями) и всех токов и напряжений – их комплексными изображениями.

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме устанавливает связь между комплексными изображениями токов в любом из узлов моделирующей цепи: **сумма комплексных амплитуд (комплексных действующих значений) токов всех ветвей, подключенных к данному узлу электрической цепи, равна нулю**:

$$\sum_k \dot{I}_{mk} = 0 \text{ или } \sum_k \dot{I}_k = 0 ,$$

где k – номер ветви, подключенной к рассматриваемому узлу.

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме определяет связь между комплексными изображениями напряжений ветвей, входящих в произвольный контур, электрической цепи: **сумма комплексных амплитуд (комплексных действующих значений) напряжений всех ветвей, входящих в любой контур моделирующей цепи, равна нулю**:

$$\sum_v \dot{U}_{mv} = 0 \text{ или } \sum_v \dot{U}_v = 0 ,$$

где v – номер ветви, входящей в рассматриваемый контур.

Чаще используется другая формулировка закона Кирхгофа в комплексной форме: **сумма комплексных изображений напряжений на всех элементах любого контура моделирующей цепи равна сумме комплексных изображений э.д.с., входящих в контур источников напряжений**:

$$\sum_i \dot{U}_{mi} = \sum_j \dot{E}_{mj} \text{ или } \sum_i \dot{U}_i = \sum_j \dot{E}_j ,$$

где $\dot{U}_{mi}, \dot{U}_i$ – комплексные изображения напряжений всех элементов контура, за исключением источников напряжения; $\dot{E}_{mj}, \dot{E}_j$ – комплексные изображения э.д.с. источников напряжения, действующих в рассматриваемом контуре.

При суммировании комплексных изображений токов и напряжений ветвей электрической цепи сохраняются те же правила знаков, что и при суммировании мгновенных значений токов и напряжений. Используя выражение для закона Ома и Кирхгофа в комплексной форме можно составить систему уравнений электрического равновесия цепи для

комплексных изображений токов и напряжений. В отличие от системы уравнений электрического равновесия, составленной для мгновенных значений токов и напряжений ***уравнения электрического равновесия для комплексных значений токов и напряжений являются алгебраическими***. Решение таких уравнений намного проще, чем решение интегро-дифференциальных уравнений электрического равновесия, составленных для мгновенных значений токов и напряжений.

8 ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Найдем комплексные сопротивления всех пассивных элементов электрической цепи.

8.1 Сопротивление

Пусть к идеализированному резистивному элементу – сопротивлению – приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону $u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u)$. Определим ток сопротивления i : $i = \frac{u}{R} = \sqrt{2} \frac{U}{R} \cos(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i)$, т.к. ток также является гармонической функцией времени. Из последнего выражения видно, что $I = U/R$, а $\psi_i = \psi_u = \psi$.

Таким образом, *сдвиг фаз между током и напряжением на сопротивлении равен нулю*.

Мгновенная мощность сопротивления: $p = ui = 2UI \cos^2(\omega t + \psi) = UI + UI \cos 2(\omega t + \psi)$. Временные диаграммы напряжения, тока и мгновенной мощности представлены на рис. 8.1.

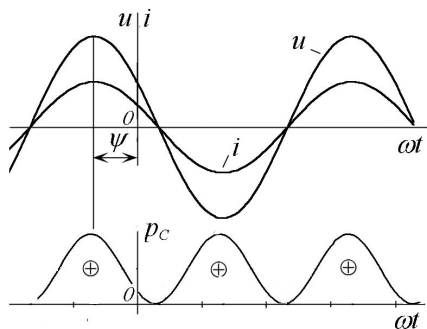


Рисунок 8.1

Активная мощность – среднее значение мощности за период и для сопротивления равна произведению действующих значений тока и напряжения:

$$P_A = P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{UI}{T} \int_0^T [1 + \cos 2(\omega t + \psi)] dt = UI.$$

Комплексный ток и напряжение на сопротивлении:

$\dot{I} = I e^{j\psi}$ и $\dot{U} = U e^{j\psi}$ имеют одинаковые аргументы и отличаются по модулю в r раз.

Векторная диаграмма – это изображение комплексных напряжений, комплексных токов и комплексных сопротивлений в комплексной плоскости. Векторные диаграммы для тока и напряжения на сопротивлении представлены на рис. 8.2.

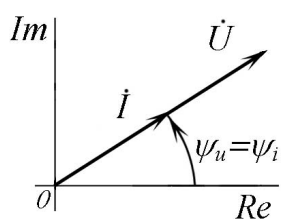


Рисунок 8.2

Найдем комплексное сопротивление сопротивления: $\underline{Z}_R = \frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R} = \frac{U e^{j\psi}}{I e^{j\psi}} = \frac{U}{I} = R$. Представляя комплексное сопротивление

$\underline{Z}_R$ в показательной и алгебраической формах записи, получим:

$\underline{Z}_R = z_R e^{j\varphi_R} = r_R + jx_R = R$. Отсюда: $\varphi_R = 0, x_R = 0, z_R = R, r_R = R$. На

комплексной плоскости z_R изображается вектором, направленным вдоль вещественной оси (рис. 8.3,а). Комплексная проводимость

сопротивления

$$\underline{Y}_R = 1/\underline{Z}_R = 1/R \text{ также}$$

изображается вектором, направление которого совпадает с направлением положительной вещественной полуоси (рис. 8.3,б).

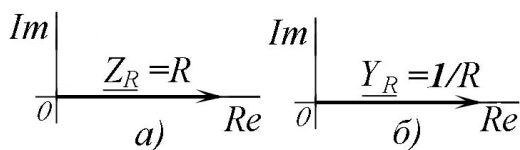


Рисунок 8.3

Комплексная схема замещения сопротивления (рис. 8.4) имеет такой же вид, как и эквивалентная схема для мгновенных значений и отличается от нее только тем, что мгновенные значения тока и

$$\begin{array}{l} \underline{Z}_R = R \\ \underline{Y}_R = \frac{1}{R} \end{array}$$

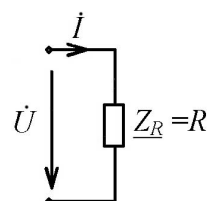


Рисунок 8.4

напряжения заменены их комплексными изображениями.

8.2 Емкость

Пусть к емкости приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону: $u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u)$. Определим ток емкости, используя уравнение емкости:

$$i = C \frac{dU}{dt} = -\omega C \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2}\omega C U \cos(\omega t + \psi_u + \pi/2) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i),$$

откуда видно, что ток емкости изменяется по гармоническому закону, причем начальная фаза тока на $\pi/2$ больше начальной фазы напряжения: $\psi_i = \psi_u + \pi/2$, т.е. **ток емкости опережает по фазе напряжение на 90°** . Действующее значение тока емкости пропорционально действующему значению напряжения: $I = \omega C U$. Мгновенная мощность емкости: $p = ui = -UI \sin 2(\omega t + \psi_u)$.

Как видно из временных диаграмм (рис. 8.5) в течение половины периода изменение мощности ток и напряжение емкости имеют одинаковый знак (емкость заряжается), при этом мгновенная мощность емкости положительна. В течение второй половины периода емкость отдает запасенную энергию (разряжается), при этом ток и напряжение емкости имеют различные знаки, а мгновенная мощность емкости отрицательна. Среднее значение мощности емкости за период (активная мощность) равна нулю $P_A = 0$. Найдем комплексные изображения тока и напряжения емкости: $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$; $\dot{I} = Ie^{j\psi_i} = \omega C U e^{j(\psi_u + \pi/2)}$. Векторная диаграмма тока и напряжения на комплексной плоскости представляет собой два вектора, расположенных таким образом, что вектор $\dot{I}$ повернут относительно вектора $\dot{U}$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (рис. 8.6). Комплексные сопротивление и проводимость емкости:

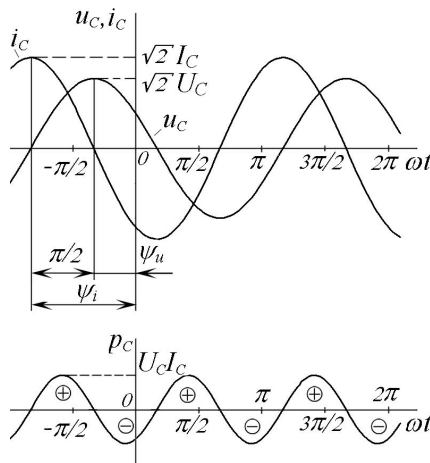


Рисунок 8.5

Векторная диаграмма тока и напряжения на комплексной плоскости представляет собой два вектора, расположенных таким образом, что вектор $\dot{I}$ повернут относительно вектора $\dot{U}$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (рис. 8.6). Комплексные сопротивление и проводимость емкости:

$$\underline{Z}_C = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C},$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \omega C e^{j\pi/2} = j\omega C.$$

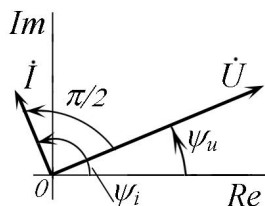


Рисунок 8.6

Сравнивая полученные выражения с показательной и алгебраической формами записи: $\underline{Z}_C = z_C e^{j\varphi_C} = r_C + jx_C$, $\underline{Y}_C = y_C e^{j\alpha_C} = g_C + jb_C$, находим модули, аргументы, вещественные и мнимые составляющие сопротивления и проводимости емкости: $z_C = 1/(\omega C)$, $y_C = \omega C$, $\varphi_C = -\pi/2$, $\alpha_C = \pi/2$, $g_C = r_C = 0$, $x_C = -1/(\omega C)$, $b_C = \omega C$.

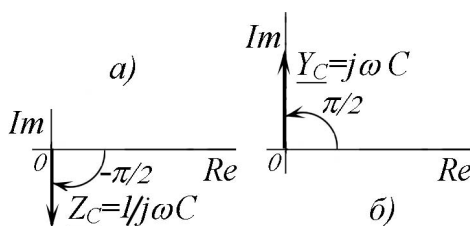


Рисунок 8.7

На комплексной плоскости $\underline{Z}_C$ и $\underline{Y}_C$ изображают векторами, направленными соответственно вдоль отрицательной и положительной мнимых полуосей (рис. 8.7 а,б). Комплексная схема замещения емкости приведена на рис. 8.8.

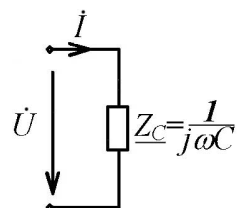


Рисунок 8.8

8.3 Индуктивность

Пусть ток, протекающий по индуктивности, изменяется по гармоническому закону:

$$i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i).$$

Используя связь между мгновенными значениями тока и напряжения индуктивности, найдем напряжение на индуктивности:

$$u = L \frac{di}{dt} = -\omega L \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2}\omega LI \cos(\omega t + \psi_i + \pi/2) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u).$$

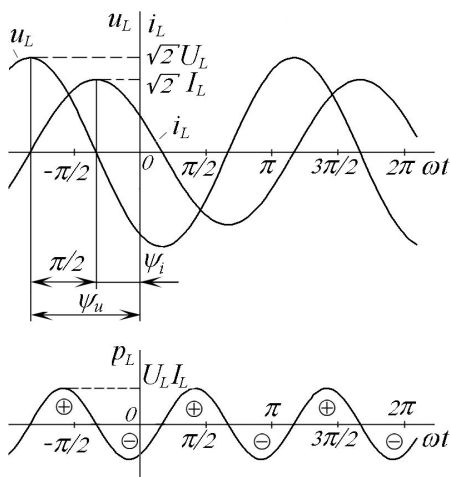


Рисунок 8.9

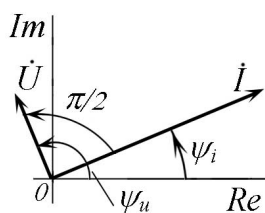


Рисунок 8.10

Таким образом, напряжение на индуктивности, находящейся под гармоническим внешним воздействием, тоже является гармонической функцией времени, имеющей ту же частоту, что и воздействующий ток, причем начальная фаза напряжения на $\pi/2$ больше начальной фазы тока: $\psi_u = \psi_i + \pi/2$ (см. рис. 8.9). Действующее значение напряжения на индуктивности пропорционально действующему значению тока: $U = \omega LI$. Так же, как и мгновенная мощность емкости, мгновенная мощность индуктивности изменяется по гармоническому закону с частотой, равной 2ω . Активная мощность индуктивности $P_A = 0$.

Найдем комплексный ток и комплексное напряжение индуктивности: $\dot{I} = I e^{j\psi_i}$, $\dot{U} = U e^{j\psi_u} = \omega L I e^{j(\psi_i + \pi/2)}$. Они изображаются на комплексной плоскости в виде пары векторов, длины которых в определенном масштабе равны действующим значениям напряжения и тока индуктивности, причем вектор напряжения повернут относительно вектора тока на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (рисунок 8.10). Найдем комплексное сопротивление индуктивности:

$$\underline{Z}_L = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L,$$

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} = \frac{1}{j\omega L}.$$



Сравняя $\underline{Z}_L$ и $\underline{Y}_L$ с показательной и алгебраической формами записи комплексного сопротивления и проводимости

$$\underline{Z}_L = z_L e^{j\varphi_L} = r_L + jx_L, \quad \underline{Y}_L = y_L e^{j\alpha} = g_L + jb_L,$$

получаем вещественную и мнимую части, модули и аргументы комплексного сопротивления и комплексной проводимости индуктивности: $z_L = \omega L$, $y_L = 1/(\omega L)$, $\varphi_L = \pi/2$, $\alpha_L = -\pi/2$, $g_L = r_L = 0$, $x_L = \omega L$, $b_L = -1/(\omega L)$.

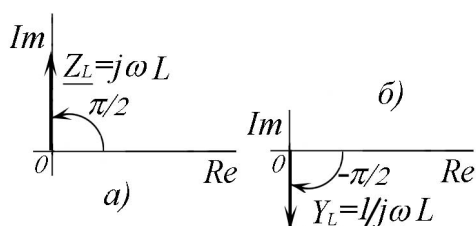


Рисунок 8.11

На комплексной плоскости $\underline{Z}_L$ и $\underline{Y}_L$ изображаются векторами, ориентированными соответственно вдоль положительного и отрицательного направления мнимой полуоси (рисунок 8.11 а,б).

Комплексная схема замещения индуктивности приведена на рисунке 8.12.

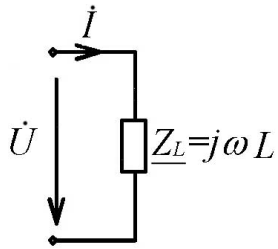


Рисунок 8.12

Таким образом, *комплексные сопротивления и проводимости идеализированных пассивных элементов линейных цепей не зависят от амплитуды (действующего значения) и начальной фазы внешнего воздействия и определяются только параметрами соответствующих элементов и частотой внешнего воздействия.*

9 АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШИХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

9.1 Общая схема применения метода комплексных амплитуд

Анализ цепей методом комплексных амплитуд содержит следующие этапы:

- 1) Замена гармонических токов и напряжений всех ветвей их комплексными изображениями, а эквивалентной схемы цепи для мгновенных значений – комплексной схемой замещения;
- 2) Составление уравнений электрического равновесия цепи для комплексных токов и напряжений на основе законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме;
- 3) Решение системы уравнений электрического равновесия цепи относительно интересующих комплексных токов и напряжений;
- 4) Переход от комплексных изображений токов и напряжений к гармоническим функциям времени.

9.2 Последовательные RL и RC цепи

Рассмотрим идеализированную электрическую цепь, состоящую из последовательно включенных сопротивления R и индуктивности L (рис. 9.1а). Пусть напряжение, приложенное к зажимам цепи, изменяется по гармоническому закону

$$u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u),$$

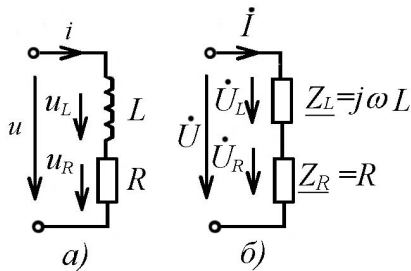


Рисунок 9.1

где: U , ω и ψ_u – заданные (известные) величины. Используя метод комплексных амплитуд, найдем значения тока i в цепи. Представляя сопротивление и емкость комплексными схемами замещения и переходя от тока i и u к их комплексным изображениям, получаем комплексную схему замещения цепи (рис. 9.1б). Далее, используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составляем систему уравнений электрического равновесия цепи:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L,$$

$$\dot{U}_R \doteq \underline{Z}_R \cdot \dot{I},$$

$$\dot{U}_L \doteq \underline{Z}_L \cdot \dot{I},$$

где: $\underline{Z}_R = R$, а $\underline{Z}_L = j\omega L$. Величины R , L и ω заданы (известны). Подставляя два последних уравнения системы в первое, получим:

$$\dot{U} = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L) \dot{I} = \underline{Z} \dot{I},$$

где: $\underline{Z} = R + j\omega L$ – комплексное сопротивление всего участка цепи. Таким образом, комплексное сопротивление цепи, состоящей из последовательно включенных сопротивления и индуктивности, равно **сумме комплексных сопротивлений этих элементов**. Т.е. **при последовательном соединении элементов их комплексное сопротивление равно сумме комплексных сопротивлений каждого элемента**.

Комплексное входное сопротивление цепи может быть изображено на комплексной плоскости в виде вектора $\underline{Z}$, равного геометрической сумме векторов $\underline{Z}_R$ и $\underline{Z}_L$ (рис. 9.2а). Запишем комплексное сопротивление цепи в показательной форме записи:

$$R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}} = z e^{j\varphi},$$

где: $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ – **полное сопротивление** (модуль комплексного сопротивления цепи), а $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$ – **сдвиг фаз** между напряжением и током цепи (аргумент комплексного сопротивления цепи).

Отметим, что при конечных значениях ω , R и L угол φ лежит в пределах: $0 < \varphi < \pi/2$. Когда аргумент комплексного сопротивления какого-либо двухполюсника равен нулю, говорят,

что его сопротивление имеет чисто **резистивный** характер. Если аргумент комплексного сопротивления равен $\pi/2$, то его сопротивление имеет **индуктивный** характер. В рассматриваемом случае значение аргумента лежит между этими значениями, поэтому говорят, что входное сопротивление цепи имеет **резистивно-индуктивный характер**.

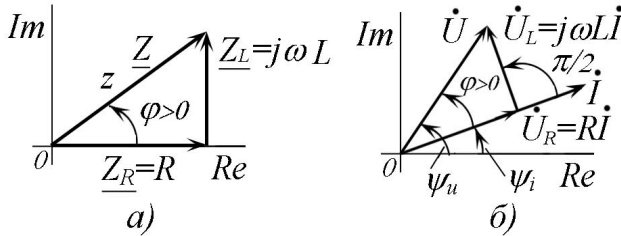


Рисунок 9.2



Используя закон Ома в комплексной форме, найдем комплексное действующее значение искомого тока:

$$\underline{i} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\psi_u - \arctg \frac{\omega L}{R})}.$$

Переходя от комплексного изображения тока к оригиналу, окончательно получаем:

$$i = \sqrt{2} \frac{U}{z} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \psi_u - \arctg \frac{\omega L}{R}\right).$$

В связи с тем, что при заданной частоте внешнего воздействия ω установившиеся значения токов и напряжений цепи полностью определяются их действующими значениями и начальными фазами, на практике обычно не возникает необходимости находить оригиналы токов и напряжений. Задача анализа цепи считается решенной, если найдены комплексные действующие значения соответствующих функций.

