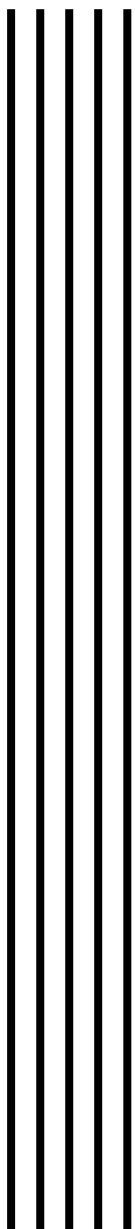


Севастопольский национальный технический университет

Кафедра радиотехники и телекоммуникаций



## **СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

**Севастополь  
2013 г.**

УДК 621.3.06 (075)

Зиборов С. Р. Синтез линейных радиотехнических дисциплин: Учебное пособие / С. Р. Зиборов. — Севастополь, Изд-во СевНТУ, 2013. — 92 с.

Излагаются основы синтеза линейных двухполюсников и четырехполюсников с сосредоточенными параметрами, а также пассивных и активных электрических фильтров.

Утверждено кафедрой радиотехники и телекоммуникаций в качестве учебного пособия для студентов, изучающих дисциплину “Синтез линейных радиотехнических цепей”  
Протокол № 5 от 23 января 2013 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                            |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Введение .....</b>                                                                                                                      | <b>5</b>  |
| <b>1. Постановка задач анализа и синтеза цепей .....</b>                                                                                   | <b>6</b>  |
| 1.1. Основные понятия теории цепей .....                                                                                                   | 6         |
| 1.2. Цели анализа и синтеза цепей .....                                                                                                    | 6         |
| 1.3. Основные характеристики линейных цепей .....                                                                                          | 7         |
| 1.4. Особенности задач синтеза линейных цепей .....                                                                                        | 9         |
| <b>2. Особенности решение задачи синтеза линейных цепей .....</b>                                                                          | <b>10</b> |
| 2.1. Этапы решение задачи синтеза линейных цепей .....                                                                                     | 10        |
| 2.2. Чувствительность характеристик цепей .....                                                                                            | 11        |
| 2.3. Нормирование величин в задачах синтеза цепей .....                                                                                    | 11        |
| <b>3. Свойства системных функций пассивных двухполюсников .....</b>                                                                        | <b>14</b> |
| 3.1. Особенности пассивных двухполюсников .....                                                                                            | 14        |
| 3.2. Полусно-нулевая диаграмма сопротивления и проводимости пассивного двухполюсника .....                                                 | 16        |
| 3.3. Свойства системных функций реактивных $LC$ -двухполюсников .....                                                                      | 17        |
| 3.4. Свойства системных функций пассивных $RL$ - и $RC$ -двухполюсников .....                                                              | 19        |
| <b>4. Синтез пассивных двухполюсников .....</b>                                                                                            | <b>20</b> |
| 4.1. Условия физической реализуемости пассивных двухполюсников .....                                                                       | 20        |
| 4.2. Разложение дробно-рациональной функции .....                                                                                          | 20        |
| 4.3. Входные функции элементарных пассивных двухполюсников .....                                                                           | 21        |
| 4.4. Методы реализации входных функций пассивных двухполюсников .....                                                                      | 22        |
| 4.5. Реализация сопротивления двухполюсника по первой форме Фостера .....                                                                  | 22        |
| 4.6. Реализация проводимости двухполюсника по второй форме Фостера .....                                                                   | 26        |
| 4.7. Реализация реактивного сопротивления по первой форме Фостера .....                                                                    | 29        |
| 4.8. Реализация реактивной проводимости по второй форме Фостера .....                                                                      | 31        |
| 4.9. Реализация реактивных сопротивлений и проводимостей по Кауэру .....                                                                   | 34        |
| <b>5. Свойства передаточных функций четырехполюсников .....</b>                                                                            | <b>37</b> |
| 5.1. Свойства передаточной функции реализуемого четырехполюсника .....                                                                     | 37        |
| 5.2. Особенности минимально-фазовых и неминимально-фазовых четырехполюсников .....                                                         | 38        |
| 5.3. Влияние расположения нулей и полюсов передаточной функции четырехполюсника на его частотные и временные характеристики .....          | 39        |
| 5.4. Свойство модуля комплексного коэффициента передачи реализуемого четырехполюсника .....                                                | 40        |
| 5.5. Определение передаточной функции минимально-фазового четырехполюсника по его АЧХ .....                                                | 41        |
| 5.6. Свойства передаточной функции неминимально-фазового четырехполюсника .....                                                            | 43        |
| <b>6. Синтез четырехполюсников .....</b>                                                                                                   | <b>47</b> |
| 6.1. Методы реализации четырехполюсников по заданной передаточной функции .....                                                            | 47        |
| 6.2. Реализация передаточных функций первого порядка .....                                                                                 | 49        |
| 6.3. Реализация передаточной функции второго порядка .....                                                                                 | 49        |
| 6.4. Особенности расположения нулей и полюсов передаточных функций пассивных лестничных четырехполюсников .....                            | 54        |
| 6.5. Реализация полиномиальной передаточной функции, имеющей отрицательные вещественные полюса .....                                       | 55        |
| 6.6. Свойства мостовых симметричных четырехполюсников с постоянным характеристическим сопротивлением .....                                 | 57        |
| 6.7. Реализация заданной передаточной функции мостовым симметричным четырехполюсником с постоянным характеристическим сопротивлением ..... | 61        |
| <b>7. Синтез электрических фильтров .....</b>                                                                                              | <b>63</b> |
| 7.1. Виды фильтров и предъявляемые к ним требования .....                                                                                  | 63        |
| 7.2. Характеристики неискажающего фильтра .....                                                                                            | 63        |