Векторные диаграммы комплексных сопротивлений и векторные диаграммы для токов и напряжений в RL -цепи приведены на рис. 9.2,а,б соответственно. Так как напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током, вектор $\underline{U}_R$ совпадает по направлению с вектором $\underline{i}$. Вектор $\underline{U}_L$ повернут относительно вектора $\underline{i}$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (напряжение на индуктивности по фазе опережает ток). Вектор $\underline{i}$ повернут относительно вектора $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L$ по часовой стрелке на угол φ , т.е. ток отстает по фазе от напряжения на угол, равный аргументу комплексного сопротивления цепи. Отметим также, что т.н. «**треугольник напряжений**», образованный векторами $\underline{U}, \underline{U}_R$ и $\underline{U}_L$, подобен «**треугольнику сопротивлений**», образованному векторами $\underline{Z}, \underline{Z}_R$ и $\underline{Z}_L$.

Из векторной диаграммы видно, что действующее значение напряжения на входе цепи, напряжение на сопротивлении и напряжение на индуктивности, которое определяет длину сторон треугольника напряжений, связаны соотношением: $U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$, т.е. действующее значение напряжения на входе цепи **не равно** алгебраической сумме действующих значений напряжений на элементах цепи. Другими словами, второй закон Кирхгофа **не выполняется для действующих значений напряжений** (он выполняется только для мгновенных и комплексных напряжений).

Теперь решим аналогичную задачу для последовательной RC -цепи (рис. 9.3,а). Перейдем к последовательной схеме замещения (рис. 9.3,б). Система уравнений электрического равновесия цепи выглядит аналогично предыдущей задаче. Решая систему уравнений относительно комплексного действующего значения искомого тока, получим:

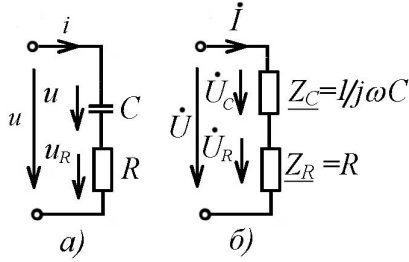


Рисунок 9.3

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{(Z_R + Z_C)} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}},$$

где $\underline{Z}$ — комплексное сопротивление последовательной RC -цепи,

$$\underline{Z} = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}.$$

Или в показательной форме записи:

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{-j \arctg \frac{1}{\omega CR}} = z e^{j\varphi},$$

где $z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ — **полное сопротивление** цепи, а $\varphi = -\arctg \frac{1}{\omega CR}$ — **сдвиг фаз**

между напряжением и током цепи. При конечных значениях ω , R и C угол φ лежит в пределах: $-\pi/2 < \varphi < 0$, т.е. сопротивление цепи имеет **резистивно-емкостной** характер. Векторная диаграмма для комплексного сопротивления цепи приведена на рис. 9.4,а.

Найдем комплексный ток, используя закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{z} e^{j(\psi_u - \varphi)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + [1/(\omega C)]^2}} e^{j\{\psi_u + \arctg[1/(\omega C)]\}}.$$

Из последнего выражения видно, что ток i опережает приложенное напряжение u по фазе

на угол φ . Совмещенная векторная диаграмма для тока и напряжений RC -цепи приведена на рис. 9.4,б.

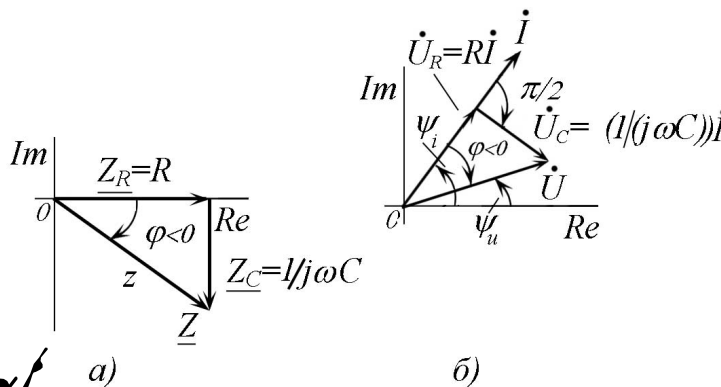


Рисунок 9.4

9.3 Последовательная RLC -цепь

Рассмотрим последовательную RLC -цепь (рис. 9.5,а), находящуюся под гармоническим воздействием, комплексная схема замещения которой приведена на рис. 9.5,б. Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составим систему уравнений электрического равновесия цепи:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C, \quad \dot{U}_L = \underline{Z}_L \dot{I}_L,$$

$$\dot{U}_C = \underline{Z}_C \dot{I}_C, \quad \dot{U}_R = \underline{Z}_R \dot{I}_R,$$

где $\underline{Z}_R = R$, $\underline{Z}_L = j\omega L$, $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$ — комплексные

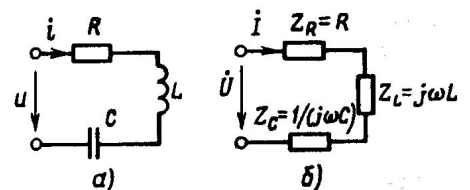


Рисунок 9.5

сопротивления входящих в цепь идеализированных элементов. Решая систему уравнений относительно тока $\dot{I}$, получим:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}.$$

Здесь $\underline{Z}$ – комплексное сопротивление последовательной RLC -цепи, равное сумме комплексных сопротивлений входящих в цепь элементов:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}} = z e^{j\varphi}.$$

Из последнего выражения следует, что характер сопротивления цепи зависит от соотношения между мнимыми составляющими комплексного сопротивления емкости $x_C = -1/\omega C$ и индуктивности $x_L = \omega L$. При $x_L > |x_C|$ сопротивление цепи имеет резистивно-индуктивный характер. Векторная диаграмма сопротивлений, иллюстрирующая данный случай,

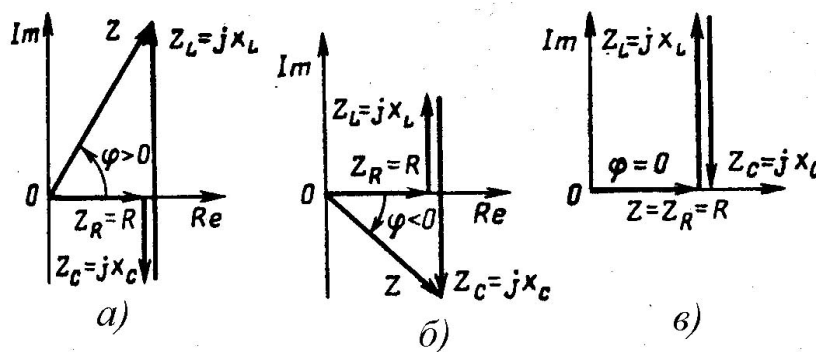


Рисунок 9.6

представлена на рис. 9.6,а. Если $x_L < |x_C|$, то сопротивление цепи имеет резистивно-емкостной характер (рис. 9.6,б). При $x_L = |x_C|$ мнимые составляющие сопротивления емкости и индуктивности взаимно компенсируются и входное сопротивление цепи имеет чисто резистивный характер (рис. 9.6,в).

Используя закон Ома в комплексной форме, найдем комплексное действующее значение искомого тока:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{j(\psi_u - \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R})}.$$

Векторные диаграммы для тока и напряжения цепи, соответствующие различным соотношениям между мнимыми составляющими комплексного сопротивления емкости и индуктивности, приведены на рис. 9.7.

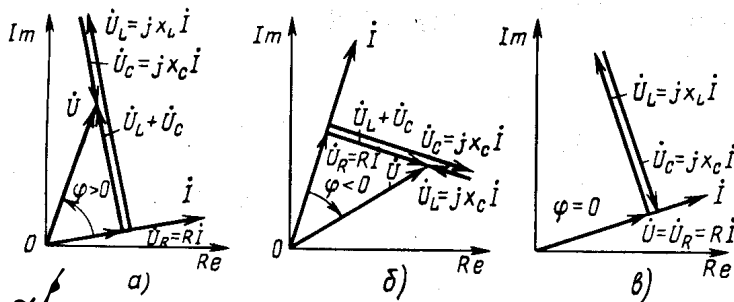


Рисунок 9.7

Необходимо обратить внимание на то, что характер сопротивления последовательной RLC -цепи зависит от частоты подаваемого на нее внешнего воздействия!



9.4 Параллельная RLC -цепь

Рассмотрим параллельную RLC -цепь (рис. 9.8,а), к зажимам которой приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону. Комплексная схема замещения цепи, в которой идеализированные двухполюсные элементы представлены их комплексными

проводимостями, изображена на рисунке 9.8б. Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составим систему уравнений электрического равновесия цепи:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_R + \dot{I}_C + \dot{I}_L; \\ \dot{I}_C &= \underline{Y}_C \dot{U}_C; \quad \dot{I}_L = \underline{Y}_L \dot{U}_L; \quad \dot{I}_R = \underline{Y}_R \dot{U}_R. \end{aligned}$$

Здесь: $\underline{Y}_R = 1/R$; $\underline{Y}_C = j\omega C$; $\underline{Y}_L = 1/(j\omega L)$ – комплексные проводимости входящих в цепь идеализированных пассивных элементов.

Решив систему уравнений относительно тока $\dot{I}$, получаем:

$$\dot{I} = (\underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L) \dot{U} = \underline{Y} \dot{U},$$

где $\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L$ – комплексная проводимость параллельной RLC -цепи, равная сумме комплексных проводимостей входящих в цепь идеализированных элементов (Обратите

внимание, что **при параллельном соединении комплексные проводимости складываются**):

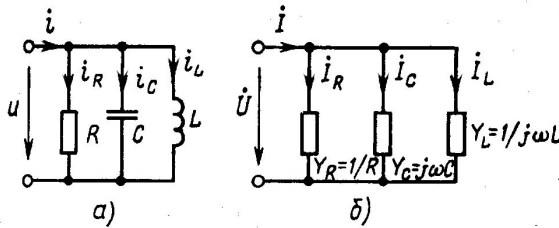


Рисунок 9.8

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} e^{j \arctg R(\omega C - 1/\omega L)} = ye^{j\alpha},$$

где: $y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$ – модуль комплексной проводимости,

$\alpha = \arctg R(\omega C - 1/\omega L)$ – аргумент комплексной проводимости (сдвиг фаз между током и напряжением цепи).

Анализ последних выражений показывает, что характер проводимости, а, следовательно, и характер сопротивления параллельной RLC -цепи зависят от соотношения между реактивными составляющими проводимости емкости $b_C = \omega C$ и индуктивности $b_L = -1/(\omega L)$. Когда $b_C > |b_L|$ (рисунок 9.9а) проводимость цепи имеет резистивно-емкостной характер (аргумент комплексной проводимости $\pi/2 > \alpha > 0$, поэтому аргумент комплексного сопротивления φ

лежит в пределах $-\pi/2 < \varphi < 0$).

При $b_C < |b_L|$ (рис. 9.9б)

проводимость цепи имеет резистивно-индуктивный

характер, а при $b_C = |b_L|$ (рис.

9.9,в) реактивная составляющая проводимости емкости и индуктивности

взаимно компенсируются и проводимость цепи имеет чисто резистивный характер.

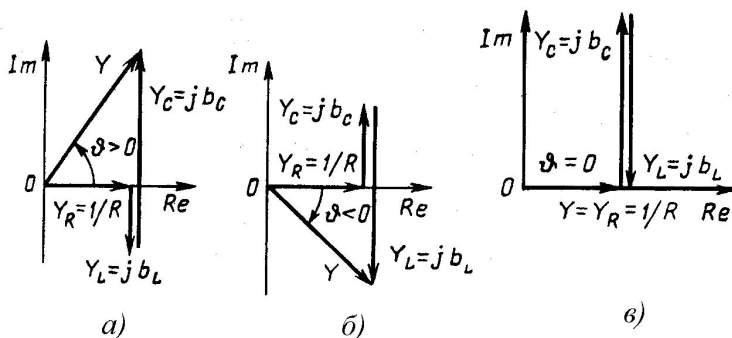


Рисунок 9.9

Векторные диаграммы токов и напряжений параллельной RLC -цепи для всех трёх рассмотренных случаев приведены на рис. 9.10.



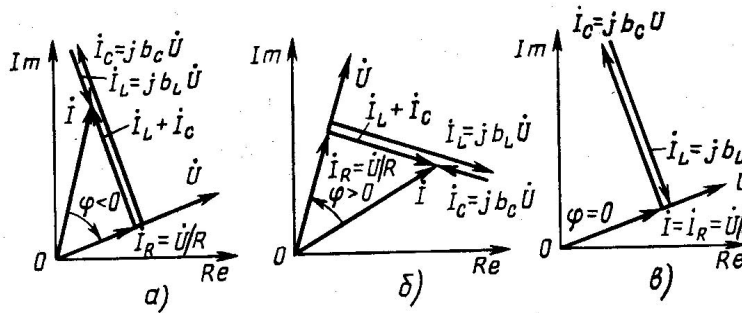
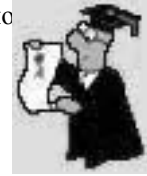


Рисунок 9.10

9.5 Правило делителя напряжения и делителя тока

При расчете электрических цепей зачастую бывает полезно знать некоторые мнемонические правила, с помощью которых расчет электрических цепей значительно упрощается. Рассмотрим некоторые из этих правил.

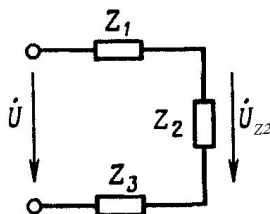


Рисунок 9.11

Делителем напряжения называется участок электрической цепи, состоящий из двух и более пассивных элементов, включенных последовательно (рис. 9.11). Напряжения на этих элементах распределяются пропорционально их сопротивлениям, например, напряжение на сопротивлении $\underline{Z}_2$:

$$\dot{U}_{Z2} = \dot{U} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3},$$

напряжение на сопротивлении $\underline{Z}_3$:

$$\dot{U}_{Z3} = \dot{U} \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}, \text{ и т.д.}$$

Отсюда можно заметить простую закономерность и сформулировать её в виде правила делителя напряжения: **для определения напряжения на любом из сопротивлений делителя необходимо взять приложенное к делителю напряжение, умножить его на то сопротивление, напряжение на котором нас интересует и разделить на сумму сопротивлений, образующих делитель.**



Делителем тока называется участок электрической цепи, состоящий из двух и более пассивных элементов, включенных параллельно (рис. 9.12). Общий ток в неразветвленной части цепи распределяется по этим сопротивлениям пропорционально их проводимостям, например, ток через сопротивление $\underline{Z}_1$:

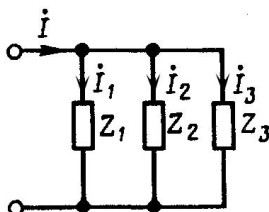


Рисунок 9.12

$$I_{Z1} = I \frac{1/\underline{Z}_1}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3},$$

ток через сопротивление $\underline{Z}_2$:

$$I_{Z2} = I \frac{1/\underline{Z}_2}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3}, \text{ и т.д.}$$

Правило делителя тока можно сформулировать следующим образом: **для определения тока через любое из сопротивлений делителя необходимо взять общий ток в**

неразветвленной части цепи, умножить его на проводимость того сопротивления, ток через которое нас интересует и разделить на сумму проводимостей ветвей, образующих делитель.

В случае, когда делитель тока состоит всего из двух ветвей, правило можно сформулировать не через понятие проводимости, а через сопротивления ветвей: *для определения тока через сопротивление делителя необходимо умножить общий ток в неразветвленной части цепи на сопротивление той ветви, ток в которой нас не интересует и разделить на сумму сопротивлений ветвей, образующих делитель.*



10 ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ПРОСТЕЙШИХ ЦЕПЯХ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

10.1 Мгновенная мощность пассивного двухполюсника

Рассмотрим произвольный линейный двухполюсник, не содержащий источников энергии. Напряжение и ток на зажимах двухполюсника изменяются по гармоническому закону: $u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u)$, $i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i)$. Найдем мгновенную мощность двухполюсника: $p = ui = 2UI \cos(\omega t + \psi_u) \cos(\omega t + \psi_i) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$,

где $\varphi = \psi_u - \psi_i$ – сдвиг фаз между напряжением и током. Как видно из выражения, мгновенная мощность пассивного двухполюсника содержит постоянную составляющую $UI \cos \varphi$, значения которой зависит от сдвига фаз между током и напряжением, и переменную составляющую $UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$, амплитуда которой UI не зависит от φ . Среднее значение мгновенной мощности двухполюсника за период (активная мощность) численно равна постоянной составляющей мгновенной мощности: $P_A = UI \cos \varphi$.

10.2 Полная, комплексная, реактивная и активная мощности

Полной мощностью P_S называется величина, равная произведению действующих значений тока и напряжения на зажимах цепи:

$$P_S = UI.$$

Полная мощность численно равна амплитуде переменной составляющей мгновенной мощности. Активная мощность двухполюсника может быть выражена через полную мощность: $P_A = P_S \cos \varphi$. Из этого выражения видно, что полная мощность есть максимально возможное значение активной мощности, которое имеет место при $\varphi = 0$.

Коэффициент мощности – величина, характеризующая степень приближения активной мощности к полной: $\cos \varphi = P_A / P_S$.

Комплексной мощностью цепи $\underline{P_S}$ называется комплексное число, модуль которого равен полной мощности цепи, а аргумент – сдвигу фаз между током и напряжением:

$$\underline{P_S} = P_S \cdot e^{j\varphi}.$$

Переходя от показательной форме записи к тригонометрической, получим:

$$\underline{P_S} = P_S \cos \varphi + jP_S \sin \varphi = P_A + jP_Q,$$

т.е. $\operatorname{Re}(\underline{P_S}) = P_A$, $\operatorname{Im}(\underline{P_S}) = P_Q$. Вещественная часть комплексной мощности равна активной мощности, а мнимая часть комплексной мощности носит название **реактивной мощности** цепи. Реактивная мощность характеризует процессы обмена энергией между цепью и источником и численно равна максимальной скорости запасаения энергии в цепи. В зависимости от знака угла φ реактивная мощность может быть либо положительной либо отрицательной. Т.е. по знаку реактивной мощности можно судить о характере запасаемой энергии: при $P_Q > 0$ энергия запасается в магнитном поле цепи, при $P_Q < 0$ – в электрическом, при $P_Q = 0$ в цепи отсутствует обмен энергией с источником.

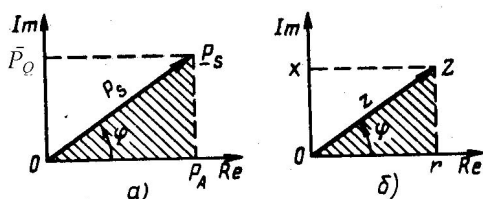


Рисунок 10.1

Комплексному числу $\underline{P}_S$ можно поставить в соответствие вектор $\underline{P}_S$, проекции которого на вещественную и мнимую ось равны, соответственно, P_A и P_Q (рис. 10.1,а). Прямоугольник с гипотенузой, равной P_S , и катетами P_A и P_Q называется **треугольником мощностей**. Из этого треугольника $P_S = \sqrt{P_A^2 + P_Q^2}$.

В связи с тем, что треугольник мощностей цепи подобен треугольнику сопротивлений этой же цепи (рис. 10.1,б), комплексная мощность $\underline{P}_S$ и ее компоненты P_S , P_A и P_Q могут быть выражены через комплексное сопротивление цепи $\underline{Z}$ и его компоненты z , r , x :

$$\begin{aligned} P_S &= UI = I^2 z; \quad P_Q = P_S \sin \varphi = UI x/z = I^2 x; \\ P_A &= P_S \cos \varphi = UI r/z = I^2 r; \quad \underline{P}_S = P_S e^{j\varphi} = I^2 z e^{j\varphi} = I^2 \underline{Z}. \end{aligned}$$



Найдем связь между комплексной мощностью и комплексными действующими значениями тока и напряжения на зажимах цепи. $\underline{P}_S = UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = U e^{j\psi_u} I e^{j\psi_i} = \dot{U} \dot{I}^*$,

где $\dot{I}^* = I e^{-j\psi_i}$ – число, комплексно сопряженное с $\dot{I}$ (комплексно сопряженный ток).

Комплексная мощность цепи равна произведению комплексного напряжения цепи $\dot{U}$ на комплексно сопряженный ток $\dot{I}^*$.

Активная, реактивная, полная мгновенная и комплексная мощности имеют одинаковую размерность [Дж/сек]. Однако, для того, чтобы подчеркнуть различный физический смысл, который вкладывается в эти понятия, единицам данных величин присвоены различные названия. Мгновенная и активная мощности выражаются в ваттах [Вт], полная и комплексная мощности – в вольт-амперах [В·А], реактивная мощность – в вольт-амперах реактивных [вар].

10.3 Баланс мощностей

Пусть произвольная электрическая цепь содержит N идеальных источников напряжения, M идеальных источников тока и H идеализированных пассивных элементов. Из закона сохранения энергии следует, что **сумма мгновенных мощностей, отдаваемых всеми источниками, равна сумме мгновенных мощностей, потребляемых всеми приемниками энергии**:

$$-\sum_{k=1}^{N+M} p_{k\text{ ucm}} = \sum_{k=1}^H p_{k\text{ nomp}},$$

или в комплексной форме: сумма комплексных мощностей, отдаваемых всеми идеализированными элементами, равна сумме комплексных мощностей всех идеализированных пассивных элементов:

$$-\sum_{k=1}^{N+M} \underline{P}_{S\text{ k ucm}} = \sum_{k=1}^H \underline{P}_{S\text{ k nomp}}.$$

Для практических расчетов электрических цепей условие баланса мощностей удобно представить в следующей форме:

$$\sum_{k=1}^N \dot{E}_k \dot{I}_k^* + \sum_{k=1}^M \dot{U}_k \dot{J}_k^* = \sum_{k=1}^H \dot{I}_k^2 \underline{Z}_k.$$

Левая часть этого выражения представляет собой алгебраическую сумму комплексных мощностей, отдаваемых всеми активными элементами. Слагаемое вида $\dot{E}_k \dot{I}_k^*$ есть

произведение комплексного действующего значения э.д.с. источника на комплексно сопряженных ток этого источника. Слагаемое вида $\dot{U}_k J_k^*$ равно произведению комплексного напряжения на источнике тока на комплексно сопряженный ток этого источника. Слагаемые, стоящие в левой части выражения, берутся со знаком «плюс», если направление тока источника напряжения совпадает с направлением э.д.с., или направление тока источника тока противоположно напряжению на его зажимах. В противном случае соответствующие слагаемые берутся со знаком «минус». Правая часть уравнения есть сумма комплексных мощностей всех идеализированных пассивных элементов.

Из условия баланса комплексных мощностей следует условие баланса активных и реактивных мощностей: **активная мощность, отдаваемая всеми источниками, равна активной мощности всех потребителей; реактивная мощность всех источников равна реактивной мощности всех потребителей.**

10.4 Согласование источника энергии с нагрузкой

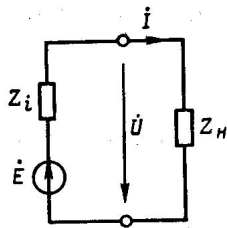


Рисунок 10.2

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из источника энергии и нагрузки. Пусть источник энергии представлен последовательной схемой замещения (рис 10.2), причем его внутреннее сопротивление имеет комплексный характер: $\underline{Z}_i = r_i + jx_i$. Задача согласования источника энергии с нагрузкой заключается в выборе такого сопротивления нагрузки $\underline{Z}_n = r_n + jx_n$, при котором в цепи будут выполняться условия, называемые **критериями согласования.**

Первый критерий согласования источника с нагрузкой заключается в обеспечении **максимума активной мощности, передаваемой в нагрузку.** Активная мощность нагрузки:

$$P_A = I^2 r_n = E^2 \frac{r_n}{(r_i + r_n)^2 + (x_i + x_n)^2}.$$

Отсюда видно, что P_A является функцией двух переменных: r_n и x_n . В связи с тем, что вещественная и мнимая составляющая сопротивления нагрузки не зависят одна от другой, выбор значения каждой из этих величин соответствующего максимуму P_A , можно производить в отдельности. Величина x_n входит только в знаменатель выражения для активной мощности. Очевидно, что максимальное значение $P_{A \max}$ по этой переменной будет достигнуто, если

$$x_n = -x_i. \text{ При этом } P_{A \max} = E^2 \frac{r_n}{(r_i + r_n)^2}.$$

Для определения значения r_n , соответствующего наибольшему возможному значению (максимум максимум) активной мощности нагрузки $P_{A \max \max}$, продифференцируем $P_{A \max}$ по r_n и приравняем к нулю полученное выражение

$$\frac{dP_{A \max}}{dr_n} = \frac{(r_i + r_n)^2 - 2r_n(r_i + r_n)}{(r_i + r_n)^4} E^2 = 0, \text{ или } (r_i + r_n)^2 - 2r_n(r_i + r_n) = 0.$$

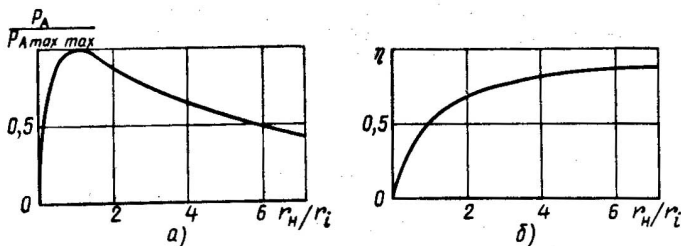


Рисунок 10.3

Решая уравнение, находим: $r_n = r_i$. При этом активная мощность достигает наибольшего возможного значения (рис. 10.3,а):

$$P_{A \max \max} = \frac{E^2}{4r_i}.$$

Объединяя полученные условия, находим, что наибольшее возможное значение активной мощности нагрузки $P_{A \max \max}$ соответствует $\underline{Z}_n = r_n + jx_n = r_i - jx_i$ или $\underline{Z}_n = \underline{Z}_i^*$, т.е. **сопротивление нагрузки должно быть равно сопротивлению, комплексно сопряженному с внутренним сопротивлением источника.**

В частном случае, если внутреннее сопротивление источника имеет резистивный характер ($\underline{Z}_i = r_i$), то для согласования источника энергии с нагрузкой по критерию наибольшей активной мощности, передаваемой в нагрузку, **сопротивление нагрузки должно быть равно внутреннему сопротивлению источника.**

Второй критерий согласования источника с нагрузкой заключается в обеспечении **максимума КПД цепи.**

КПД – коэффициент полезного действия, равен отношению активной мощности P_A , потребляемой нагрузкой, к суммарной активной мощности в цепи:

$$\eta = \frac{r_n I^2}{r_n I^2 + r_i I^2} = \frac{r_n}{r_n + r_i}.$$

Зависимость КПД от резистивной составляющей сопротивления нагрузки показана на рис. 10.3,б. Из рисунка видно, что КПД цепи монотонно возрастает с ростом отношения r_n/r_i , приближаясь к $\eta = 1$ при $r_n/r_i \rightarrow \infty$. Таким образом, **для согласования источника с нагрузкой по критерию максимума КПД, необходимо, чтобы резистивная составляющая сопротивления нагрузки была намного больше резистивной составляющей внутреннего сопротивления источника ($r_n \gg r_i$).**

Понятно, что рассмотренные два критерия согласования источника энергии с нагрузкой **являются несовместимыми**, т.е. не могут выполняться одновременно (рис. 10.3).

Критерий максимума КПД применяется в основном в электротехнике в мощных электроэнергетических системах, а согласование по критерию максимума мощности, передаваемой в нагрузку, широко используется в маломощных радиоэлектронных устройствах.

11 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Анализ процессов в электрических цепях во многих случаях может быть существенно упрощен за счет использования различных преобразований, в результате которых отдельные участки идеализированных цепей заменяются участками с более простой топологией или участками, более удобными для анализа.

Два участка электрической цепи называются эквивалентными, если при замене одного из этих участков другим токи и напряжения остальной части цепи не изменяются.

Эквивалентные преобразования электрических цепей – преобразования, в результате которых некоторые участки электрической цепи заменяются эквивалентными им участками.

Из определения эквивалентных участков следует, что они должны иметь одинаковое количество внешних выводов, причем в процессе эквивалентных преобразований **токи этих выводов и напряжения между ними должны оставаться неизменными**.

11.1 Участки цепей с последовательным соединением элементов

Рассмотрим неразветвленную электрическую цепь (рис 11.1,а), содержащую N сопротивлений, M емкостей, K индуктивностей и v источников напряжения. Так как через все элементы цепи протекает один и тот же ток i , то уравнение электрического равновесия, составленное на основании второго закона Кирхгофа и компонентных уравнений, может быть записано в следующем виде:

$$R_1 i + \dots + R_N i + L_1 \frac{di}{dt} + \dots + L_K \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i dt + \dots + \frac{1}{C_M} \int_{-\infty}^t i dt = u - (e_1 + e_v).$$

После приведения подобных членов:

$$R_{\text{эк}} i + L_{\text{эк}} \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_{\text{эк}}} \int_{-\infty}^t i dt = u - e_{\text{эк}}.$$

Последнему уравнению соответствует эквивалентная цепь, схема которой изображена на рисунке 11.1,б, где:

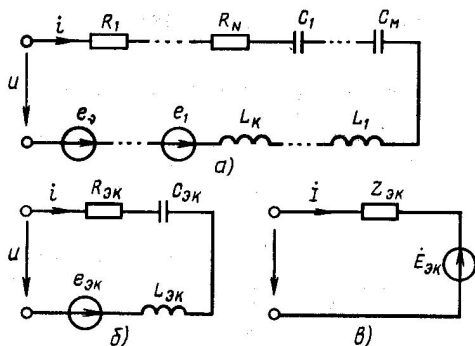


Рисунок 11.1



$$\begin{aligned} R_{\text{эк}} &= \sum_{i=1}^N R_i; & L_{\text{эк}} &= \sum_{i=1}^K L_i; \\ \frac{1}{C_{\text{эк}}} &= \sum_{i=1}^M \frac{1}{C_i}; & e_{\text{эк}} &= \sum_{i=1}^v e_i. \end{aligned}$$

Отсюда, **при последовательном соединении элементов** справедливы следующие правила:

- ! ✓ Эквивалентное сопротивление равно сумме сопротивлений;
- ✓ Эквивалентная индуктивность равна сумме индуктивностей;
- ✓ Величина, обратная эквивалентной емкости, равна сумме величин, обратных емкостям;
- ✓ Эквивалентная э.д.с. равна алгебраической сумме э.д.с..

Если рассмотренная цепь находится под гармоническим воздействием, то от эквивалентной схемы для мгновенных значений удобно перейти к эквивалентной схеме для комплексных значений. При этом комплексная схема замещения будет иметь один комплексный источник э.д.с. и одно комплексное сопротивление $Z_{экв}$, равное сумме комплексных сопротивлений всех пассивных элементов, соединенных последовательно (рис. 11.1,в).

11.2 Участки цепей с параллельным соединением элементов

Пусть электрическая цепь (рис. 11.2,а) состоит из параллельного соединения N сопротивлений, M емкостей, K индуктивностей и ν источников тока. Все элементы цепи находятся под одним и тем же напряжением u , тогда уравнение электрического равновесия, составленное на основании первого закона Кирхгофа:

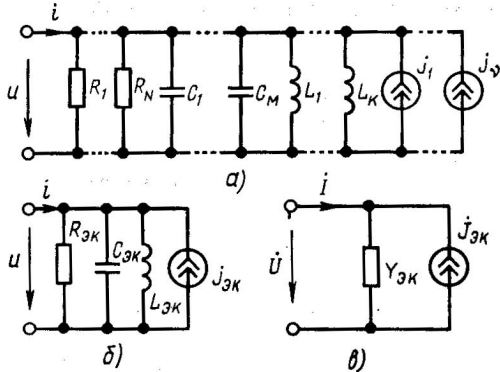


Рисунок 11.2

$$i = \frac{1}{R_1}u + \dots + \frac{1}{R_N}u + C_1 \frac{du}{dt} + \dots + C_M \frac{du}{dt} + \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t u dt + \dots + j_{\nu}$$

После приведения подобных членов:

$$i = \frac{1}{R_{эк}}u + C_{эк} \frac{du}{dt} + \frac{1}{L_{эк}} \int_{-\infty}^t u dt - j_{эк}.$$

Последнему уравнению соответствует эквивалентная цепь, схема которой изображена на рис. 11.2,б, где:

$$\frac{1}{R_{эк}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}; \quad \frac{1}{L_{эк}} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{L_i};$$

$$C_{эк} = \sum_{i=1}^M C_i; \quad j_{эк} = \sum_{i=1}^{\nu} j_i.$$



Отсюда, **при параллельном соединении элементов** справедливы следующие правила:

- ✓ Эквивалентная проводимость равна сумме проводимостей;
- ✓ Величина, обратная эквивалентной индуктивности, равна сумме величин, обратных индуктивностям;
- ✓ Эквивалентная емкость равна сумме емкостей;
- ✓ Эквивалентный источник тока равен алгебраической сумме источников тока.

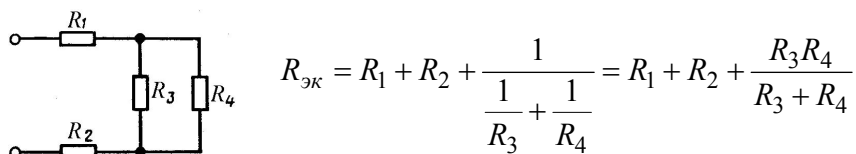
Если рассмотренная цепь находится под гармоническим воздействием, то от эквивалентной схемы для мгновенных значений удобно перейти к эквивалентной схеме для комплексных значений. При этом комплексная схема замещения будет иметь один комплексный источник тока и одну комплексную проводимость $Y_{экв}$, равную сумме комплексных проводимостей всех пассивных элементов, соединенных параллельно (рис. 11.2,в).

11.3 Участки цепей со смешанным соединением элементов

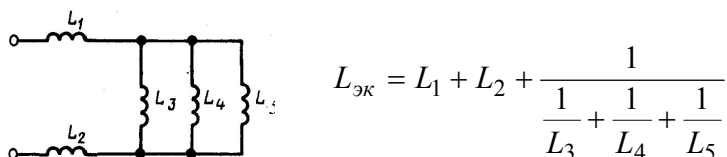
Правила преобразования участков цепей с параллельным или последовательным соединением элементов могут быть применены и для преобразования пассивных участков цепей со смешанным соединением элементов. Преобразование таких участков сводится к

последовательному «сворачиванию» групп параллельно и последовательно включенных элементов, что обычно производится в несколько этапов.

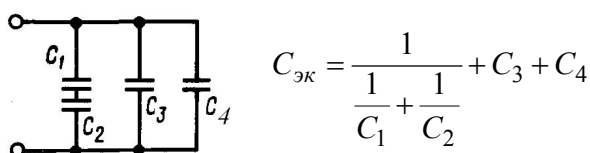
о Смешанное соединение сопротивлений:



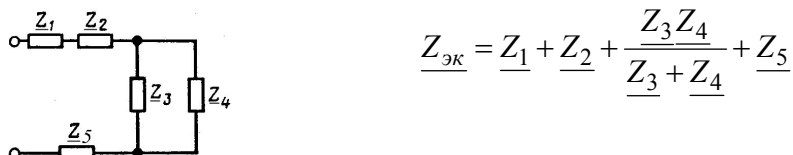
о Смешанное соединение индуктивностей:



о Смешанное соединение емкостей:



о Смешанное соединение комплексных сопротивлений:



11.4 Эквивалентное преобразование «треугольника» сопротивлений в «звезду» и обратно

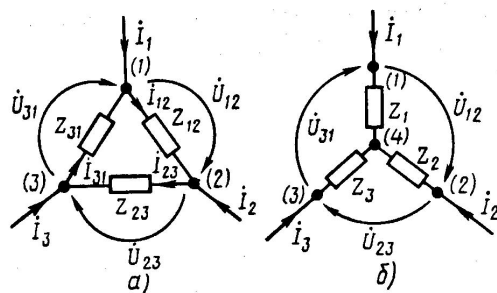


Рисунок 11.3

На рисунке 11.3 изображены два участка электрической цепи, которые представляют собой соединение комплексных сопротивлений «треугольником» и «звездой». По определению, эти участки цепи эквивалентны, если при замене одного участка другим токи выводов $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ и напряжения между выводами $\dot{U}_{12}, \dot{U}_{23}$ и $\dot{U}_{31}$ останутся неизменными. При

эквивалентных преобразованиях эти условия выполняются, если:

« треугольник-звезда »

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{31}};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{31}};$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{31}}.$$



« звезда-треугольник »

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3};$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1};$$

$$\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}.$$

11.5 Последовательная и параллельная схемы замещения пассивного двухполюсника

Условием эквивалентных пассивных линейных двухполюсников является равенство их комплексных сопротивлений (проводимостей).

Схемы, изображенные на рис. 11.4 и 11.5, для фиксированной частоты внешнего воздействия могут быть эквивалентными при выполнении некоторых условий и, т.к. имеют

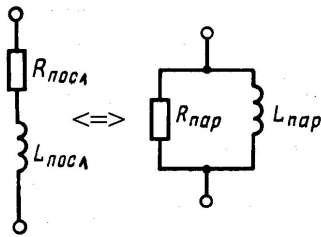


Рисунок 11.4

один и тот же характер сопротивления. Пусть заданы параметры последовательной схемы замещения R_{noc} и L_{noc} (рис. 11.4). Требуется найти параметры параллельной схемы замещения R_{nap} и L_{nap} .

Сопротивление последовательной схемы замещения:

$$\underline{Z} = r + jx = R_{noc} + j\omega L_{noc}.$$

Проводимость параллельной схемы замещения:

$$\underline{Y} = g + jb = \frac{1}{R_{nap}} - j \frac{1}{\omega L_{nap}}.$$

Пусть комплексные сопротивления рассмотренных двухполюсников равны, т.е. $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$. Используя связь между составляющими комплексного сопротивления и проводимости, можно выразить R_{nap} и L_{nap} через R_{noc} и L_{noc} :

$$R_{nap} = R_{noc} \left(1 + \left(\frac{\omega L_{noc}}{R_{noc}} \right)^2 \right); \quad L_{nap} = L_{noc} \left(1 + \left(\frac{R_{noc}}{\omega L_{noc}} \right)^2 \right).$$

Аналогично для схем на рис. 11.5, если заданы R_{nap} и C_{nap} , параметры последовательной схемы замещения R_{noc} и C_{noc} определяются по формулам:

$$R_{noc} = \frac{R_{nap}}{1 + (\omega C_{nap} R_{nap})^2}; \quad C_{noc} = C_{nap} \left(1 + \frac{1}{(\omega C_{nap} R_{nap})^2} \right).$$

Аналогичные пересчетные формулы можно легко получить и для обратных переходов, например от параллельной RL -цепи к последовательной и от последовательной RC -цепи к параллельной.

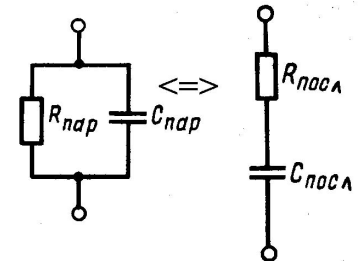


Рисунок 11.5

Следует всегда помнить, что вышеприведенные эквивалентные преобразования применимы только для фиксированной частоты внешнего воздействия. Изменение частоты внешнего воздействия вызовет изменение значений параметров элементов.