|                                                                                    |           |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 7.3. Особенности аппроксимирующих функций, используемые при синтезе фильтров ..... | 66        |
| 7.4. Синтез фильтра нижних частот Баттерворта .....                                | 69        |
| 7.5. Особенности полиномов Чебышева .....                                          | 72        |
| 7.6. Синтез фильтра нижних частот Чебышева .....                                   | 74        |
| 7.7. Денормирование по частоте параметров ФНЧ .....                                | 77        |
| 7.8. Метод синтеза фильтров по ФНЧ-прототипу .....                                 | 78        |
| 7.9. Синтез фильтра верхних частот по ФНЧ-прототипу .....                          | 80        |
| 7.10. Синтез полосового фильтра по ФНЧ-прототипу .....                             | 82        |
| 7.11. Синтез заграждающего фильтра по ФНЧ-прототипу .....                          | 85        |
| <b>Заключение .....</b>                                                            | <b>88</b> |
| <b>Библиографический список.....</b>                                               | <b>89</b> |
| <b>Приложение А Особенности фильтров с переключаемыми конденсаторами .....</b>     | <b>90</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина “Синтез линейных радиотехнических цепей” имеет своей целью изучение методов синтеза линейных двухполюсников, четырехполюсников и электрических фильтров

Изучение теории синтеза цепей предполагает знание студентами следующих дисциплин: “Физика”, “Высшая математика”, “Основы теории цепей”, “Сигналы и процессы в радиотехнике” и “Аналоговые электронные устройства”.

Дисциплина “Синтез линейных радиотехнических цепей” включает в себя курс лекций и лабораторные работы. Лабораторные работы выполняются на персональных компьютерах с использованием пакетов прикладных программ схемотехнического моделирования *Micro-Cap* и *Filtrer Solutions*.

Поскольку в настоящее время все более широкое применение находят фильтры с переключаемыми конденсаторами, то в приложении А приведены краткие сведения об особенностях таких фильтров.

# 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЦЕПЕЙ

## 1.1. Основные понятия теории цепей

В предшествующих дисциплинах уже встречались такие понятия, как сигнал, электрическая цепь, система, а также их основные характеристики.

Под *сигналом* в радиотехнике понимают физический процесс, используемый как переносчик информации, например, электромагнитное поле, электрический ток или напряжение и т.п.

*Линейной электрической цепью* (далее просто цепь) называется совокупность взаимосвязанных линейных электрических элементов (резисторов, конденсаторов, индуктивностей, источников тока и напряжения).

Графически цепи обычно представляют в виде принципиальных схем. Однако структуру цепи можно представить также в виде формул, ориентированных графов, словесных описаний, алгоритмов, компьютерных моделей. Выбор формы представления структуры цепи определяется исследователем, исходя из особенностей ее работы, удобства применения, используемых вычислительных средств и т.п.

## 1.2. Цели анализа и синтеза цепей

При рассмотрении цепей исходят из трех основных факторов:  
возбуждение (входной сигнал);  
реакция (выходной сигнал);  
цепь (совокупность взаимосвязанных элементов и их параметры).

В этой связи возникают две основные задачи:

- 1) определение характеристик цепи, если известны структура цепи и параметры ее элементов;
- 2) определение структуры цепи и параметров ее элементов, если задана одна из системных функций, т.е. соотношение между возбуждением и реакцией цепи.

Первую задачу называют *задачей анализа* (от греческого слова *analysis* — расчленение объекта на элементы) или просто *анализом*, вторую задачу — *задачей синтеза* (от греческого *synthesis* — соединение элементов в единое целое) или просто *синтезом* цепи.

*Анализ* цепи имеет своей целью определение реакция цепи на известное воздействие или воздействия на цепь по известной реакции. Поскольку под воздействием на электрическую цепь обычно понимают входное напряжение или ток, а под реакцией — выходное напряжение или ток, то анализ цепи заключается в расчете напряжений и токов этой цепи.

Анализ линейных электрической цепи составляет главное содержание дисциплины “Основы теории цепей”. При изучении этой дисциплины были рассмотрены следующие методы анализа:

- классический метод с использованием дифференциальных уравнений;
- метод комплексных амплитуд;
- спектральный метод;
- операторный метод;

метод интеграла Дюамеля и др.

*Синтез* цепи имеет своей целью определение структуры и параметров элементов цепи по заданной системной функции цепи. В этой связи необходимо проанализировать основные системные функции линейных цепей.

Соотношение между анализом и синтезом линейных цепей аналогично соотношению между следующими двумя задачами. В первой задаче известно устройство и надо разобраться с тем, как оно работает и что в нем происходит при работе. Во второй задаче известны соображения о том, как должно работать устройство, однако само устройство неизвестно, но его надо создать, исходя из имеющихся соображений. Понятно, что вторая задача существенно сложнее первой и является типичной задачей технического творчества. Поэтому изу-

чение методов синтеза линейных цепей способствует развитию творческого мышления, а используемые в этих методах операции находят широкое применение при решении изобретательских задач.

### 1.3. Основные характеристики линейных цепей

*Системной функцией* электрической цепи называют отношение реакции цепи к воздействию, вызвавшему эту реакцию.

Если системная функция цепи представляет собой отношение величин одинаковой размерности (двух токов или двух напряжений), то ее называют *передаточной функцией*.

Если системную функцию представляет собой отношение величин различной размерности (отношение напряжения к току или тока к напряжению), то ее называют *сопротивлением* или *проводимостью* цепи.

Если цепь представляет собой двухполюсник (рис. 1, а), то ее основной системной функцией является либо операторное сопротивление

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)},$$

либо операторная проводимость

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{I(p)}{U(p)}.$$

где  $p = \sigma + j\omega$  — комплексная переменная;  $\sigma$  и  $\omega$  — вещественные величины, являющиеся реальной и мнимой частями комплексной переменной  $p$  соответственно;  $U(p)$  и  $I(p)$  — изображения (по Лапласу) напряжения и тока двухполюсника.