11.6 Комплексные схемы замещения источников энергии

Ранее были рассмотрены последовательные схемы замещения источников постоянного тока и напряжения и получены соотношения для их взаимного преобразования. Аналогичные соотношения выполняются и для источников гармонических токов и напряжений, т.е. для источников, комплексные схемы замещения которых содержат идеальный источник напряжения $\dot{E}$ и комплексное внутреннее сопротивление $\underline{Z}_i$ (рис. 11.6,а) или идеальный источник тока $\dot{J}$ и комплексную внутреннюю проводимость $\underline{Y}_i$ (рис. 11.6,б). Эти две схемы замещения эквивалентны при соблюдении условий:

$$\dot{E} = \dot{J} / \underline{Y}_i, \underline{Z}_i = 1 / \underline{Y}_i \text{ или } \dot{J} = \dot{E} / \underline{Z}_i, \underline{Y}_i = 1 / \underline{Z}_i.$$

В ряде случаев при анализе цепей возникает необходимость преобразовывать источники, т.е. заменять идеализированный источник одного типа другим. Если в анализируемую цепь включены идеальный источник

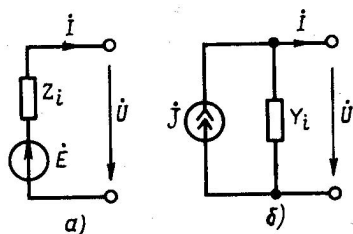


Рисунок 11.6

напряжения и последовательно с ним любой пассивный элемент, то комплексное сопротивление этого элемента можно считать внутренним сопротивлением источника и использовать приведенные выше формулы для преобразования источника напряжения в источник тока. Аналогично, если параллельно с идеальным источником тока включен любой пассивный элемент (группа элементов), то комплексная проводимость этого

элемента может рассматриваться как внутренняя проводимость параллельной схемы замещения реального источника. Используя приведенные формулы, можно преобразовать источник тока в источник напряжения. Идеальные источники тока и напряжения, которые могут быть преобразованы один в другой таким образом, называются **невырожденными**. Если в анализируемую цепь включены идеальный источник напряжения и последовательно с ним нет элементов, сопротивление которых можно рассматривать как внутреннее сопротивление источника, или идеальный источник тока, параллельно которому нет ветвей, проводимость которых можно трактовать как внутреннюю проводимость соответствующего источника, то такие источники называются **вырожденными**. Вырожденные источники напряжения и тока не могут быть преобразованы один в другой непосредственно. Однако, они могут быть устранены из рассматриваемой цепи с помощью преобразований, получивших названия **переноса источников**.

11.7 Перенос источников

Рассмотрим участок идеализированной электрической цепи, содержащий вырожденный источник напряжения (рис. 11.7,а).

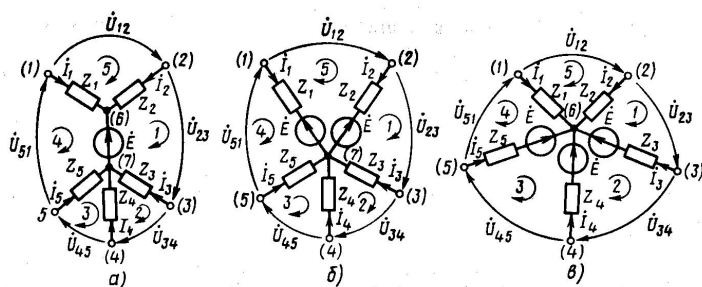


Рисунок 11.7

источник напряжения (рис. 11.7,а). **Избавиться от идеального источника напряжения можно, перенося вырожденный источник с сохранением его ориентации во все ветви, подключенные к тому же узлу, что и источник** (рис. 11.7,б,в). Ветвь, ранее содержащая вырожденный источник



$\dot{E}$, после переноса источника исчезает, причем узлы, к которым она была подключена, объединяются в один узел. Легко убедиться, что процессы во всех трех идеализированных цепях описываются решениями одной и той же системы уравнений электрического равновесия, составленной на основании законов Кирхгофа. И, следовательно, все три цепи являются эквивалентными.

Вырожденный источник тока, включенный между узлами произвольной электрической цепи, может быть заменен несколькими источниками тока, включенными параллельно любым ветвям электрической цепи, образующим контур с вырожденным источником тока.

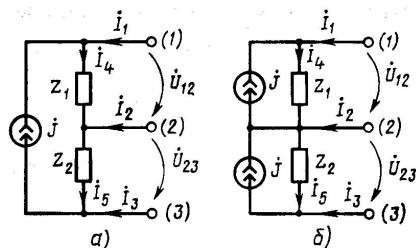


Рисунок 11.8

законов Кирхгофа.

Источник тока переносится без изменения тока источника $\dot{J}$ и его ориентации. Ветвь, ранее содержащая вырожденный источник тока, после переноса источника исчезает. На рис. 11.8 изображено преобразование – перенос идеализированного источника тока. Эквивалентность цепей следует из того, что процессы в них описываются одной и той же системой уравнений электрического равновесия, составленной на основе

12 ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

12.1 Понятие взаимной индуктивности

Связанными называются две или более катушек индуктивности, если изменение тока в одной из катушек вызывает появление э.д.с. в остальных.

Взаимоиндукцией называется явление наведения э.д.с. в какой-либо индуктивности при изменении тока другой индуктивности.

Рассмотрим две катушки индуктивности, расположенные таким образом, что магнитный поток, вызванный током одной из катушек, пронизывает витки другой катушки (рис. 12.1). Пусть i_1 и i_2 – токи первой и второй катушек, а Φ_{11} и Φ_{22} – **магнитные потоки самоиндукции** этих катушек, т.е. магнитные потоки, пронизывающие каждую из катушек и вызванные протекающим по ним током. Часть магнитного потока самоиндукции первой катушки Φ_{11} , которая пронизывает витки второй катушки, назовем **потоком взаимоиндукции**

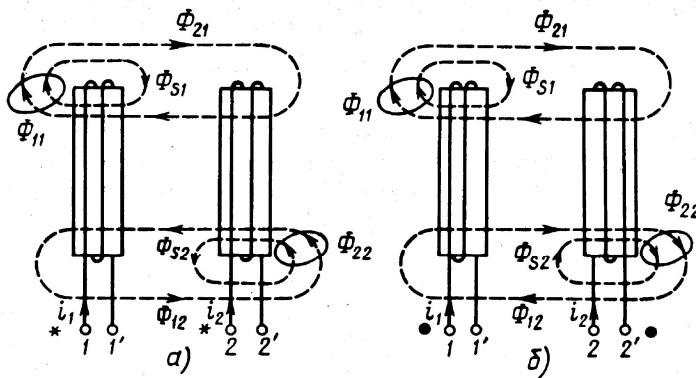


Рисунок 12.1

второй катушки – Φ_{21} . Оставшаяся часть магнитного потока самоиндукции первой катушки, которая пронизывает только витки первой катушки, назовем **магнитным потоком рассеяния первой катушки** – Φ_{S1} .

Аналогично для второй катушки индуктивности: Φ_{12} – **магнитный поток взаимоиндукции первой катушки**, Φ_{S2} – **магнитный поток рассеяния второй катушки**. Таким образом, магнитный поток

самоиндукции каждой из катушек содержит по две составляющие: $\Phi_{11} = \Phi_{21} + \Phi_{S1}$, $\Phi_{22} = \Phi_{12} + \Phi_{S2}$.

Полный магнитный поток, пронизывающий каждую из катушек, складывается из магнитных полей самоиндукции и взаимоиндукции: $\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12}$, $\Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21}$.

Потокосцепление каждой из катушек, так же, как и магнитный поток, имеет две составляющие – потокосцепление самоиндукции Ψ_{11} и Ψ_{22} , и потокосцепление взаимоиндукции Ψ_{21} и Ψ_{12} . Поэтому суммарное потокосцепление каждой из катушек можно определить следующим образом: $\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12}$, $\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21}$.

Знак «плюс» в этих выражениях соответствует совпадающим по направлению магнитным потокам самоиндукции и взаимоиндукции каждой из катушек. Такое включение катушек индуктивности называется **согласным**. Знак «минус» соответствует противоположным направлениям магнитных потоков самоиндукции и взаимоиндукции. Такое включение катушек называется **встречным**. В соответствии с законом электромагнитной индукции, э.д.с., наводимые в каждой из связанных катушек индуктивности:

$$e_1 = -\frac{d\Psi_1}{dt}, \quad e_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt}.$$

Переходя от э.д.с. к напряжениям на зажимах связанных катушек индуктивности, получим:

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = \frac{d\Psi_{11}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{12}}{dt} = \frac{d\Psi_{11}}{di_1} \frac{di_1}{dt} \pm \frac{d\Psi_{12}}{di_2} \frac{di_2}{dt},$$

$$u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = \frac{d\Psi_{22}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{21}}{dt} = \frac{d\Psi_{22}}{di_2} \frac{di_2}{dt} \pm \frac{d\Psi_{21}}{di_1} \frac{di_1}{dt},$$

где для линейных индуктивностей:

$$\frac{d\Psi_{11}}{di_1} = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = L_1, \quad \frac{d\Psi_{22}}{di_2} = \frac{\Psi_{22}}{i_2} = L_2, \quad \frac{d\Psi_{12}}{di_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = M_{12}, \quad \frac{d\Psi_{21}}{di_1} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = M_{21}.$$

L_1 и L_2 – собственно индуктивности катушек, $M_{12} = M_{21} = M$ – взаимная индуктивность между катушками. Взаимная индуктивность выражается в генри [Гн]. С учетом введенных обозначений окончательно получаем зависимость напряжений на зажимах связанных катушек от протекающих по ним токов:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$



12.2 Понятие об одноимённых зажимах

При анализе цепей с взаимной индуктивностью возникает задача определить, каким образом (согласно или встречно) включены рассматриваемые катушки индуктивности и в соответствии с этим какой знак («плюс» или «минус» необходимо ставить перед взаимной индуктивностью M). Если конструкции катушек индуктивности известны, и направления токов заданы, то достаточно воспользоваться **правилом буравчика**. При вычерчивании принципиальных электрических схем цепей с взаимной индуктивностью катушки индуктивности изображаются с помощью условных графических обозначений, которые не отражают особенностей их конструкции. Для выяснения, является ли данное включение катушек согласным или встречным, вводят понятие одноимённых зажимов связанных катушек индуктивности.

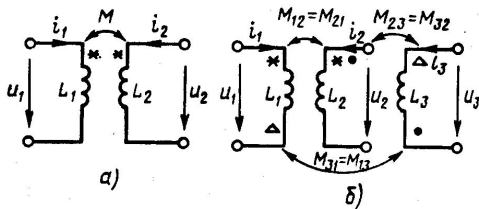


Рисунок 12.2

Одноимёнными зажимами двух связанных катушек называются такие зажимы, при одинаковой ориентации тока относительно которых потоки самоиндукции и потоки взаимоиндукции складываются. На рис. 12.2 приведены условные графические обозначения связанных индуктивностей на эквивалентных схемах с введённым понятием одноимённых зажимов. Одноименные зажимы показаны на рисунке знаками «*», «Δ», «●».

12.3 Коэффициент связи между катушками индуктивности

Из качественного рассмотрения процессов в связанных катушках видно, что чем сильнее связаны катушки, т.е. чем большая часть магнитного потока, создаваемого током каждой из них, пронизывает другую катушку, тем выше взаимная индуктивность. Однако при этом не ясно, как связана взаимная индуктивность с индуктивностями катушек и чем определяется максимальное значение M . Введем новую величину, количественно характеризующую степень связи между катушками – коэффициент связи.

Коэффициент связи k_M – среднее геометрическое из отношений потока взаимоиндукции к потоку самоиндукции каждой из катушек:

$$k_M = \sqrt{\frac{\Phi_{12}\Phi_{12}}{\Phi_{11}\Phi_{22}}} = \sqrt{\frac{\Phi_{12}\Phi_{12}}{(\Phi_{21} + \Phi_{S1})(\Phi_{12} + \Phi_{S2})}}.$$

Из последнего выражения видно, что значения коэффициента связи лежат в пределах:

$$0 \leq k_M \leq 1.$$

Причем $k_{M \max} = 1$ только тогда, когда потоки рассеяния обеих катушек равны нулю.

Коэффициент связи k_M можно выразить через индуктивности связанных катушек и их взаимную индуктивность. Подставляя в предыдущее выражение вместо магнитных потоков их значения через индуктивность, ток и число витков в катушке, находим:

$$k_M = \sqrt{\frac{M_{12}i_2/N_1}{L_1i_1/N_1} \frac{M_{21}i_1/N_2}{L_2i_2/N_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}},$$

откуда:

$$M = k_M \sqrt{L_1L_2}.$$

Следовательно, пределы, в которых изменяется значение взаимной индуктивности:

$$0 \leq M \leq \sqrt{L_1L_2}.$$

Максимальное значение взаимной индуктивности катушек не может превышать среднего геометрического значения их индуктивностей.

12.4 Цепи с взаимной индуктивностью при гармоническом воздействии

Уравнение связанных индуктивностей при гармоническом внешнем воздействии может быть записано в комплексной форме:



$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1\end{aligned}$$

Комплексное действующее значение напряжения на каждой из связанных индуктивностей, помимо падения напряжения на комплексном сопротивлении индуктивности $Z_L = j\omega L$, вызванного протекающим по ней током, содержит также дополнительный член, который можно рассматривать как падение напряжения на некотором комплексном сопротивлении $Z_M = j\omega M$, называемом **комплексным сопротивлением связи**, вызванное протекающим по нему током другой индуктивности.

Комплексная схема замещения пары индуктивностей приведена на рис. 12.3.

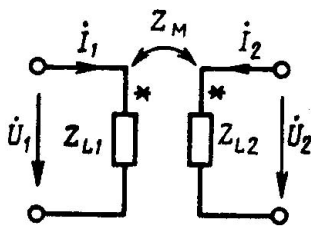


Рисунок 12.3

Система уравнений электрического равновесия цепи с взаимными индуктивностями так же, как и системы основных уравнений ранее рассмотренных цепей, не содержащих взаимных индуктивностей, формируются из компонентных уравнений и уравнений баланса токов и напряжений, составленных на основании законов Кирхгофа. При наличии связанных индуктивностей изменяется лишь вид компонентных уравнений.

12.5 Эквивалентные преобразования участков цепей со связанными индуктивностями

При последовательном соединении связанных индуктивностей (рис. 12.4) эквивалентная индуктивность может быть найдена:

$$L_{\text{эк}} = L_1 + L_2 \pm 2M,$$

где знак «плюс» соответствует согласному включению, а «минус» – встречному. При параллельном соединении связанных индуктивностей (рис. 12.5) эквивалентная индуктивность вычисляется по формуле:

$$L_{\text{эк}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$$

где знак «минус» соответствует согласному включению, а «плюс» – встречному.

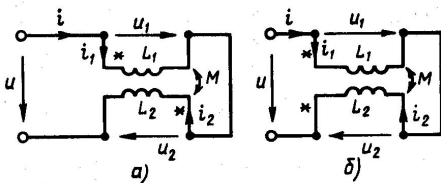


Рисунок 12.4

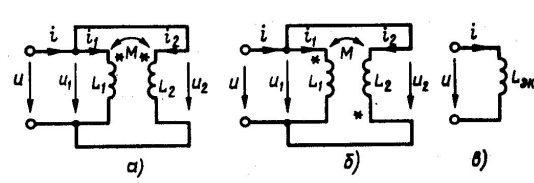


Рисунок 12.5

12.6 Линейный трансформатор без сердечника

Трансформатором называется устройство для передачи энергии из одной части электрической цепи в другую, действие которого основано на использовании явления взаимной индукции. Реальный трансформатор состоит из нескольких связанных индуктивностей (обмоток), которые для повышения их индуктивности и уменьшения потоков рассеяния размещены на общем ферромагнитном сердечнике. Одну из обмоток трансформатора обычно подключают к источнику энергии – это **первичная обмотка**, а к остальным – **вторичным обмоткам** – подсоединяют различные нагрузки. В связи с тем, что свойства магнитных материалов существенно зависят от напряженности магнитных полей, и, следовательно, от создающих эти поля токов, трансформатор с ферромагнитным сердечником представляет собой в общем случае устройство с нелинейными характеристиками, и процессы в нем описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Линейный двухобмоточный трансформатор можно рассматривать как две связанные катушки без сердечника с линейной индуктивностью (рис. 12.6). Сопротивления R_1 и R_2 учитывают потери энергии в обмотках трансформатора. Уравнения трансформатора при гармоническом внешнем воздействии имеют вид:

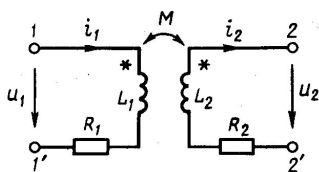


Рисунок 12.6

$$\dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2,$$

$$-\dot{U}_2 = (R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_1.$$

Пусть в рассматриваемом линейном трансформаторе ток вторичной обмотки $\dot{I}_2 = 0$ (режим холостого хода на выходе). Как видно из приведенных выше выражений, ток первичной обмотки при этом не равен нулю:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L_1} = \dot{I}_{10}.$$

Ток $\dot{I}_{10}$, потребляемый трансформатором от источника в режиме холостого хода на выходе, называется **током намагничивания**.

В теории цепей имеет большое значение понятия «совершенного» и «идеального» трансформатора.

Совершенный трансформатором называется идеализированный четырехполюсный элемент, представляющий собой две связанные индуктивности с коэффициентом связи, равным

единице. В таком трансформаторе отсутствуют потоки рассеяния и не происходит запасание энергии в электрическом поле или преобразование электрической энергии в другие виды энергии. При таких допущениях решение уравнений трансформатора приводит к следующему результату:

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_2}{n}, \quad \dot{I}_1 = n\dot{I}_2 + \dot{I}_{10},$$



где $n = \frac{N_1}{N_2}$ – коэффициент трансформации, равный отношению числа витков первичной и вторичной обмоток.

Идеальный трансформатор – это такой совершенный трансформатор, у которого ток намагничивания равен нулю. Уравнения идеального трансформатора:



$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_2}{n}, \quad \dot{I}_1 = n\dot{I}_2.$$

Понятно, что ток намагничивания совершенного трансформатора равен нулю только при $L_1 \rightarrow \infty$. В связи с тем, что коэффициент трансформации n является действительным числом, напряжение и ток первичной обмотки имеют такие же начальные и мгновенные фазы, как соответствующие напряжения и ток вторичной обмотки и отличаются от них только по амплитуде (действующему значению).

Нетрудно убедиться, что К.П.Д. идеального трансформатора равен единице.

Если к зажимам 2–2' идеального трансформатора подключено сопротивление нагрузки $\underline{Z}_n = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$, то его входное сопротивление со стороны зажимов 1–1' :

$$\underline{Z} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = \dot{U}_2 / (n^2 \dot{I}_2) = \underline{Z}_n / n^2.$$

Входное сопротивление идеального трансформатора имеет такой же характер, как и сопротивление нагрузки и отличается от него по модулю в n^2 раз. Способность трансформаторов преобразовывать модуль сопротивления широко используется в радиоэлектронных устройствах для согласования источника энергии с нагрузкой.

В отличие от идеального в реальном трансформаторе происходят потери энергии, он характеризуется в ряде случаев значительными паразитными емкостями, индуктивность его обмоток имеет конечное значение, а потоки рассеяния не равны нулю. Как правило при разработке конструкции трансформатора предпринимается ряд мер, направленных на приближение его свойств к свойствам идеального трансформатора. С этой целью, в частности, обмотки трансформатора размещают на ферромагнитном сердечнике с высоким значением эффективной магнитной проницаемости. Применение сердечника увеличивает индуктивность обмоток, а также коэффициент связи и приводит к снижению тока намагничивания. Несмотря на то, что идеальный трансформатор по своим свойствам значительно отличается от реального, те простейшие аналитические выражения, которые мы для него получили, широко используются при конструировании и расчетах трансформаторов.

13 МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЦЕПИ

13.1 Общие представления о методах формирования уравнений

До сих пор для формирования уравнений электрического равновесия цепи мы использовали основную систему уравнений электрического равновесия цепи, которая включает в себя p топологических уравнений, составленных на основании законов Кирхгофа, и $p - p_{um} - p_{un}$ компонентных уравнений, где p – число ветвей заданной цепи. Очевидно, что при усложнении электрической цепи с ростом числа ветвей цепи анализ усложняется, т.к. для определения токов и напряжений приходится решать систему из большого количества уравнений. Число одновременно решаемых уравнений может быть уменьшено, если учесть, что не все неизвестные токи и напряжения ветвей являются независимыми. Для каждой электрической цепи можно выделить совокупность независимых токов (напряжений), зная которые можно определить все остальные (зависимые) токи и напряжения. Рассмотрим несколько таких методов.

13.2 Метод контурных токов

Метод контурных токов основан на важной топологической особенности электрических цепей, вытекающей из первого закона Кирхгофа и заключающейся в том, что **токи всех ветвей цепи могут быть выражены через токи главных ветвей**. Для определения токов главных ветвей (контурных токов) составляют систему из $p - p_{um} - q + 1$ уравнений, называемых **контурными уравнениями**. Рассмотрим методику формирования контурных уравнений на примере цепи, не содержащей источников тока и приведенной на рис. 13.1.

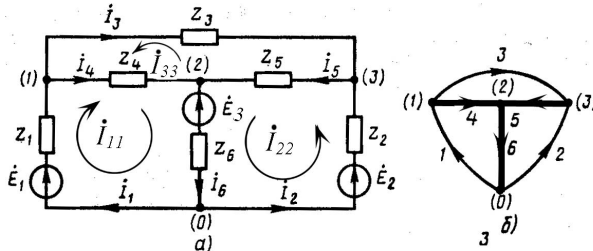


Рисунок 13.1

Выбирая произвольно дерево графа этой цепи (ветви 4-5-6), убеждаемся, что токи ветвей дерева однозначно выражаются через токи главных ветвей. В частности, используя дерево графа и соответствующую ему систему контуров, изображенных на рис. 13.1,б, находим на основании первого закона Кирхгофа, что токи ветвей дерева i_4 , i_5 , i_6 могут быть выражены через токи главных

ветвей i_1 , i_3 , i_2 (например, $i_4 = i_1 - i_3$). Таким образом, если определить токи главных ветвей, то далее можно найти токи остальных ветвей цепи, а затем и неизвестные напряжения ветвей. Следовательно, **для полного описания процессов в цепи достаточно определить лишь токи главных ветвей исследуемой цепи**.

На практике контурные уравнения для определения токов главных ветвей формируют с помощью простого алгоритма, не прибегая к составлению основной системы уравнений электрического равновесия, поэтому применение этого метода позволяет упростить и составление, и решение уравнения электрического равновесия цепи. Для того, чтобы сформулировать правила составления контурных уравнений введем ряд новых понятий.

Собственным сопротивлением контура назовём сумму сопротивлений всех ветвей, входящих в этот контур. Например, собственное сопротивление первого контура в заданной цепи равно $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6$, второго — $\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6$, третьего — $\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5$.

Контурными токами будем называть токи главных ветвей, замыкающиеся в контурах, образованных соответствующей главной ветвью и ветвями дерева, т.е. протекающими по всем ветвям, входящим в данный контур. Контурный ток первого контура — $i_{11} = i_1$, второго — $i_{22} = i_2$, третьего — $i_{33} = i_3$.

Взаимным сопротивлением называется сопротивление, равное сумме сопротивлений всех ветвей, общих для соседних контуров. Например, в заданной схеме взаимным сопротивлением первого и второго контуров является сопротивление $\underline{Z}_6$, а второго и третьего контуров — $\underline{Z}_5$. Взаимное сопротивление берется со знаком «плюс», если контурные токи рассматриваемых контуров протекают по нему в одном направлении, при встречном протекании токов соседних контуров во взаимном сопротивлении оно берется со знаком «минус».

Контурная э.д.с. контура — это алгебраическая сумма э.д.с. всех идеализированных источников напряжения, входящих в рассматриваемый контур. Если направление э.д.с. совпадает с направлением контурного тока этого контура, то она берется со знаком «плюс», в противном случае — «минус». В заданной цепи контурная э.д.с. первого контура $\dot{E}_1 - \dot{E}_3$, второго контура — $\dot{E}_2 - \dot{E}_3$, третьего контура — 0.

Сформулируем правило составления контурных уравнений: *все контурные уравнения имеют одинаковую структуру: левая часть каждого контурного уравнения есть сумма членов, один из которых равен произведению контурного тока рассматриваемого контура на собственное сопротивление этого контура, а остальные — произведением контурных токов соседних контуров на соответствующие взаимные сопротивления с рассматриваемым контуром; правая часть контурного уравнения содержит только один член — контурную э.д.с. рассматриваемого контура.*



Используя это правило составим систему уравнений электрического равновесия цепи, изображенной на рис. 13.1, методом контурных токов:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6) + \dot{I}_{22}\underline{Z}_6 + \dot{I}_{33}\underline{Z}_4 = \dot{E}_1 - \dot{E}_3 \\ \dot{I}_{22}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) + \dot{I}_{11}\underline{Z}_6 - \dot{I}_{33}\underline{Z}_5 = \dot{E}_2 - \dot{E}_3 \\ \dot{I}_{33}(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) + \dot{I}_{11}\underline{Z}_4 - \dot{I}_{22}\underline{Z}_5 = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений относительно контурных токов, можно найти все остальные токи (токи ветвей дерева), например: $\dot{I}_4 = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{33}$.

Для заданной цепи количество уравнений в основной системе уравнений электрического равновесия цепи $2p - p_{um} - p_{un} = 12$. Метод контурных токов для цепи, не содержащей источников тока, дает возможность уменьшить число одновременно решаемых уравнений до $p - q + 1 = 3$.

Если в состав цепи входят ветви, содержащие источник тока, то дерево графа необходимо выбирать таким образом, чтобы источники тока вошли в состав главных ветвей. Очевидно, что контурные токи контуров, образованных главными ветвями, содержащими источники тока, равны токам соответствующих источников. Эти токи заданы и не требуют определения. Следовательно, уравнения для контуров с источниками тока не составляются, и общее число уравнений уменьшается до $p - q + 1 - p_{um}$. Для примера возьмем цепь, изображенную на рис. 13.2,а. Составим граф электрической цепи и выберем дерево графа в соответствии с указанными выше требованиями (рис. 13.2,б). Тогда уравнения составляются

только для третьего контура:

$$\dot{I}_{33}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) + \dot{J}_2(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) + \dot{J}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = 0.$$

С помощью этого уравнения можно определить один неизвестный ток $\dot{I}_{33}$, а после этого — токи ветвей дерева.

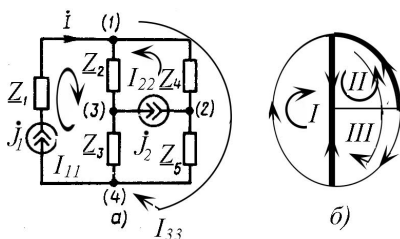


Рисунок 13.2

13.3 Метод узловых напряжений

В качестве независимых переменных, относительно которых формируют уравнения электрического равновесия цепи, в этом методе используются так называемые «**узловые напряжения**», т.е. напряжения независимых узлов рассматриваемой цепи относительно базисного (нулевого). Можно показать, **что напряжения всех ветвей электрической цепи могут быть выражены через узловые напряжения этой цепи.**

Рассмотрим метод формирования узловых уравнений на примере цепи, не содержащей источников напряжения (рис. 13.3). Введем ряд новых понятий.

Узловым напряжением узла будем называть напряжение этого узла относительно нулевого, заземленного узла, потенциал которого равен нулю. Для рассматриваемой цепи узловое напряжение первого узла относительно нулевого — $\dot{U}_{10}$, второго — $\dot{U}_{20}$, третьего — $\dot{U}_{30}$.

Собственной проводимостью узла будем называть сумму проводимостей всех ветвей, подключенных к этому узлу. Для рассматриваемой цепи собственная проводимость первого узла $\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4$, второго узла — $\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6$, третьего узла — $\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5$.

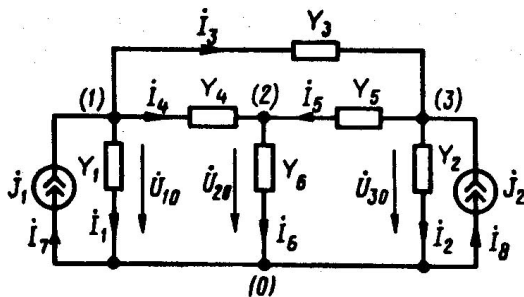


Рисунок 13.3

Взаимная проводимость между соседними узлами — это сумма проводимости всех ветвей, включенных непосредственно между этими узлами, взятая со знаком «минус». Если в цепи отсутствуют ветви, включенные между узлами, то взаимная проводимость равна нулю. Для цепи, схема которой приведена на рис. 13.3, взаимная проводимость между первым и вторым узлом — $-\underline{Y}_4$, между

первым и третьим — $-\underline{Y}_3$, между вторым и третьим — $\underline{Y}_5$.

Узловым током рассматриваемого узла называется алгебраическая сумма токов всех источников тока, подключенных к данному узлу. Если ток источника входит в узел, то он берется со знаком «плюс», если выходит из узла — то со знаком «минус». Для рассматриваемой цепи узловой ток первого узла — $\dot{J}_1$, второго — 0 , третьего — $\dot{J}_2$.

Сформулируем правило составления узловых уравнений: **левая часть любого узлового уравнения есть сумма членов, один из которых равен произведению узлового напряжения рассматриваемого узла на его собственную проводимость, а остальные — произведением узловых напряжений соседних независимых узлов на соответствующие взаимные проводимости между рассматриваемым узлом и соседними. Правая часть каждого уравнения равна узловому току рассматриваемых узлов.**



Используя это правило, составим систему уравнений электрического равновесия цепи, приведенной на рис. 13.3, методом узловых напряжений.

$$\begin{aligned} (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)\dot{U}_{10} - \underline{Y}_4\dot{U}_{20} - \underline{Y}_3\dot{U}_{30} &= \dot{J}_1, \\ -\underline{Y}_4\dot{U}_{10} + (\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6)\dot{U}_{20} - \underline{Y}_5\dot{U}_{30} &= 0, \\ -\underline{Y}_3\dot{U}_{10} - \underline{Y}_5\dot{U}_{20} + (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5)\dot{U}_{30} &= \dot{J}_2. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений относительно узловых напряжений, можно найти напряжения всех ветвей цепи. Например, напряжение на проводимостях $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$ и $\underline{Y}_5$

соответственно равны узловым напряжениям $\dot{U}_{10}$, $\dot{U}_{30}$ и $\dot{U}_{20}$. Напряжения на проводимости $\underline{Y}_3$ равно $\dot{U}_{10} - \dot{U}_{30}$, на проводимости $\underline{Y}_4$ — $\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}$, $\underline{Y}_5$ — $\dot{U}_{30} - \dot{U}_{20}$.

Метод узловых напряжений позволяет уменьшить число одновременно решаемых уравнений в цепи, не содержащей источников напряжения, до $q - 1 = 3$.

Если цепь содержит невырожденные источники напряжения, то они преобразуются в источники тока по известным правилам, а затем производится составление уравнений. Если между двумя узлами электрической цепи включен вырожденный источник напряжения, который не может быть преобразован в источник тока, **то один из этих узлов обязательно принимается за базовый** (нулевой). И тогда число уравнений уменьшится, т.к. напряжение второго узла будет известно. Т.е. число уравнений, составленных по этому методу, будет равно $q - 1 - p_{\text{ин}}$.

Рассмотрим цепь, содержащую источники напряжения (рис. 13.4) и составим систему уравнений по методу узловых напряжений.

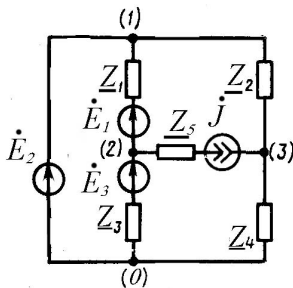


Рисунок 13.4

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \right) \dot{U}_{22} - \frac{1}{\underline{Z}_1} \dot{E}_2 = -\frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\dot{E}_3}{\underline{Z}_3} - J \\ \left(\frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_4} \right) \dot{U}_{33} - \frac{1}{\underline{Z}_2} \dot{E}_2 = J \end{cases}$$

13.4 Метод наложения

Для линейных электрических цепей характерен **принцип наложения** (суперпозиции), который заключается в том, что реакция линейных цепей на произвольное внешнее воздействие, представляющее собой линейную комбинацию более простых воздействий, равна линейной комбинации реакций, вызванных каждым из простых воздействий в отдельности.

Из принципа наложения следует, что **ток или напряжение любой ветви линейной электрической цепи, содержащей наряду с пассивными элементами источники тока и напряжения, равны сумме частичных токов или напряжений, вызванных действием каждого независимого источника в отдельности**.

Из этого принципа вытекает **алгоритм анализа цепи методом наложения**.

1. Для определения частичных токов (напряжений) можно использовать эквивалентные схемы цепи, получаемые из исходной путем выключения всех независимых источников, кроме одного, вызывающего соответствующий частичный ток (напряжение). Исключая источники электрической энергии, оставляют их внутреннее сопротивление (при исключении идеального источника напряжения закорачивают точки его подключения; при исключении идеального источника тока разрывают ветвь, в которую он был включен).
2. Для каждого источника определяют частичный ток (напряжение), создаваемый им в интересующей ветви электрической цепи. Анализ схемы с одним источником электрической энергии значительно упрощается.
3. Алгебраически складывают с учетом направления (знака) частичные токи (напряжения), создаваемые в интересующей ветви каждым источником в отдельности.



Метод удобно применять, когда требуется найти ток (напряжение) отдельной ветви.

Рассмотрим схему, приведенную на рисунке 13.5. Пусть требуется определить ток $\dot{I}_4$, протекающий по комплексному сопротивлению $\underline{Z}_4$.

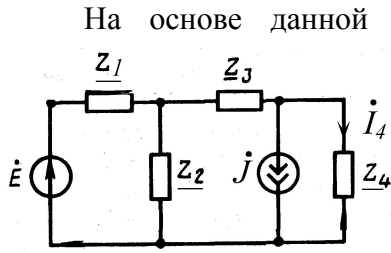


Рисунок 13.5

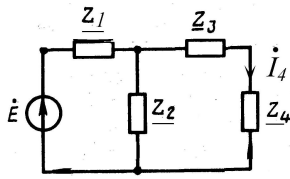


Рисунок 13.6

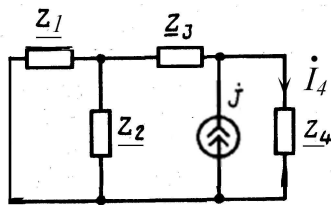


Рисунок 13.7

На основе данной эквивалентной схемы построим две (по числу источников электрической энергии) дополнительные эквивалентные схемы, содержащие по одному источнику электрической энергии (рис. 13.6, 13.7).

Используя закон Ома в комплексной форме и правило делителя тока, находим частичный ток, создаваемый идеальным источником напряжения $\dot{E}$ (рис. 13.6):

$$\dot{I}_4' = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}.$$

Используя правило делителя тока, определяем частичный ток, создаваемый в сопротивлении $\underline{Z}_4$ идеальным источником тока $\dot{J}$ (рис. 13.7):

$$\dot{I}_4'' = \frac{j(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2))}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}.$$

Алгебраически складывая два частичных тока, получаем ток $\dot{I}_4$, протекающий по сопротивлению $\underline{Z}_4$ при воздействии двух источников электрической энергии одновременно:

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_4' - \dot{I}_4''.$$

13.5 Метод эквивалентного источника

Рассмотрим ту же линейную электрическую цепь, что и в методе наложения (рис. 13.5), которая наряду с идеализированными пассивными элементами содержит источники тока и напряжения. Выделим в этой цепи ветвь, состоящую из сопротивления $\underline{Z}_4$ и подключенную к зажимам $a-a'$. Отключим ее от этих зажимов. Тогда *оставшуюся электрическую цепь можно рассматривать как некоторый активный линейный двухполюсник* (АЛД) *или источник электрической энергии* (рис. 13.8,а), который можно представить последовательной или параллельной схемой замещения (рис. 13.8,б,в). Если мы каким-либо образом найдем параметры любой из схем замещения, то задача определения тока (напряжения) через отключаемую цепь становится тривиальной. Э.д.с. идеального источника напряжения в последовательной схеме замещения равна напряжению холостого хода на зажимах АЛД ($a-a'$); ток идеального источника тока в параллельной схеме замещения равен току короткого замыкания АЛД (зажимы $a-a'$).

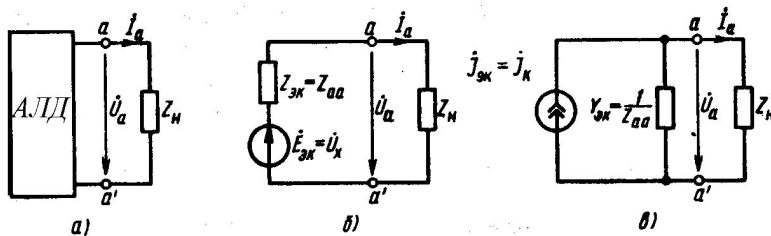


Рисунок 13.8

Внутреннее сопротивление и внутренняя проводимость эквивалентного источника равны соответственно комплексному входному сопротивлению и комплексной входной проводимости соответствующего линейного пассивного двухполюсника, т.е. АЛД, из которого исключены источники электрической энергии, но сохранены их внутренние сопротивления (аналогично предыдущему методу).

Решим ту же задачу, что и при рассмотрении метода наложения. Будем использовать последовательную схему замещения источника электрической энергии, отображающего АД (рис. 13.8,б).

Найдем напряжение холостого хода $\dot{U}_{xx}$ на зажимах $(a-a')$ (рис. 13.9,а), используя любой известный нам метод, например, метод наложения:

$$\dot{U}_{xx} = \dot{E}_{\text{ЭК}} = \frac{\dot{E} \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - j \left(\underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right).$$

Внутреннее сопротивление последовательной схемы замещения источника (рис. 13.9,б):

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{\text{ЭК}} = \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

В итоге находим ток $\dot{I}_4$ (рис. 13.9,в):

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{E}_{\text{ЭК}}}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_{\text{ЭК}}}.$$

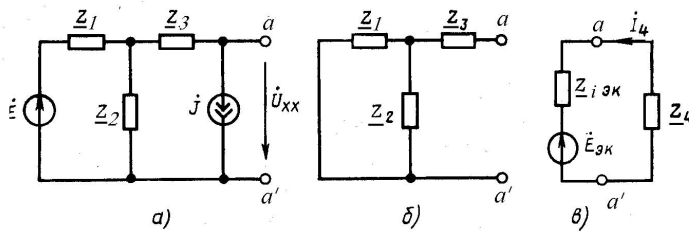


Рисунок 13.9

Этот метод позволяет существенно упростить анализ электрической цепи, особенно в тех случаях, когда требуется определить ток или напряжение только одной ветви сложной электрической цепи, содержащей большое количество источников энергии.