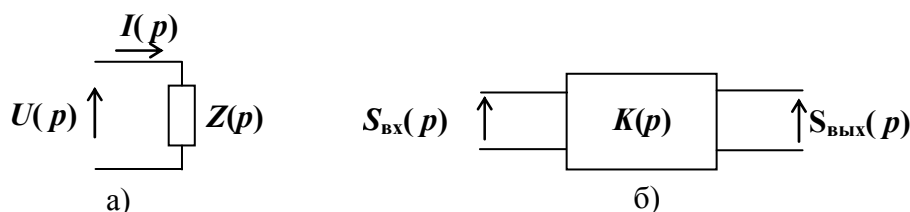


Рис. 1.1 — Обозначения двухполюсника и четырехполюсника

Сопротивление  $Z(p)$  и проводимость  $Y(p)$  двухполюсника называются его *входными функциями* и широко используются для синтеза двухполюсников.

В случае *пассивного двухполюсника* с сосредоточенными параметрами, содержащего только пассивные элементы  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , его сопротивление, можно представить в операторном виде

$$Z = R + pL + \frac{1}{pC}, \quad (1.1)$$

где  $R$ ,  $L$ ,  $C$  — эквивалентные сопротивление, индуктивность и емкость двухполюсника.

При  $p = j\omega$  уравнение (1.1) принимает вид

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}.$$

Из полученного выражения следует, что в цепи возможен резонанс — режим работы, при котором реактивные сопротивления индуктивности и емкости равны по модулю  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ , где  $\omega_0$  — резонансная частота, и компенсируют друг друга. В результате при резонансе сопротивление цепи носит активный характер  $Z = R$ .

Если цепь представляет собой четырехполюсник (рис. 1, б), то ее свойства могут быть описаны передаточной функцией

$$K(p) = S_{\text{вых}}(p)/S_{\text{вх}}(p), \quad (1.2)$$

где  $S_{\text{вых}}(p)$ ,  $S_{\text{вх}}(p)$  — изображения (по Лапласу) выходного и входного сигналов цепи, либо при  $p = j\omega$  комплексным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = S_{\text{вых}}(j\omega)/S_{\text{вх}}(j\omega).$$

где  $S_{\text{вых}}(j\omega)$ ,  $S_{\text{вх}}(j\omega)$  — спектральные плотности выходного и входного сигналов четырехполюсника.

Комплексный коэффициент передачи часто записывают в показательной форме

$$K(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1.3)$$

где  $K(\omega) = |K(j\omega)|$  — модуль комплексного коэффициента передачи, который обычно называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) четырехполюсника;  $\varphi(\omega) = \arg(K(j\omega))$  — аргумент комплексного коэффициента передачи, который называют фазочастотной характеристикой (ФЧХ) четырехполюсника.

Характеристики четырехполюсника во временной области представляют собой реакции четырехполюсника на стандартные воздействия:

единичный импульс  $\delta(t)$  (функцию Дирака);

единичную ступенчатую функцию  $1(t)$  (функцию Хэвисайда).

Реакция четырехполюсника на единичный импульс называется *импульсной характеристикой*  $h(t)$ , а на единичную ступенчатую функцию — *переходной характеристикой*  $g(t)$  четырехполюсника соответственно.

В рассматриваемой дисциплине объектами синтеза являются линейные двухполюсники и четырехполюсники. Двухполюсники обычно используют в качестве нагрузки различных устройств, а четырехполюсники — в качестве усилителей, аттенюаторов, электрических фильтров, согласующих устройств и т. п.

С учетом рассмотренных системных функций синтез двухполюсника состоит в определении его структуры и параметров элементов по заданному комплексному сопротивлению или комплексной проводимости.

Синтез линейных четырехполюсников развивался главным образом по двум направлениям:

синтез в частотной области, при котором по заданной частотной характеристике (АЧХ или ФЧХ) или системной функции ( $Z(p)$ ,  $Y(p)$ ,  $K(p)$  и др.) определяются структура цепи и параметры ее элементов;

синтез во временной области, когда структура и параметры элементов цепи определяются по заданной импульсной или переходной характеристике.

В настоящее время наибольшие успехи достигнуты в теории синтеза цепей в частотной области. Синтез цепей во временной области в данной дисциплине не рассматривается.



#### 1.4. Особенности задач синтеза линейных цепей

Задача синтеза линейной цепи отличается от задачи анализа некоторыми важными особенностями.

1. Задача синтеза может вообще не иметь решения тогда как задача анализа известной цепи всегда имеет решение, которое является единственным независимо от метода, используемого для получения решения. Например, нельзя синтезировать цепь, если заданная передаточная функция цепи не удовлетворяет требованию устойчивости и т.п.

2. Если задача синтеза является решаемой, то теоретически она может иметь бесконечное число решений в виде эквивалентных цепей или систем, каждая из которых является реализуемой и удовлетворяет заданным характеристикам.

2. При синтезе цепей достаточно часто встречаются ситуации, когда невозможно реализовать цепь с заданным набором характеристик, хотя существуют реальные системы, обеспечивающие эти характеристики по отдельности.

Однако, поскольку характеристики цепей взаимосвязаны, то часто удается улучшить одни характеристики цепи за счет допустимого ухудшения других характеристик. Например, в радиоизмерительных устройствах погрешность измерения, быстродействие и потребление энергии от источника информационного сигнала взаимосвязаны, поэтому одновременное улучшение всех указанных характеристик является физически невозможным. Аналогичная ситуация имеет место не только в радиотехнике, но и в других отраслях науки и техники.

## 2. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

### 2.1. Этапы решение задачи синтеза линейных цепей

Решение задачи синтеза линейных цепей включает следующие основные этапы:

- аппроксимация;
- реализация;
- оптимизация.

Если заданная функция цепи не реализуема, то на *этапе аппроксимации* выбирают реализуемую функцию, которая аппроксимирует заданную с допустимой погрешностью. Поскольку заданным требованиям может удовлетворять множество реализуемых аппроксимирующих функций, то этап аппроксимации может иметь множество решений. Если заданная функция цепи является реализуемой непосредственно, то переходят к реализации цепи, минуя этап аппроксимации.

На *этапе реализации* преобразуют заданную функцию или аппроксимирующую функцию к виду, позволяющему определить схему (структуру) цепи и параметры ее элементов с учетом ограничений выбранной элементной базы.

На *этапе оптимизации* выполняется целенаправленное изменение параметров элементов синтезированной цепи так, чтобы цепь удовлетворяла заданному критерию оптимальности. Обычно критерий оптимальности формулируется в виде целевой функции, минимум или максимум которой обеспечивает оптимальное значение одного или нескольких параметров цепи (например, минимальную чувствительность АЧХ цепи к изменению параметров элементов или максимальное затухание цепи в полосе задерживания на заданной частоте и т.п.). С этой точки зрения, задачу синтеза можно рассматривать как оптимизационную.

#### Пример 2.1

Пусть требуется выбрать функцию, аппроксимирующую АЧХ идеального полосно-пропускающего фильтра с граничными частотами  $\omega_{min}$  и  $\omega_{max}$ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- в полосе пропускания  $K_1 - \Delta K_1 \leq K(\omega) \leq K_1 + \Delta K_1$ , где  $\Delta K_1$  — допустимое отклонение АЧХ от заданного значения  $K_1$ ;
- в переходной полосе  $\Delta\omega_{\Pi}$  АЧХ должна монотонно убывать до значения  $K_2$ .

На рис. 2.1 изображена возможная аппроксимация АЧХ, которая удовлетворяет перечисленным выше требованиям и является реализуемой.

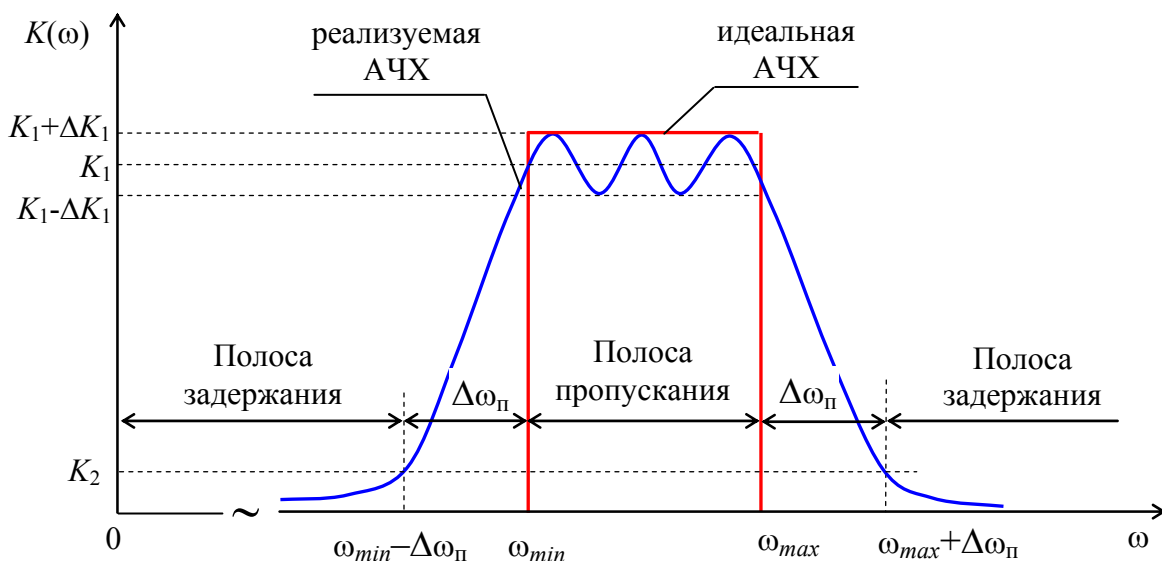


Рис. 2.1 — Область, в которой может находиться АЧХ синтезируемого фильтра

В рассмотренном примере аппроксимирующая функция имеет волновой характер в полосе пропускания фильтра и монотонно затухает за ее пределами.

С целью минимизации материальных затрат оптимизацию цепей выполняют, как правило, путем их предварительного моделирования на ЭВМ с помощью специальных программ.

В настоящее время теория синтеза линейных цепей достаточно хорошо разработана, но это не исключает возможности ее совершенствования и развития. В гораздо меньшей степени разработана теория синтеза нелинейных цепей.

## 2.2. Чувствительность характеристик цепей

Параметры элементов реальных цепей практически всегда отличаются от расчетных значений на некоторую величину, которая определяется как неточностью изготовления элементов, так и изменением их параметров под воздействие влияющих факторов (временное старение, температура, влажность и пр.). Указанные отличия вызывают изменение характеристик цепей. Поэтому на этапе реализации следует отдавать предпочтение цепям, допускающим большие отклонения параметров элементов при одном и том же отклонении характеристик цепи от заданных, т. е. являющихся менее чувствительными к изменению параметров элементов.

Величина, оценивающая устойчивость характеристик цепей и систем к отклонению параметров их элементов, называется *чувствительностью*. Различают относительную и полу-относительную чувствительности. Рассмотрим эти параметры на примере АЧХ фильтра.