14 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

14.1 Понятие о комплексных частотных характеристиках

Задача анализа электрической цепи была сформулирована ранее как задача определения реакции цепи на заданное внешнее воздействие. Возьмем линейный пассивный четырехполюсник, т.е. часть цепи, приведенную к двум парам зажимов (см. рис. 14.1). **Входными** будем называть пару зажимов (полюсов), к которым подключается источник, задающий внешнее воздействие на цепь. Как правило, это зажимы 1–1'. Зажимы, служащие для подключения нагрузки, т.е. ветви, ток и напряжения которой необходимо определить, назовем **выходными** (на рисунке эти зажимы обозначены 2–2'). Ограничимся рассмотрением случая гармонического внешнего воздействия, т.е. напряжение (ток) источника энергии, подключенного к зажимам 1–1', будет изменяться по гармоническому закону. Причем частота источника изменяется в широких пределах, в идеальном случае от нуля до бесконечности. Наша задача состоит в том, чтобы определить такие характеристики линейного пассивного четырехполюсника, которые отражают изменение реакции цепи при изменении частоты внешнего воздействия.

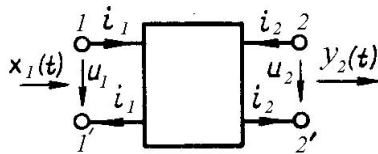


Рисунок 14.1

Комплексной частотной характеристикой цепи

называется отношение комплексных изображений реакции цепи к комплексному изображению внешнего воздействия:

$$H_{21}(j\omega) = \frac{\dot{Y}_{m2}}{\dot{X}_{m1}} = \frac{\dot{Y}_2}{\dot{X}_1},$$

здесь: $\dot{Y}_{m2} \triangleq \dot{y}_2(t)$, $\dot{Y}_2 = \dot{Y}_{m2}/\sqrt{2}$ – комплексные амплитуда и действующее значение реакции цепи; $\dot{X}_{m1} \triangleq \dot{x}_1(t)$, $\dot{X}_1 = \dot{X}_{m1}/\sqrt{2}$ – комплексные амплитуда и действующее значение внешнего воздействия; 2 – номер выходных зажимов, 1 – номер входных зажимов. Размерность комплексной частотной характеристика (КЧХ) равна отношению размерностей отклика цепи и внешнего воздействия. В зависимости от того, какие величины (токи или напряжения) рассматриваются в качестве откликов и внешних воздействий, КЧХ может иметь размерность сопротивления (внешнее воздействие – i_1 , реакция цепи – u_2), проводимости (внешнее воздействие – u_1 , реакция цепи – i_2) или быть безразмерной (внешнее воздействие – u_1 и реакция цепи – u_2 , либо внешнее воздействие – i_1 и реакция цепи – i_2).

Как и всякое комплексное число, КЧХ может быть записана в показательной форме записи:

$$H_{21}(j\omega) = H_{21}(\omega) e^{j\varphi_{21}(\omega)} = \frac{Y_2 e^{j\psi_2}}{X_1 e^{j\psi_1}} = \frac{Y_2}{X_1} e^{j(\psi_2 - \psi_1)},$$

где $H_{21}(\omega) = \frac{Y_2}{X_1}$ – **модуль КЧХ**, $\varphi_{21}(j\omega) = \psi_2 - \psi_1$ – **аргумент КЧХ**.

Таким образом, модуль КЧХ равен отношению амплитуд или действующих значений отклика цепи и внешнего воздействия, а ее аргумент представляет собой разность начальных фаз отклика и внешнего воздействия.

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) называется зависимость модуля КЧХ H_{21} от частоты ω .



Фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) называется зависимость аргумента КЧХ φ_{21} от частоты ω .

Таким образом, КЧХ сочетает в себе амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики. При графическом представлении комплексных частотных характеристик цепи обычно строят отдельно АЧХ и ФЧХ.

Комплексные частотные характеристики делятся на входные и передаточные.

Входной называется такая КЧХ, которая устанавливает связь между откликом и внешним воздействием на *одних и тех же* зажимах цепи. К входным характеристикам относятся:

- ✓ $H_{11}(j\omega) = Z_{11}(j\omega) = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$ – входное комплексное сопротивление цепи;
- ✓ $Y_{11}(j\omega) = \dot{I}_1 / \dot{U}_1$ – входная комплексная проводимость цепи.

Передаточной называется такая КЧХ, которая устанавливает связь между откликом и внешним воздействием на *различных* зажимах цепи. К передаточным характеристикам относятся:

- ✓ $K_{21}(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$ – комплексный коэффициент передачи по напряжению;
- ✓ $G_{21}(j\omega) = \dot{I}_2 / \dot{I}_1$ – комплексный коэффициент передачи по току;
- ✓ $Z_{21}(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{I}_1$ – комплексное передаточное сопротивление;
- ✓ $Y_{21}(j\omega) = \dot{I}_2 / \dot{U}_1$ – комплексное передаточное проводимость.

14.2 Комплексные частотные характеристики идеализированных двухполюсных элементов

Идеализированные пассивные двухполюсные элементы обладают только входными КЧХ в связи с тем, что у них имеется только одна пара внешних выводов. Поэтому нумеровать выводы в обозначениях КЧХ не будем.

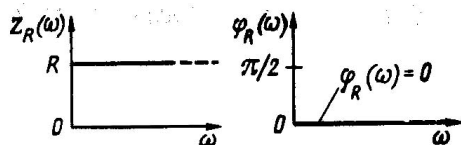


Рисунок 14.2

Сопротивление

Комплексное входное сопротивление этого элемента определяется выражением:

$$Z_R(j\omega) = \underline{Z}_R = R = \text{Re}^{j0}.$$

Модуль комплексного входного сопротивления $Z_R(\omega)$ и его аргумент $\varphi_R(\omega)$ не зависят от частоты: $Z_R(\omega) = R$, $\varphi_R(\omega) = 0$. АЧХ и ФЧХ сопротивления представлены на рис. 14.2.

Индуктивность

Комплексное входное сопротивление этого элемента определяется выражением:

$$Z_L(j\omega) = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2}.$$

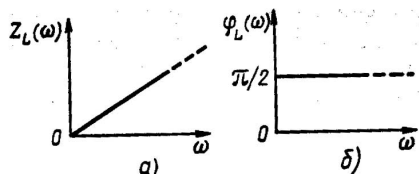


Рисунок 14.3

АЧХ сопротивления индуктивности: $Z_L(\omega) = \omega L$, ФЧХ: $\varphi_L = \pi/2$, т.е. модуль входного сопротивления индуктивности линейно возрастает с ростом частоты, а аргумент равен $\pi/2$ и не зависит от частоты (рис. 14.3).

Емкость

Комплексное входное сопротивление емкости определяется выражением:

$$Z_C(j\omega) = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2}.$$

Отсюда модуль $Z_C(\omega) = 1/\omega C$, а аргумент $\varphi_C(\omega) = \pi/2$. АЧХ и ФЧХ комплексного сопротивления емкости представлены на рис. 14.4. Из рисунка видно, что с увеличением частоты модуль входного сопротивления емкости уменьшается и стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. При $\omega \rightarrow 0$ $Z_C(\omega) \rightarrow \infty$. Аргумент комплексного входного сопротивления емкости равен $-\pi/2$ и от частоты не зависит.

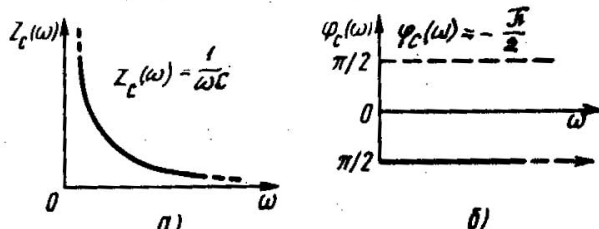


Рисунок 14.4

14.3 Комплексные частотные характеристики цепей с одним энергоемким элементом

Рассмотрим КЧХ простейших цепей (рис. 14.5, а, б), являющихся двусторонними и поэтому обладающими как входными, так и передаточными характеристиками. Обобщенная

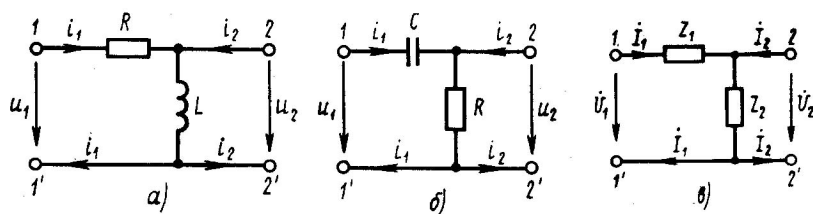


Рисунок 14.5

комплексная схема этих цепей приведена на рис. 14.5 в. Комплексное входное сопротивление цепей со стороны зажимов 1–1' зависит от сопротивления нагрузки, подключенного к зажимам 2–2'. Наиболее интересный случай, когда

сопротивление нагрузки равно нулю (режим короткого замыкания) и когда сопротивление нагрузки бесконечно велико (режим холостого хода).

- В режиме холостого хода:

$$\text{входное сопротивление цепи } Z_{11}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

$$\text{комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению } K_{21}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2},$$

здесь $\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{Z}_2$. Цепи такого типа получили название **делителей напряжения**,

т.к. приложенное к цепи напряжение делится пропорционально сопротивлениям, образующим делитель ($\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$).

- В режиме короткого замыкания:

$$\text{входное сопротивление цепи } Z_{11}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_1, \text{ коэффициент передачи по напряжению}$$

$$K_{21}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = 0.$$

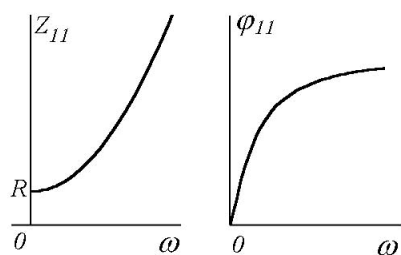


Рисунок 14.6

Определим в качестве примера комплексное входное сопротивление и комплексный коэффициент передачи в режиме холостого хода на выходе цепи, схема которой приведена на рис. 14.5, а. Находим АЧХ и ФЧХ входного сопротивления цепи:

$$Z_{11}(j\omega) = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctg(\omega L/R)}$$

$$\text{АЧХ: } Z_{11}(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \text{ФЧХ: } \varphi_{11}(\omega) = \arctg(\omega L/R).$$

Качественно эти зависимости отображены на рис. 14.6.

Найдем АЧХ и ФЧХ комплексного коэффициента передачи по напряжению для цепи на рисунке 14.5,а:

$$K_{21}(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 - j \frac{R}{\omega L}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}} e^{j \arctg \frac{R}{\omega L}}.$$

$$\text{АЧХ: } K_{21}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}, \quad \text{ФЧХ: } \varphi_{21}(\omega) = \arctg \frac{R}{\omega L}.$$

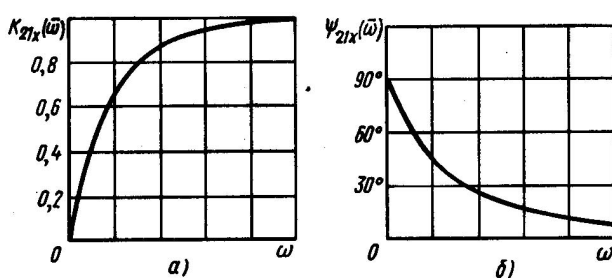


Рисунок 14.7

Качественно эти зависимости отображены на рис. 14.7. На сравнительно низких частотах, когда полное сопротивление индуктивности существенно меньше R , входное сопротивление цепи имеет характер, близкий к резистивному, а входной ток цепи $\dot{I}_1$ совпадает по фазе с напряжением $\dot{U}_1$. Распределение напряжения между плечами делителя напряжения пропорционально

сопротивлению этих плеч, поэтому падение напряжения на индуктивности L_2 весьма мало, т.е. модуль коэффициента передачи по напряжению близок к нулю. Напряжение на индуктивности $\dot{U}_2$ опережает по фазе ток индуктивности $\dot{I}_1$, а, следовательно, и входное напряжение $\dot{U}_1$ на угол, близкий к $\pi/2$. С ростом частоты сопротивление индуктивности увеличивается и вследствие этого распределение напряжений между плечами делителя изменяется. На достаточно высоких частотах практически все входное напряжение оказывается приложенным к индуктивности, поэтому модуль коэффициента передачи по напряжению $K_{21}(\omega)$ в этом случае близок к единице, а аргумент $\varphi_{21}(\omega)$ – к нулю.

14.4 Понятие о резонансе в электрических цепях

Амплитудно-частотные характеристики пассивных линейных цепей с одним реактивным элементом имеют вид монотонно изменяющихся кривых. Поэтому амплитуда отклика таких цепей также монотонно изменяется при увеличении или уменьшении частоты внешнего воздействия. Более сложный характер имеют процессы в электрических цепях, содержащих реактивные элементы различных типов (L и C). Амплитуда отклика таких цепей может резко изменяться, когда частота внешнего воздействия достигает некоторых определенных значений.

Резонанс – явление резкого возрастания амплитуды отклика цепи при приближении частоты внешнего воздействия к определенному значению. В этом случае резонанс условно называется **амплитудным**.

Фазовый резонанс – такой режим работы электрической цепи, содержащей емкости и индуктивности, при котором реактивные составляющие входного сопротивления и проводимости цепи равны нулю.

В теории цепей под резонансом понимают именно **фазовый резонанс**.

Резонансная частота – частота внешнего воздействия, соответствующая фазовому резонансу.

На резонансной частоте входные сопротивления и проводимость электрической цепи, содержащей емкости и индуктивности, имеют чисто резистивный характер, мнимая часть комплексного сопротивления равна нулю, а входной ток совпадает по фазе с приложенным напряжением. Простейшей цепью, в которой наблюдается явление резонанса, является **одиночный колебательный контур**, представляющий собой замкнутую цепь, состоящую из конденсатора и катушки индуктивности. В зависимости от способа подключения источника энергии различают «последовательный» колебательный контур (источник энергии включен последовательно с конденсатором и катушкой индуктивности) и «параллельный» колебательный контур (источник энергии включен параллельно реактивным элементам).



15 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

15.1 Элементы контура и их схемы замещения

Последовательный колебательный контур представляет собой электрическую цепь, содержащую катушку индуктивности и конденсатор, включенные последовательно с источником электрической энергии. Его принципиальная схема представлена на рисунке 15.1,а. Для анализа процессов, протекающих в контуре, перейдем от его принципиальной схемы к эквивалентной путем замены каждого реального элемента его эквивалентной схемой (рис.

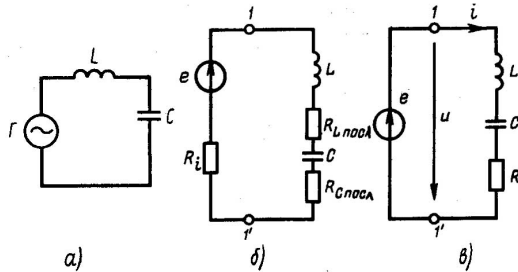


Рисунок 15.1

15.1,б). Параллельное соединение емкости и сопротивления утечки R_{ym} преобразуем в эквивалентное последовательное соединение на резонансной частоте и не будем учитывать внутреннее сопротивление источника. В результате получим упрощенную эквивалентную схему последовательного колебательного контура (рис. 15.1,в), где сопротивление R учитывает все виды потерь в катушке индуктивности и конденсаторе и носит название **сопротивление потерь контура**.

Далее будем рассматривать именно эту упрощенную схему.

15.2 Резонансная частота, характеристическое сопротивление и добротность контура

Комплексное сопротивление исследуемой цепи (рис. 15.1,в) запишем в следующем виде:

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

По определению резонанса, мнимая составляющая входного сопротивления последовательного колебательного контура должна быть равна нулю, когда угловая частота внешнего воздействия ω равна резонансной частоте контура ω_0 :

$$\text{Im}[\underline{Z}] = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0, \text{ отсюда резонансная частота:}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

На резонансной частоте полное сопротивление емкости равно полному сопротивлению индуктивности:

$$\frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L = \rho.$$

Величина ρ носит название **характеристического сопротивления контура**.

Характеристическое сопротивление контура – это полное сопротивление каждого из реактивных элементов контура на резонансной частоте. Из последнего выражения:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

На резонансной частоте входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер и равно сопротивлению потерь:

$$\underline{Z}|_{\omega=\omega_0} = R.$$

Действующее значение тока контура на резонансной частоте $I = U/R$, где U – действующее значение напряжения на контуре. Найдем действующие значения напряжений на реактивных элементах контура на резонансной частоте: $U_C|_{\omega=\omega_0} = U_L|_{\omega=\omega_0} = \rho I$.

Добротностью контура называется отношение действующего значения напряжения на реактивном элементе контура к действующему значению напряжения на контуре на резонансной частоте:

$$Q = \frac{U_L}{U}|_{\omega=\omega_0} = \frac{U_C}{U}|_{\omega=\omega_0} = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}.$$

Как правило, добротность колебательных контуров современной радиотехнической аппаратуры лежит в пределах от нескольких десятков до нескольких сотен. Поэтому **в режиме последовательного резонанса напряжение на реактивных элементах контура во много раз превышает приложенное к контуру напряжение**. В связи с этим последовательный резонанс называют также **резонансом напряжений**. Как следует из последнего выражения, добротность контура растет с увеличением характеристического сопротивления контура и **с уменьшением сопротивления потерь**.