*Относительная чувствительность* АЧХ к изменению некоторого параметра  $\alpha_i$  определяется по формуле

$$S_{\alpha_i}^{K(\omega)} = \lim_{\Delta\alpha_i \rightarrow 0} \frac{\Delta K(\omega)/K(\omega)}{\Delta\alpha_i/\alpha_i} = \lim_{\Delta\alpha_i \rightarrow 0} \frac{\gamma_K}{\gamma_{\alpha_i}}, \quad (2.1)$$

где  $\Delta K(\omega)$  — абсолютное приращение АЧХ;  $\Delta\alpha_i$  — абсолютное приращение параметра  $\alpha_i$ ;  $\gamma_K = \Delta K(\omega)/K(\omega)$ ,  $\gamma_{\alpha_i} = \Delta\alpha_i/\alpha_i$  — относительные изменения АЧХ и параметра соответственно.

*Полуотносительная чувствительность* АЧХ — это предел отношения абсолютного приращения АЧХ к относительному изменению параметра  $\alpha_i$ , вызвавшего это приращение.

Как правило, отклонения параметров элементов от их номинальных значений малы по величине, носят случайный характер и независимы друг от друга. Поэтому для оценки *интегральной (полной) чувствительности* цепи к изменению нескольких параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  используют среднеквадратическое значение чувствительности

$$S_{\Sigma}^{K(\omega)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( S_{\alpha_i}^{K(\omega)} \right)^2}, \quad (2.2)$$

где  $n$  — число параметров.

## 2.3. Нормирование величин в задачах синтеза цепей

При решении задач синтеза электрических цепей широко используется нормирование системных функций.

Типичным примером является *нормирование* АЧХ, при котором ее текущее значение делят на модуль комплексного коэффициента передачи  $K(\omega_0)$  на характерной частоте  $\omega_0$ , например, на резонансной частоте,

$$K_H(\omega) = \frac{K(\omega)}{K(\omega_0)}.$$

Кроме того, используется нормирование как самой частоты, так и сопротивления элементов синтезируемой цепи. Нормирование частоты производится относительно характерной частоты  $\omega_0$ , а нормирование сопротивления — относительно некоторого характерного сопротивления  $R_0$ . Значения характерных величин  $\omega_0$  и  $R_0$  выбирают, исходя из конкретных технических требований, предъявляемых к параметрам цепи. Например, при синтезе электрических фильтров в качестве характерной частоты часто используется граничная или средняя частота полосы пропускания, а в качестве сопротивления  $R_0$  — сопротивление источника входного сигнала или сопротивление нагрузки фильтра.

В результате нормирования получают следующие безразмерные величины: нормированную частоту

$$\omega_H = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad (2.3)$$

нормированные сопротивления элементов цепи:

$$R_{iH} = \frac{R_i}{R_0}; \quad (2.4)$$

$$x_{iLH} = \omega_0 \frac{\omega L_i}{\omega_0 R_0} = \omega_H \frac{\omega_0 L_i}{R_0} = \omega_H L_{iH}; \quad (2.5)$$

$$x_{iCH} = \frac{1}{R_0 \omega_0 \frac{\omega}{\omega_0} C_i} = \frac{1}{\omega_H R_0 \omega_0 C_i} = \frac{1}{\omega_H C_{iH}}, \quad (2.6)$$

где  $i$  — номер нормированного элемента цепи;  $R_i$ ,  $L_i$ ,  $C_i$  — ненормированные значения  $i$ -го сопротивления,  $i$ -ой индуктивности и  $i$ -ой емкости соответственно;  $R_{iH}$ ,  $L_{iH} = \frac{\omega_0 L_i}{R_0}$ ,  $C_{iH} = R_0 \omega_0 C_i$  — нормированные значения  $i$ -го сопротивления,  $i$ -ой индуктивности и  $i$ -ой емкости соответственно, которые являются безразмерными величинами.

Нормирование позволяет получить обобщенные расчетные соотношения, пригодные для синтеза целого класса цепей независимо от диапазона рабочих частоты, сопротивления нагрузки и т.п.

После того, как схема цепи и нормированные значения параметров ее элементов определены, выполняют *денормирование* частоты и параметров с учетом выбранных значений  $\omega_0$  и  $R_0$ :

$$\omega = \omega_H \omega_0; \quad (2.7)$$

$$R_i = R_{iH} R_0; \quad (2.8)$$

$$L_i = \frac{R_0 L_{iH}}{\omega_0}; \quad (2.9)$$

$$C_i = \frac{C_{iH}}{\omega_0 R_0}. \quad (2.10)$$

Следует иметь в виду, что нормирование (2.3) ... (2.6) и денормирование (2.7), (2.6, (2.10), частоты и параметров элементов цепей не оказывает влияния на вид их частотных характеристик.

### 3. СВОЙСТВА СИСТЕМНЫХ ФУНКЦИЙ ПАССИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

#### 3.1. Особенности пассивных двухполюсников

Эквивалентное сопротивление пассивного двухполюсника, состоящий только из сопротивлений, индуктивностей и емкостей, можно представить в виде

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} = \frac{p^2 LC + pLC + 1}{pC}, \quad (3.1)$$

где  $R$ ,  $L$ ,  $C$  — эквивалентные сопротивление, индуктивность и емкость двухполюсника соответственно.

Из (3.1) видно, что степени полиномов числителя и знаменателя выражения (3.1) могут отличаться не более чем на единицу. Очевидно, что аналогичный вывод может быть получен и для проводимости  $Y(p)$ .

Если рассматривать пассивный двухполюсник как ветвь, подключенную к узлам  $i$  и  $k$  некоторой цепи, то его сопротивление можно представить в виде

$$Z(p) = \frac{\Delta}{\Delta_{ik}}, \quad (3.2)$$

где  $\Delta$  — определитель системы уравнений узловых напряжений;  $\Delta_{ik}$  — минор, который получают из определителя  $\Delta$  путем вычеркивания  $i$ -ой строки и  $k$ -го столбца.

Из теории двухполюсников известно, что выражение (3.2), после разложения числителя и знаменателя, преобразуется в рациональную дробь в виде отношения двух полиномов комплексной переменной  $p = \sigma + j\omega$ :

$$Z(p) = H \frac{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0} = H \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (3.3)$$

где  $H$ ,  $a_i$ ,  $b_k$  — постоянные коэффициенты, которые определяются параметрами элементов цепи;  $A(p)$  и  $B(p)$  — полиномы числителя и знаменателя соответственно.

Так как параметры элементов (значения сопротивлений, индуктивностей и емкостей) пассивного двухполюсника являются положительными вещественными величинами, то в выражении (3.3) коэффициенты  $H$ ,  $a_i$ ,  $b_k$  также являются положительными вещественными числами. Число корней полиномов числителя и знаменателя рациональной дроби (3.3) равно порядку этих полиномов. Корни числителя называются *нулями*, а корни знаменателя — *полюсами* функции (3.3).

При подключении к двухполюснику источника импульсного тока  $I(t) = \delta(t)$ , операторное изображение которого имеет вид  $I(p) = 1$ , напряжение на двухполюснике с учетом (3.3) определяется выражением

$$U(p) = I(p)Z(p) = H \frac{A(p)}{B(p)}. \quad (3.4)$$

В случае, когда функция (3.4) представляет собой правильную дробь, знаменатель которой имеет простые (некратные) корни, оригинал напряжения может быть найден с помощью теоремы о вычетах по формуле

$$U(t) = \sum_{i=1}^m H D_i e^{p_{\Pi i} t}, \quad (3.5)$$

где  $p_{\Pi i}$  —  $i$ -ый полюс напряжения (3.4);  $D_i = \operatorname{res}_i[A(p)/B(p)] = A(p_{\Pi i}) / \left. \frac{d[B(p)]}{dp} \right|_{p=p_{\Pi i}}$  — вычет функции  $A(p)/B(p)$  относительно  $i$ -го полюса.

Из физических соображений следует, что воздействие на пассивный двухполюсник, имеющий потери, единичного импульса тока  $I(t) = \delta(t)$ , обладающего конечной энергией, должно вызвать на двухполюснике напряжение, затухающее во времени, вследствие рассеяния энергии в активных сопротивлениях двухполюсника.

Следовательно, выражение (3.5) должно удовлетворять условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m H D_i e^{p_{\Pi i} t} = 0. \quad (3.6)$$

Для выполнения условия (3.6) необходимо, чтобы вещественные части всех полюсов функции  $Z(p)$  были отрицательны, то есть все полюса должны располагаться в левой полуплоскости переменной  $p$ .

С учетом (3.3) проводимость двухполюсника определяется по формуле

$$Y(p) = \frac{1}{H} \frac{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{1}{H} \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (3.7)$$

Если на входе двухполюсника воздействует импульсный источник напряжения  $u(t) = \delta(t)$ , которому соответствует операторное изображение  $U(p) = 1$ , то ток двухполюсника будет с учетом (3.7) определяться выражением

$$I(p) = U(p)Y(p) = \frac{1}{H} \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (3.8)$$

Проведя для (3.8) рассуждения, аналогичные выше изложенному, получим, что все корни полинома  $A(p)$  также должны располагаться в левой полуплоскости переменной  $p$ .

Поскольку корни полинома  $B(p)$  являются одновременно полюсами сопротивления (3.3) и нулями проводимости (3.7), а корни полинома  $A(p)$  — нулями сопротивления и полюсами проводимости, то, следовательно, нули и полюса сопротивления и проводимости пассивного двухполюсника должны располагаться в левой полуплоскости переменной  $p$ , что соответствует условию устойчивости пассивного двухполюсника.

Поскольку напряжение (3.5) является вещественной функцией времени, то комплексные полюса сопротивления пассивного двухполюсника должны быть попарно сопряженными, так как только в этом случае сумма слагаемых в (3.5), соответствующих сопряженным полюсам, будет представлять собой вещественную функцию.

Используя теорему Виета, полиномы числителя и знаменателя функций (3.3) и (3.7) можно представить в виде

$$(p - p_1)(p - \bar{p}_1) \dots (p - p_l)(p - \bar{p}_l)(p - c_1)(p - c_2) \dots (p - c_q), \quad (3.9)$$

где  $p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2, \dots, p_l, \bar{p}_l$  — пары комплексно сопряженных корней;  $c_1, c_2, \dots, c_q$  — вещественные корни, которые располагаются на отрицательной вещественной полуоси в плоскости переменной  $p$ ;  $2l + q$  — общее число корней числителя или знаменателя.

Для  $k$ -ой пары комплексно сопряженных корней  $p_k = \sigma_k + j\omega_k$  и  $\bar{p}_k = \sigma_k - j\omega_k$  получаем

$$(p - p_k)(p - \bar{p}_k) = (p - \sigma_k + j\omega_k)(p - \sigma_k - j\omega_k) = (p - \sigma_k)^2 + \omega_k^2,$$

где  $\sigma_k < 0$  и  $\omega_k > 0$ .

Поскольку величины  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l, c_1, c_2, \dots, c_q$  являются вещественными отрицательными числами и входят в формулу (3.9) со знаком минус, то после их подстановки в (3.9) эти величины становятся положительными числами. В результате, выражение (3.9) преобразовать в степенной полином с положительными коэффициентами, который содержит все степени переменной  $p$  без пропусков.

Полином, корни которого лежат в левой полуплоскости переменной  $p$  и который содержат все степени переменной  $p$ , называют строгим полиномом Гурвица. Следовательно, числитель и знаменатель сопротивления и проводимости пассивного двухполюсника являются строгими полиномами Гурвица.