15.3 Входные характеристики последовательного колебательного контура

При рассмотрении комплексных частотных характеристик последовательный колебательный контур можно представить в виде четырехполюсника, у которого выходное напряжение снимается с реактивного элемента контура (рис. 15.2). Таким образом, последовательный колебательный контур обладает как входными, так и передаточными характеристиками. В качестве входной характеристики контура будем рассматривать его комплексную входную проводимость в режиме холостого хода выходных зажимов:

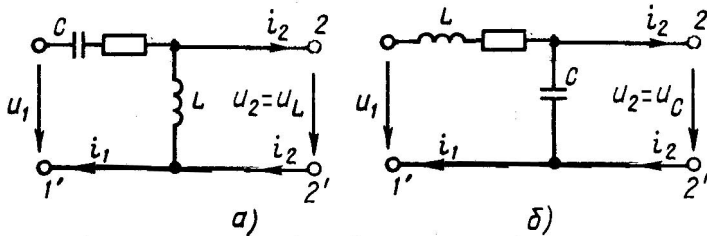


Рисунок 15.2

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{-j \arctg\left(\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)/R\right)} = \\ &= \frac{1}{R\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}} e^{j \arctg(Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega))} = Y(\omega) e^{j\alpha(\omega)}, \end{aligned}$$

где $Y(\omega)$, модуль комплексной частотной характеристики, – АЧХ; $\alpha(\omega)$, аргумент комплексной частотной характеристики – ФЧХ. Приведем также АЧХ и ФЧХ комплексного входного сопротивления контура:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= 1/Y(\omega) = R\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}, \\ \varphi(\omega) &= -\alpha(\omega) = \arctg(Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)). \end{aligned}$$

АЧХ и ФЧХ комплексной входной проводимости цепи приведены на рис. 15.3, а АЧХ и ФЧХ комплексного входного сопротивления цепи – на рис. 15.4

Если контур настроен на частоту источника, то мнимые составляющие сопротивления емкости и

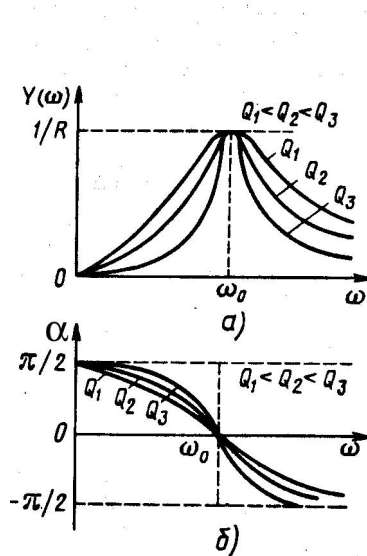


Рисунок 15.3

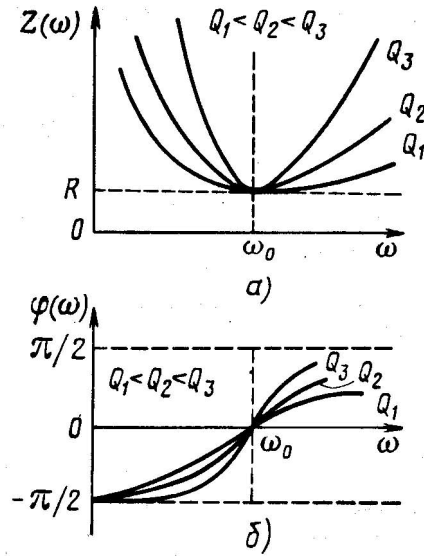


Рисунок 15.4

индуктивности взаимно компенсируются, входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер и минимально по модулю, а полная входная проводимость достигает максимального значения и равна $1/R$. Всякое отклонение частоты внешнего воздействия от резонансной приводит к нарушению баланса между мнимыми составляющими сопротивления емкости и индуктивности, что в свою очередь вызывает увеличение модуля входного сопротивления, уменьшение модуля входной проводимости и отклонение аргументов входной проводимости и входного сопротивления от нулевого значения. Из рисунка видно, что чем выше добротность Q , тем более заметно выражен максимум $Y(\omega)$ на резонансной частоте и более резко изменяется $a(\omega)$ вблизи ω_0 . На частоте внешнего воздействия ниже резонансной сопротивление контура имеет резистивно-емкостной характер ($-\pi/2 < \varphi < 0$). На частоте выше резонансной мнимая составляющая входного сопротивления емкости характер сопротивления цепи – резистивно-индуктивный ($0 < \varphi < \pi/2$). Комплексные частотные характеристики входной проводимости, приведенные на рис. 15.3, имеют чисто качественный характер, и неудобны для практического использования, т.к. содержат большое число параметров, причем для каждого сочетания R , Q и ω_0 необходимо строить отдельные кривые. Поэтому на практике обычно применяют нормированные входные характеристики, которые позволяют в обобщенной форме построить кривые для всех возможных сочетаний значений параметров. В качестве аргумента используется **обобщенная расстройка**:

$$\xi = \frac{x}{r} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

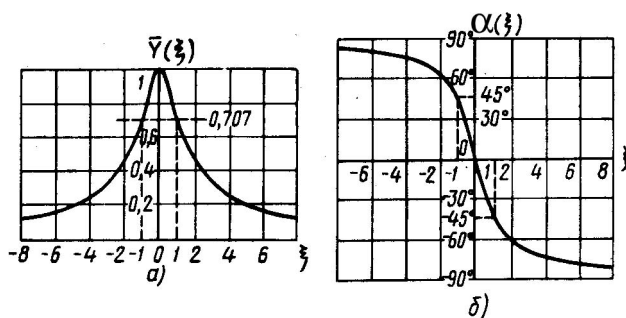


Рисунок 15.5

На резонансной частоте $\xi = 0$, на частотах ниже резонансной $\xi < 0$, на частотах выше резонансной $\xi > 0$. Комплексная входная проводимость $Y(j\omega)$ и ее модуль $Y(\omega)$ обычно нормируются по значению, которое они принимают на резонансной частоте. АЧХ и ФЧХ комплексной проводимости в

нормированном виде и в функции обобщенной расстройки записываются в следующем виде (рис. 15.5):

$$\bar{Y}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} - \text{АЧХ}, \quad \alpha(\xi) = -\arctg \xi - \text{ФЧХ}.$$

15.4 Передаточные характеристики последовательного колебательного контура

Найдем коэффициенты передачи контура по напряжению для случаев, когда напряжение снимается с индуктивности (рис. 15.2,а) и с емкости (рис. 15.2,б) при холостом ходе выходных зажимов. Используя правило делителя напряжения:

$$K_L(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{i_2=0} = \underline{Z}_L / \underline{Z} = \underline{Z}_L Y(j\omega) = j\omega L Y(j\omega) = Q \frac{\omega}{\omega_0} \bar{Y}(\omega) e^{j(\alpha(\omega)+\pi/2)},$$

$$K_C(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{i_2=0} = \underline{Z}_C / \underline{Z} = \underline{Z}_C Y(j\omega) = -j \frac{1}{\omega C} Y(j\omega) = Q \frac{\omega_0}{\omega} \bar{Y}(\omega) e^{j(\alpha(\omega)-\pi/2)},$$

откуда можно определить АЧХ и ФЧХ коэффициентов передачи по напряжению (рис. 15.6):

$$\begin{aligned} K_C(\omega) &= \omega_0 Q \bar{Y}(\omega) / \omega, \quad \psi_C(\omega) = \alpha(\omega) - \pi/2; \\ K_L(\omega) &= Q \omega \bar{Y}(\omega) / \omega_0, \quad \psi_L(\omega) = \alpha(\omega) + \pi/2. \end{aligned}$$

Как следует из определения добротности, на резонансной частоте ($\omega = \omega_0$) действующее значение напряжения на емкости равно действующему значению напряжения на индуктивности и в добротность раз превышает напряжение на входе контура, поэтому $K_L(\omega_0) = K_C(\omega_0) = Q$. При $\omega = 0$ сопротивление емкости бесконечно велико, напряжение на емкости $\dot{U}_2 = \dot{U}_1$, напряжение на индуктивности равно нулю. Поэтому $K_L(0) = 0$, $K_C(0) = 1$. На высоких частотах ($\omega \rightarrow \infty$) сопротивление индуктивности бесконечно велико, поэтому напряжение $\dot{U}_1$ оказывается практически полностью приложенным к индуктивности, а напряжение на емкости равно нулю. Таким образом, $K_L(\infty) = 1$, $K_C(\infty) = 0$. В узком диапазоне частот, близких к резонансной, можно положить $\omega/\omega_0 \approx 1$, эти зависимости почти совпадают друг с другом, т.е.

$$K_L(\infty) \approx K_C(\infty) \approx Q \bar{Y}(\omega).$$

$\bar{K}_L(\omega) \approx \bar{K}_C(\omega) \approx K(\omega)/Q = \bar{Y}(\omega)$. Таким образом, нормированную входную проводимость контура $\bar{Y}(\omega)$ можно рассматривать как нормированную реакцию

последовательного колебательного контура на воздействие в виде источника э.д.с. с изменяющейся частотой и неизменной амплитудой в режиме холостого хода выходных зажимов.

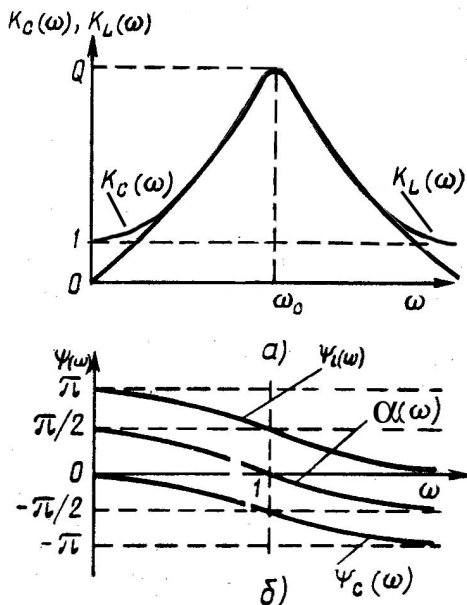


Рисунок 15.6

15.5 Избирательные свойства последовательного колебательного контура

Важнейшая особенность последовательного колебательного контура заключается в том, что амплитуда реакции контура на гармоническое воздействие существенно зависит от частоты. Если на вход контура подать сумму гармонических колебаний различных частот, имеющих одинаковые амплитуды, то на выходе можно обнаружить, что амплитуды колебаний, частота которых близка к резонансной значительно превышают амплитуды колебаний, частоты которых отличаются от резонансной. Контур как бы «пропускает» колебания одних частот и не пропускает колебания других частот.

Избирательностью называется способность электрической цепи выделять колебания отдельных частот из суммы колебаний различных частот.

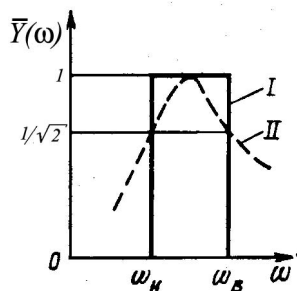


Рисунок 15.7

В идеальном случае отклик избирательной цепи должен иметь постоянное значение в пределах определенного диапазона частот, называемого **полосой пропускания** цепи, и быть равным нулю за пределами этого диапазона. Нормированная АЧХ идеальной избирательной цепи должна иметь прямоугольную форму (рис. 15.7, кривая I). АЧХ реальных избирательных цепей, в том числе и АЧХ последовательного избирательного контура отличаются от характеристик идеальной избирательной цепи (рис. 15.7, кривая II) отсутствием резкой границы между диапазонами пропускаемых и задерживаемых (подавляемых) частот. Очевидно, избирательные свойства реальных цепей будут тем выше, чем ближе к прямоугольной будет форма их нормированной АЧХ.

Полоса пропускания реальных избирательных устройств условно определяется как диапазон частот, в пределах которого амплитуда отклика цепи не падает ниже уровня $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ от максимального значения.

Избирательные свойства последовательного колебательного контура определяются формой нормированной АЧХ входной проводимости контура $\bar{Y}(\omega)$. На резонансной частоте нормированная входная проводимость контура равна единице. Определим значение обобщенной расстройки ξ_{zp} и угловой частоты ω_{zp} , соответствующие границам полосы пропускания контура.

Нормированная входная проводимость контура $\bar{Y}(\xi) = 1/\sqrt{1+\xi^2}$, а нормированная проводимость на граничной частоте полосы пропускания $\bar{Y}(\xi_{zp}) = 1/\sqrt{2}$, откуда

$$1/\sqrt{2} = 1/\sqrt{1+\xi_{zp}^2} \Rightarrow \xi_{zp} = \pm 1.$$

Меньшее значение обобщенной расстройки $\xi_H = -1$ соответствует нижней границе полосы пропускания, большее $\xi_B = 1$ — верхней. Следовательно, на границах полосы пропускания аргумент входной проводимости контура равен $\pm \pi/4$. Т.е. сдвиг фаз между током и напряжением равен $\pm \pi/4$. Напомним, что $\xi = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$. Если подставить в это выражение

нижнюю границу полосы пропускания, то надо приравнять его к -1 , а если верхнюю границу полосы пропускания — то к 1 :

$$-1 = Q\left(\frac{\omega_H}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_H}\right), \quad 1 = Q\left(\frac{\omega_B}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_B}\right).$$

Решая эти уравнения, найдем ω_H и ω_B :

$$\omega_H = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \right), \quad \omega_6 = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \right).$$

Ширина полосы пропускания контура пропорциональна резонансной частоте и обратно пропорциональна добротности контура:



$$2\Delta\omega_0 = \omega_6 - \omega_H = \frac{\omega_0}{Q}.$$

15.6 Влияние внутреннего сопротивления источника энергии и сопротивления нагрузки на избирательные свойства колебательного контура

Пусть контур питается от источника энергии с конечным внутренним сопротивлением R_i (рис. 15.8,а). Очевидно, что включенные последовательно сопротивления R_i и R можно заменить одним эквивалентным сопротивлением $R_{экв} = R_i + R$. Добротность контура с таким сопротивлением потерь определится выражением:

$$Q_{экв} = \frac{\rho}{R_{эк}} = \frac{\rho}{R + R_i} = \frac{Q}{1 + \frac{R_i}{R}},$$

где $Q = \rho R$ – добротность контура без учета сопротивления источника. В связи с уменьшением добротности контура его полоса пропускания расширится, избирательные свойства ухудшатся. **С целью повышения избирательных свойств контура желательно, чтобы источник энергии, к которому подключен контур, имел бы как можно меньшее внутреннее сопротивление.**

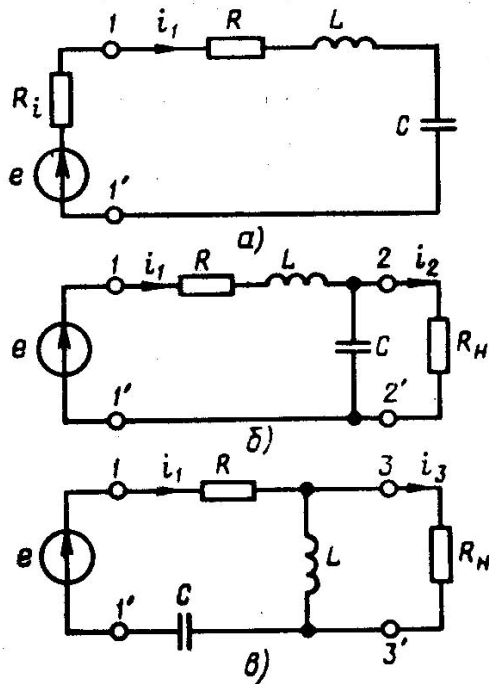


Рисунок 15.8

Пусть к выходным зажимам контура подключено сопротивление нагрузки ((рис. 15.8,б,в). Параллельное соединение реактивного элемента и R_H можно пересчитать в последовательное R'_H с помощью упрощенных формул, справедливых для случая, когда $R_{H2} \gg \frac{1}{\omega C}$, и $R_{H3} \gg \omega L$:

$$R'_{H2} \approx \frac{1}{\omega^2 C^2 R_{H2}}, \quad R'_{H3} \approx \omega^2 L^2 R_{H3}.$$

Величины R'_{H2} , R'_{H3} называются **внесенными в контур** сопротивлениями нагрузки. Если $R_{H2} = R_{H3} = R_H$, а частота близка к резонансной ($\omega = \omega_0$), то $R'_{H2} \approx R'_{H3} \approx \rho^2 / R_H \approx R'_H$.

Влияние R'_H на параметры контура аналогично влиянию внутреннего сопротивления

источника, т.е. с увеличением R'_H снижается эквивалентная добротность контура и ухудшается его избирательность:

$$Q_{эк2} = \frac{\rho}{R + R'_H} = \frac{\rho}{R + \rho^2 / R_H} = \frac{\rho}{R + Q\rho / R_H}.$$

Из последнего выражения следует, что **для увеличения эквивалентной добротности контура и улучшения его избирательности необходимо, чтобы сопротивление нагрузки контура R_H было как можно больше**, т.е. чтобы на выходных зажимах был обеспечен режим работы, близкий к режиму холостого хода.

16 ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

16.1 Виды параллельных колебательных контуров

Параллельным колебательным контуром называется электрическая цепь, в которой катушки индуктивности и конденсаторы размещены в двух ветвях, подключенных параллельно источнику энергии. Принципиальные электрические схемы параллельных колебательных контуров различных видов приведены на рис. 16.1.

В простейшем случае параллельный колебательный контур содержит катушку индуктивности в одной из параллельных ветвей, а конденсатор – в другой (рис. 16.1,а). Такой

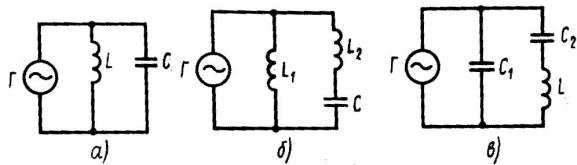


Рисунок 16.1

контур называется параллельным колебательным контуром **первого (основного)** вида. Параллельный контур **второго** (с неполным включением по индуктивности) вида содержит в одной ветви катушку индуктивности L_1 , а в другой – конденсатор C и катушку индуктивности L_2 (рис. 16.1,б); параллельный

колебательный контур **третьего** (с неполным включением по емкости) вида содержит в одной ветви катушку индуктивности L и конденсатор C_2 , а в другой – только конденсатор C_1 (рис. 16.1,в). При рассмотрении контуров ограничимся случаем, когда элементы контура имеют высокую добротность.

16.2 Параллельный колебательный контур основного вида

Эквивалентная схема параллельного колебательного контура основного вида представлена на (рис. 16.2,а). Заменяя

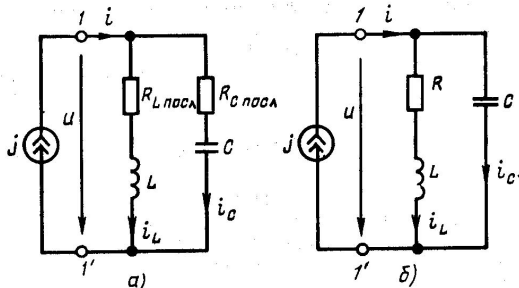


Рисунок 16.2

сопротивление потерь одним элементом, $R = R_L + R_C$ и пренебрегая внутренней проводимостью источника энергии, получим простейшую схему замещения параллельного контура основного вида (рис. 16.2,б). Найдем комплексное входное сопротивление параллельного контура основного вида:

$$\underline{Z} = \frac{(R_L + j\omega L) \left(R_C - j \frac{1}{\omega C} \right)}{(R_L + j\omega L) + \left(R_C - j \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

В связи с тем, что элементы контура имеют высокую добротность, т.е. $\omega_0 L \gg R_L$, $\frac{1}{\omega_p C} \gg R_C$, а частота внешнего воздействия немного отличается от резонансной, пренебрегая сопротивлением потерь в числителе, получим:

$$\underline{Z} = \frac{L/C}{(R_L + R_C) + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{\rho^2}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)},$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ – характеристическое сопротивление или сопротивление реактивного элемента контура на резонансной частоте, $R = R_L + R_C$ – сопротивление потерь имеют точно

такой же вид, как и у последовательного колебательного контура. Резонанс наступает, когда мнимая составляющая комплексного входного сопротивления равна 0:

$$\left(\omega L = \frac{1}{\omega C} \right) \Big|_{\omega=\omega_p} = 0, \text{ откуда: } \boxed{\omega_p = 1/\sqrt{LC}}.$$

Входное сопротивление контура на резонансной частоте носит чисто резистивный характер и определяется выражением:

$$\boxed{Z(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_p} = R_0 = \frac{\rho^2}{R}}.$$



Найдем действующее значение напряжения на зажимах контура, если задано действующее значение тока контура на резонансной частоте:

$$U = R_0 I = \rho^2 \frac{I}{R}.$$

Ток ветвей контура на резонансной частоте:

$$I_C \Big|_{\omega=\omega_p} \approx I_L \Big|_{\omega=\omega_p} \approx \frac{U}{\rho} = \frac{\rho I}{R} = QI,$$

где $Q = \rho/R$ – добротность контура.

Токи ветвей параллельного колебательного контура в Q раз превышает ток I , протекающий через источник тока на резонансной частоте. В связи с этим параллельный резонанс называют также **резонансом токов**.

Рассмотрим комплексные частотные характеристики параллельного колебательного контура основного вида.

При исследовании этих характеристик внешнее воздействие обычно задают в виде идеального источника тока, а в качестве реакции рассматривают напряжение на зажимах контура, либо ток в емкости или в индуктивности. Следовательно, параллельный колебательный контур имеет как входные, так и передаточные характеристики.

К входным характеристикам параллельного колебательного контура относят его комплексное входное сопротивление в режиме холостого хода, т.е. когда сопротивление нагрузки, подключенное параллельно контуру, стремится к бесконечности.