### 3.2. Полусно-нулевая диаграмма сопротивления и проводимости пассивного двухполюсника

Представляя полиномы числителя и знаменателя функции (3.3) в виде произведения двучленов (3.9), получаем

$$Z(p) = H \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_{n1})(p - p_{n2}) \dots (p - p_{nm})} = H \frac{\prod_{i=1}^n M_i}{\prod_{k=1}^m N_k} e^{j \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{0i} - \sum_{k=1}^m \alpha_{nk} \right)} = |Z(p)| e^{j\varphi}, \quad (3.10)$$

где  $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n}$  — нули функции;  $p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nm}$  — полюса функции;  $M_1, M_2, \dots, M_n$  и  $\alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots, \alpha_{0n}$  — модули и аргументы двучленов числителя;  $N_1, N_2, \dots, N_m$  и  $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nm}$  — модули и аргументы двучленов знаменателя;

$$|Z(p)| = H \frac{\prod_{i=1}^n M_i}{\prod_{k=1}^m N_k}, \quad (3.11)$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_{0i} - \sum_{k=1}^m \alpha_{nk}. \quad (3.12)$$

— модуль и аргумент функции  $Z(p)$  соответственно.

В качестве примера рассмотрим двухполюсник, у которого функция сопротивления имеет один вещественный нуль  $p_{01} = \sigma_{01}$  и два комплексно сопряженных полюса  $p_{n1}$  и  $p_{n2} = \bar{p}_{n1}$

$$Z(p) = H \frac{(p - p_{01})}{(p - p_{n1})(p - p_{n2})}.$$



Расположение нулей и полюсов функции  $Z(p)$  на комплексной плоскости переменной  $p = \sigma + j\omega$ , называется *полюсно-нулевой диаграммой*, пример которой показан на рис. 3.1.

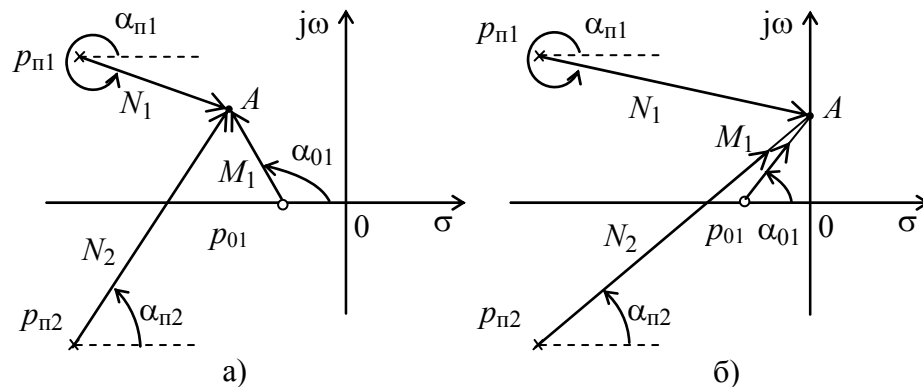


Рис. 3.1 — Полюсно-нулевая диаграмма функции  $Z(p)$

Модули  $M_1$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  двучленов числителя и знаменателя изображены на рис. 3.1 в виде отрезков, а их аргументы  $\alpha_{01}$ ,  $\alpha_{п1}$ ,  $\alpha_{п2}$  — в виде углов, обозначенных дугами. Расположение нулей и полюсов сопротивления позволяет графически определить его модуль и аргумент для любого значения  $p$ . Если необходимо исследовать зависимость модуля и фазу сопротивления от частоты  $\omega$  в диапазоне от 0 до  $\infty$ , то точку  $A$  следует перемещать вдоль положительной мнимой полуоси (рис. 3.1,б), на которой  $\sigma = 0$  и  $p = j\omega$ .

#### Примечание.

Далее по тексту термины “вещественная ось” и “мнимая ось” следует относить к комплексной плоскости переменной  $p = \sigma + j\omega$ .

### 3.3. Свойства системных функций реактивных LC-двухполюсников

Сопротивление  $Z(p)$  и проводимость  $Y(p)$  LC-двухполюсника являются мнимыми величинами и называются *реактансными функциями*. Поскольку в реактивном двухполюснике отсутствуют потери электрической энергии, то в нем возможно существование незатухающих колебаний. Поэтому нули и полюса реактансных функций  $Z(p)$  и  $Y(p)$  должны иметь нулевую вещественную часть  $\sigma = 0$  и располагаться на мнимой оси комплексной плоскости  $p$ .



Рис. 3.2 — Расположение нулей и полюсов реактивного сопротивления

который ее потребляет.

При прохождении каждого нуля, расположенного на мнимой оси, аргумент сопротив-

показан на рис. 3.2. Чередование нулей и полюсов на мнимой оси можно объяснить следующим образом. При возбуждении реактивного двухполюсника синусоидальным напряжением аргумент сопротивления или проводимости пассивного двухполюсника должен удовлетворять условию  $|\varphi| \leq 90^\circ$ . В противном случае мощность  $P = UI \cos \varphi$ , потребляемая двухполюсником, будет отрицательной, что возможно только в случае активного двухполюсника, который может вырабатывать энергию, и невозможно в случае пассивного двухполюсника, который ее потребляет.

ления изменяется на  $\Delta\varphi = +180^\circ$ , а при прохождении каждого полюса — на  $\Delta\varphi = -180^\circ$ . Так как нули и полюса реактансной функции  $Z(p)$  соответствуют частотам последовательного и параллельного резонансов  $LC$ -двухполюсника соответственно, то скачкообразные изменения аргумента сопротивления при переходе через резонансные частоты объясняются изменением характера реактивного сопротивления с емкостного на индуктивное и наоборот.

Если бы при прохождении мнимой оси встретились подряд два нуля или два полюса, то это вызывало бы изменение аргумента сопротивления на  $360^\circ$  или  $-360^\circ$  и характер сопротивления не изменялся, что противоречит физическому смыслу частотной зависимости сопротивления  $LC$ -двухполюсника.

Таким образом, нули и полюса сопротивления  $Z(p)$  и проводимости  $Y(p)$  реактивного двухполюсника чередуются на мнимой оси, то есть каждый полюс располагается между двумя нулями и наоборот.