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{\rho^2}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R_0}{1 + j\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}} = \frac{R_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)} = \\ &= \frac{R_0}{1 + j\xi} = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j\arctg\xi} = R_0 \bar{Z}(\xi) e^{j\varphi(\xi)} \end{aligned}$$

Легко заметить, что $\bar{Z}(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ параллельного колебательного контура в точности повторяют выражения для $\bar{Y}(\xi)$ и $\alpha(\xi)$ последовательного колебательного контура. Поэтому амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики параллельного контура совпадают с нормированными АЧХ и ФЧХ последовательного колебательного контура. На частоте резонанса токов $\omega = \omega_p$ входное сопротивление параллельного колебательного контура имеет чисто резистивный характер ($\varphi = 0$), а модуль входного сопротивления достигает максимального значения $R_0 = \rho^2/R$. На частотах ниже резонансной входное сопротивление контура имеет резистивно-индуктивный характер ($0 < \varphi < \pi/2$), а частотах выше резонансной – резистивно-емкостной ($-\pi/2 < \varphi < 0$). На рис. 16.3 представлены зависимости полного

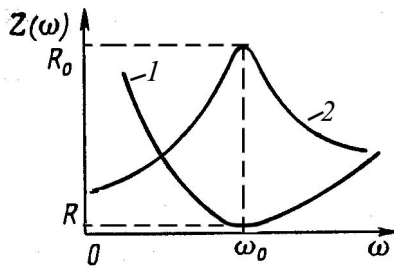


Рисунок 16.3

напряжению $K_L(\omega)$ и $K_C(\omega)$:

сопротивления последовательного (кривая 1) и параллельного (кривая 2) колебательных контуров от частоты. Можно заметить, что эти зависимости носят обратный характер, что является основным отличием между последовательным и параллельным колебательными контурами.

Можно показать, что выражения для коэффициента передачи параллельного колебательного контура по току $G_C(\omega)$ и $G_L(\omega)$ совпадают с выражениями для коэффициента передачи последовательного колебательного контура по

$$G_C(\omega) = \frac{I_C}{I} = Q \frac{\omega}{\omega_p} \bar{Z}(\omega);$$

$$G_L(\omega) = \frac{I_L}{I} = Q \frac{\omega_p}{\omega} \bar{Z}(\omega),$$

и иллюстрируются одними и теми же кривыми (см. рис. 15.6). О передаточных характеристиках параллельного колебательного контура можно сказать все то, что ранее говорилось о передаточных характеристиках последовательного колебательного контура. В частности, при высокой добротности контура на частотах, близких к резонансной, $G_L(\omega) \approx G_C(\omega) \approx Q \bar{Z}(\omega)$.

В связи с тем, что нормированные входные и передаточные характеристики последовательного и параллельного колебательных контуров совпадают, избирательные свойства этих контуров одинаковы. Ширина полосы пропускания параллельного колебательного контура определяется тем же выражением, что и последовательного:

$$2\Delta\omega_p = \omega_s - \omega_n = \frac{\omega_p}{Q}.$$

16.3 Влияние внутреннего сопротивления источника и сопротивления нагрузки на избирательные свойства параллельного колебательного контура

Поскольку внутреннее сопротивление источника и сопротивление нагрузки подключаются к параллельному колебательному контуру односторонне (параллельно, рис. 16.4), то и влияние их на избирательные свойства определяются одинаково.

Необходимо также, как мы делали раньше пересчитать параллельное соединение сопротивления R_i или R_n и реактивного элемента в последовательное соединение этого реактивного элемента и **вносимого сопротивления**. При этом ход рассуждений таков же, как при подключении сопротивления нагрузки в последовательном колебательном контуре. Вносимое сопротивление рассчитывается по той же формуле: $R'_n = \rho^2 / R_n$. Эквивалентная добротность контура определяется по формуле:

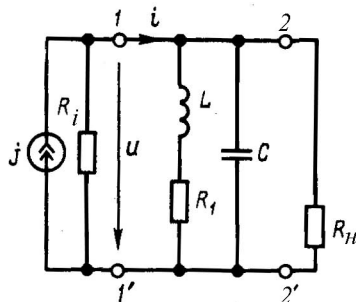
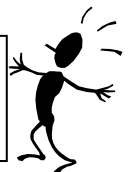


Рисунок 16.4

$$Q_{\text{эк}} = \frac{\rho}{R + R'_n} = \frac{\rho}{R + \rho^2 / R_n} = \frac{\rho}{R + Q\rho / R_n}$$



16.4 Параллельный колебательный контур второго вида

Конструктивной особенностью колебательного контура этого вида является наличие в нем катушки индуктивности с отводом или со скользящим контактом (рис. 16.1,б). Секция с индуктивностью L_1 образует одну ветвь колебательного контура, а секция с индуктивностью L_2 и конденсатором C – другую (рис. 16.5). Таким образом, катушка индуктивности не полностью входит в первую ветвь контура.

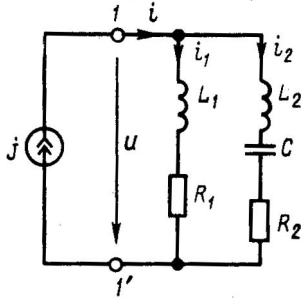


Рисунок 16.5

Коэффициент включения индуктивности p_L – это отношение модуля комплексного сопротивления части индуктивности L_1 к модулю комплексного сопротивления всей индуктивности L , $p_L = \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{L_1}{L}$, где $L = L_1 + L_2$. Коэффициент

включения может изменяться от нуля до единицы: $0 < p_L < 1$.

В связи с тем, что одна из ветвей параллельного колебательного контура с неполным включением по индуктивности представляет собой последовательный колебательный контур (L_2, C), то **в контуре второго вида наряду с резонансом токов имеет место резонанс напряжений**. Этот вид контура относится к сложным колебательным контурам. Очевидно, что частота резонанса напряжений ω_0 должна быть выше, чем частота резонанса токов ω_p , т.к. для выполнения условия резонанса токов необходимо, чтобы сопротивление ветви, содержащей L_2 и C , носило емкостной характер, что, как известно, имеет место только на частотах ниже частоты резонанса напряжений.

Для анализа используем эквивалентную схему контура, представленную на рис. 16.5. Сопротивления $R_1 = R_{L1}$ и $R_2 = R_{L2} + R_C$ представляют собой соответственно сопротивление потерь катушки индуктивности L_1 , а также суммарное сопротивление потерь катушки индуктивности L_2 и конденсатора C . Комплексное входное сопротивление рассматриваемого контура определяется выражением:

$$Z(j\omega) = \frac{(R_1 + j\omega L_1) \left(R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{(R_1 + j\omega L_1) + \left(R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)}.$$

Если элементы обладают высокой добротностью, последнее выражение можно привести к более простому виду:

$$Z(j\omega) = \frac{\omega L_1 \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L_2 \right)}{(R_1 + R_2) + j \left(\omega L_1 + \omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

На частоте резонанса токов мнимая составляющая этого комплексного сопротивления должна быть равна нулю, что возможно при выполнении следующего условия:

$$\omega_p L_1 = \frac{1}{\omega_p C} - \omega_p L_2.$$

Решая это уравнение находим выражение для частоты резонанса токов:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Таким образом, **частота резонансов токов не зависит от коэффициента включения индуктивности и совпадает с резонансной частотой параллельного колебательного контура основного вида**, построенного из тех же элементов, что и рассматриваемый контур.

Частота резонанса напряжений зависит от коэффициента включения индуктивности:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} = \frac{1}{\sqrt{CL \frac{L-L_1}{L}}} = \frac{1}{\sqrt{CL(1-p_L)}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-p_L}}.$$

Найдем сопротивление контура II вида на резонансной частоте ω_p учитывая, что

$$\omega_p L_1 = \frac{1}{\omega_p C} - (\omega_p L_2), \text{ где } L_1 = p_L L,$$

запишем:

$$R_0(p_L) = Z(\omega_p) = \frac{(\omega_p L_1)^2}{R_1 + R_2} = \frac{(\omega_p L)^2 p_L^2}{R} = \frac{\rho^2 p_L^2}{R} = R_0 p_L^2,$$



$$R_0(p_L) = R_0 p_L^2$$

где $R = R_1 + R_2$ и $\rho = \omega_p L$ – суммарное сопротивление потерь и характеристическое сопротивление контура, R_0 – резонансное сопротивление параллельного контура основного вида.

Таким образом, резонансное сопротивление контура с неполным включением индуктивности $R_0(p_L)$ меньше, чем резонансное сопротивление контура основного вида R_0 и

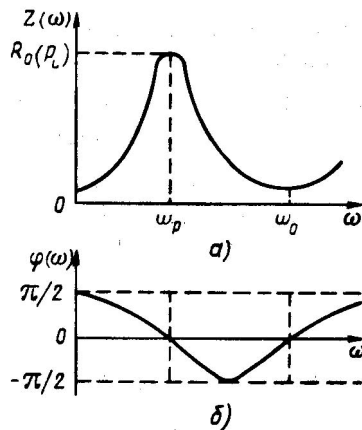


Рисунок 16.6

зависит от коэффициента включения. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики параллельного колебательного контура второго вида приведены на рис. 16.6. На частоте резонанса токов сопротивление контура достигает максимального значения $R_0(p_L)$ и имеет чисто резистивный характер. На частотах ниже ω_p входное сопротивление контура определяется в основном сопротивлением ветви с L_2 и имеет резистивно-индуктивный характер. На частотах выше ω_p входное сопротивление контура определяется параметрами ветви L_2, C .

Важнейшие параметры параллельного колебательного контура второго вида (частота резонанса тока, характеристическое сопротивление и добротность) **не зависят от коэффициента включения индуктивности p_L** . В тоже время **резонансное сопротивление контура является функцией p_L** . Эта особенность параллельного контура используется для согласования его с источником энергии. Согласование осуществляется перемещением коэффициента включения контура, причем настройка его при этом не меняется.

Наличие минимума АЧХ используется для подавления колебаний частот, близких к ω_0 рассматриваемого контура.

16.5 Параллельный колебательный контур третьего вида

Колебательный контур этого вида по своим свойствам в значительной степени подобен параллельному колебательному контуру второго вида. Используя эквивалентную схему контура, приведенную на рисунке 16.7 а, также как и в предыдущем случае, нетрудно показать,

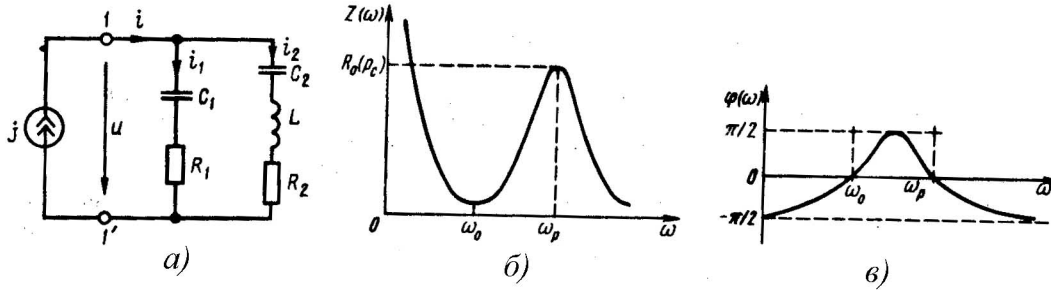


Рисунок 16.7

что частота резонанса токов ω_p характеристическое сопротивление ρ и добротность Q параллельного колебательного контура с неполным включением по емкости совпадают с резонансной частотой, характеристическим сопротивлением и добротностью параллельного колебательного контура основного вида, обладающего той же суммарной емкостью $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ и суммарным сопротивлением потерь $R = R_1 + R_2$. Частота резонанса напряжений ω_0 рассматриваемого контура определяется параметрами элементов второй ветви:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{C}{C_2}} = \omega_0 \sqrt{1 - p_C}$$

и зависит от коэффициента включения по емкости $p_C = C/C_1 = C_2/(C_1 + C_2)$.

Сопротивление контура с неполным включением емкости на резонансной частоте также, как и резонансное сопротивление контура второго вида, пропорционально квадрату коэффициента включения:

$$R_0(p_C) = \rho^2 p_C^2 / R = R_0 p_C^2.$$

АЧХ и ФЧХ входного сопротивления параллельного колебательного контура третьего вида приведены на рис. 16.7,б,в. На частотах ниже ω_0 входное сопротивление обеих ветвей контура имеет резистивно-емкостной характер; на частоте резонанса напряжений входное сопротивление имеет чисто резистивный характер и достигает минимального значения, определяемого в основном сопротивлением потерь второй ветви; на частотах $\omega_0 < \omega < \omega_p$ входное сопротивление контура имеет резистивно-индуктивный характер; при $\omega = \omega_p$ входное сопротивление имеет чисто резистивный характер и его модуль достигает максимального значения $R_0(p_C)$; на частотах выше частоты резонанса токов входное сопротивление контура определяется в основном параметрами первой ветви и имеет резистивно-емкостной характер.

17 СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

17.1 Общие представления о связанных контурах. Коэффициент связи

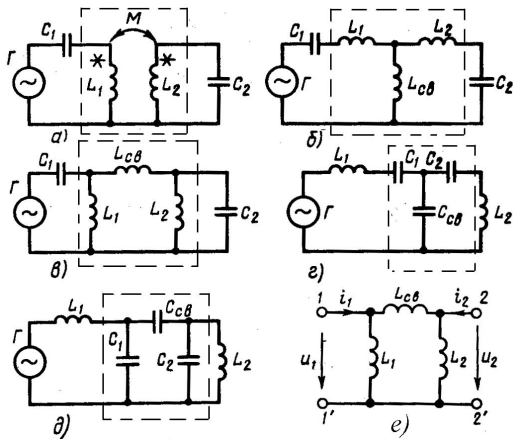


Рисунок 17.1

- а) – трансформаторная связь
- б) – внутрииндуктивная
- в) – внешнеиндуктивная
- г) – внутриемкостная
- д) – внешнеемкостная

Связанными называются два колебательных контура электрической цепи, если возбуждение колебаний в одном из них приводит к возникновению колебаний в другом. В зависимости от типа элемента, через который осуществляется взаимодействие между контурами, различают контуры с **трансформаторной**, **индуктивной**, **емкостной** и **комбинированной** (индуктивно-емкостной) связями. По способу включения элемента связи связанные контуры подразделяются на контуры с **внешней** связью и контуры с **внутренней** связью. Принципиальные электрические схемы связанных колебательных контуров некоторых типов приведены на рис. 17.1.

Первичным называется один из контуров, к которому подключен источник энергии. Остальные контура – вторичные.

Каждому типу связанных колебательных контуров можно поставить в соответствие так называемый четырехполюсник связи, выделенный на рис. 17.1 пунктирной линией.

Коэффициентом связи связанных контуров называется среднее геометрическое из коэффициентов передач K_{12} и K_{21} : $k_{cv} = \sqrt{K_{12}K_{21}}$, где $K_{21} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1|_{i_2=0}$ – коэффициент передачи из первичного контура во вторичный и равен коэффициенту передачи по напряжению соответствующего четырехполюсника связи; $K_{12} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2|_{i_1=0}$ – коэффициент передачи этого же четырехполюсника связи из вторичного контура в первичный.

Например, определим коэффициент связи колебательных контуров, связанных внешней индуктивной связью (рис. 17.1, в). Четырехполюсник связи отдельно представлен на рис. 17.1, е.

$$k_{cv} = \sqrt{\frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + j\omega L_{cv}} \frac{j\omega L_2}{j\omega L_2 + j\omega L_{cv}}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_1 + L_{cv}} \frac{L_2}{L_2 + L_{cv}}}.$$

Из приведенного выражения видно, что значение коэффициента связи не может превышать единицы.

Аналогично можно определить коэффициенты связи для любой из приведенных схем связанных колебательных контуров.

17.2 Настройка связанных контуров

Настройка системы связанных контуров заключается в выборе таких значений параметров элементов контуров, при которых ток вторичного контура достигает максимального значения при заданной частоте и действующем значении напряжения источника энергии.

Виды настройки:

- **настройка на первый частный резонанс** – осуществляется путем изменения параметров реактивных элементов, входящих только в первичный контур; параметры элементов, входящих во вторичный контур, и параметры элементов связи при настройке не изменяются;
- **настройка на второй частный резонанс** – осуществляется путем изменения параметров реактивных элементов, входящих только во вторичный контур;

параметры элементов, входящих в первичный контур, и параметры элементов связи при настройке не изменяются;

- **настройка на индивидуальный резонанс** – изменяются параметры реактивных элементов, входящих в разные контуры, при фиксированном значении сопротивления связи;
- **настройка на сложный резонанс** – вначале производится настройка на первый или второй частные резонансы с последующим выбором оптимального сопротивления связи;
- **настройка на полный резонанс** – выполняется в два этапа: на первом этапе связанные контуры настраиваются на индивидуальный резонанс, а затем выбирается оптимальное сопротивление связи между ними.

Следует отметить, что максимальное значение тока вторичного контура достигается при двух последних видах настройки. Наибольший практический интерес представляет настройка связанных контуров на полный резонанс.

17.3 Частотные характеристики связанных контуров

В качестве частотной характеристики связанных контуров рассматривается зависимость тока вторичного контура от частоты, когда параметры обоих контуров одинаковы. Анализ процессов, происходящих в связанных контурах дает зависимость нормированного тока вторичного контура в функции обобщенной расстройки в следующем виде:

$$\bar{I}_2 = I_2 / I_{\max} = 2A \sqrt{(1 - \xi^2 - A^2)^2 + 4\xi^2},$$



где A – **параметр связи**, равный произведению коэффициента связи и добротности связанных контуров: $A = k_{св}Q$; ξ – обобщенная расстройка.

Частотные характеристики связанных колебательных контуров при различных параметрах связи представлены на рис. 17.2. При слабой связи между контурами ($A < 1$)

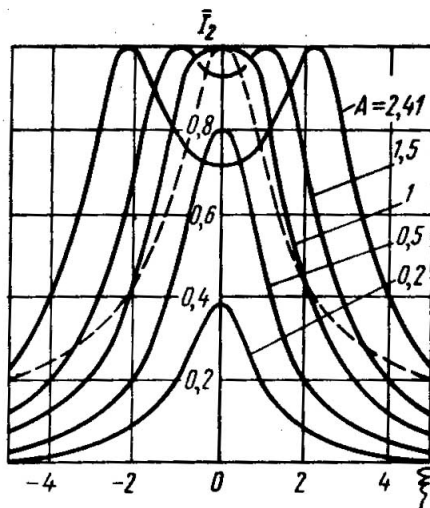


Рисунок 17.2

частотные характеристики $\bar{I}_2$ имеют вид «одногогорбых» кривых, причем максимальное значение тока вторичного контура на резонансной частоте ($\xi = 0$) меньше максимально возможного. С увеличением параметра связи до $A = 1$ значение тока $\bar{I}_2$ в максимуме увеличивается, а кривые остаются одногорбыми. При дальнейшем увеличении связи между контурами ток вторичного контура на резонансной частоте ($\xi = 0$) начинает уменьшаться, а частотные характеристики приобретают вид «двугорбых» кривых. Максимальное значение тока при этом достигается на **частотах связи**, соответствующих обобщенным расстройкам $\xi = \pm \sqrt{A^2 - 1}$. Физически существование двух максимумов на частотах связи объясняется тем, что в каждый из связанных контуров из другого вносится

вносимое сопротивление, которое практически является чисто реактивным и приводит к взаимной расстройке контуров. На рис. 17.2 пунктирной линией показана частотная характеристика одиночного колебательного контура. По сравнению с одиночными

колебательными контурами, связанные контуры обладают существенно лучшими избирательными свойствами: форма их нормированных АЧХ ближе к прямоугольной и имеет большую крутизну склонов на границе полосы пропускания. Дополнительное удобство состоит в возможности плавно изменять ширину полосы пропускания за счет изменения коэффициента связи между контурами. Вышеперечисленные преимущества обусловили широкое применение связанных контуров в различных радиотехнических устройствах.