С математической точки зрения рациональные дроби (3.3), (3.7) при  $p = j\omega$  могут быть мнимыми, если полином  $A(p)$  — мнимый, а полином  $B(p)$  — вещественный или наоборот.

С другой стороны полиномы  $A(j\omega)$  и  $B(j\omega)$  могут быть вещественными только тогда, когда все степени переменной  $j\omega$  — четные, и мнимыми, когда все степени переменной  $j\omega$  — нечетные, так как

$$(j\omega)^n = \begin{cases} (j^2)^{n/2} \omega^n = (-1)^{n/2} \omega^n & \text{— при } n \text{ четном;} \\ j(j^2)^{(n-1)/2} \omega^n = j(-1)^{(n-1)/2} \omega^n & \text{— при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

В случае, когда  $A(p)$  представляет собой четный полином, а  $B(p)$  — нечетный, полином  $A(p)$  содержит только четные степени переменной  $p$ , а также свободный член, соответствующий нулевой степени переменной  $p$  (ноль считается четным числом). Тогда при любом вещественном значении  $p$  такой полином является положительным числом  $A(p) > 0$ . Поэтому вещественное значение  $p$  не может являться корнем уравнения  $A(p) = 0$ . Следовательно, полином  $A(p)$  не может иметь нулевой корень, поскольку нуль является вещественным числом.

Если полином  $B(p)$  содержит только нечетные степени  $p$ , то он не должен содержать свободный член. Тогда полином  $B(p)$  можно представить в виде  $B(p) = pB_1(p)$ , где  $B_1(p)$  — четный полином, который содержит только четные степени  $p$ . Следовательно, полином  $B(p)$  будет иметь корень  $p = 0$ , расположенный в начале координат.

Тогда сопротивление  $Z(p)$  можно представить в виде

$$Z(p) = H \frac{p^n + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_2p^2 + a_0}{p(p^{m-1} + b_{m-2}p^{m-3} + \dots + b_3p^2 + b_1)},$$

В случае, когда  $A(p)$  представляет собой нечетный полином, а  $B(p)$  — четный, полином  $A(p)$  можно представить в виде  $A(p) = pA_1(p)$ , где  $A_1(p)$  — четный полином. Тогда полином  $A(p)$  будет иметь корень  $p = 0$ , расположенный в начале координат.

В этом случае сопротивление  $Z(p)$  можно представить в виде

$$Z(p) = H \frac{p(p^{n-1} + a_{m-2}p^{n-3} + \dots + a_3p^2 + a_1)}{p^m + b_{m-2}p^{m-2} + \dots + b_4p^4 + b_2p^2 + b_0},$$

Аналогичные рассуждения справедливы и по отношению к проводимости  $Y(p)$ .

Особенностью реактансных функций в виде неправильной дроби является то, что после деления полинома числителя на полином знаменателя степень полинома числителя остатка деления будет на две единицы меньше степени полинома числителя исходной функции и станет меньше степени полинома знаменателя. Указанная особенность объясняется тем, что при делении знаменатель остатка совпадает со знаменателем исходной функции, а его числитель должен оставаться четным полиномом, но более низкого порядка, чем полином числителя исходной функции, так как остаток деления должен представлять собой правильную дробь.

Поскольку полиномы, которые содержат не все степени переменной  $p$ , называют нестрогими (модифицированными) полиномами Гурвица, то *числитель и знаменатель сопротивления и проводимости реактивного двухполюсника являются нестрогими полиномами Гурвица*.

### Пример 3.1

$$Z(p) = \frac{p^6 + 3p^4 + 6p^2 + 2}{p^5 + 2p^3 + p} = p + \frac{p^4 + 5p^2 + 2}{p^5 + 2p^3 + p}.$$

### 3.4. Свойства системных функций пассивных $RL$ - и $RC$ -двухполюсников

Пассивные двухполюсники, содержащие активные сопротивления и реактивные элементы только одного вида, называются  $RL$ - и  $RC$ -двухполюсниками. Поскольку активные сопротивления вызывают потери энергии в цепи, то  $RL$ - и  $RC$ -двухполюсники обладают потерями и поэтому называются *диссипативными* (от англ. *dissipative* — поглощающий, рассеивающий).

Сопротивление и проводимость диссипативных двухполюсников при любом конечном значении частоты  $\omega \neq 0$  не могут быть вещественными функциями.

Переходные процессы в диссипативных двухполюсниках носят апериодический (неколебательный) затухающий характер, что обусловлено наличием потерь и отсутствием резонансного режима работы.

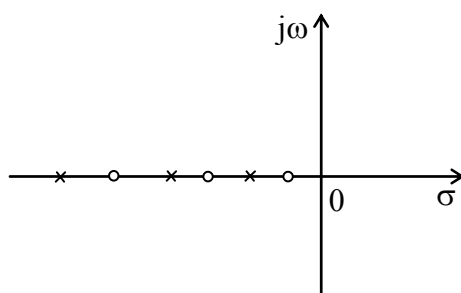


Рис. 3.3 — Расположение нулей и полюсов сопротивления  $RC$ - и  $LR$ -двухполюсников

Поэтому все нули и полюса сопротивления  $Z(p)$  и проводимости  $Y(p)$  таких двухполюсников должны располагаться на отрицательной вещественной полуоси (рис. 3.3). При этом нули и полюса функций  $Z(p)$  или  $Y(p)$  должны чередоваться. Если бы при прохождении вещественной оси встретились подряд два нуля или два полюса, то аргумент сопротивления или проводимости принял бы значение, превышающее  $90^\circ$ , что противоречит условию пассивности цепи и, следовательно, является невозможным.

## 4. СИНТЕЗ ПАССИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

### 4.1. Условия физической реализуемости пассивных двухполюсников

Ранее было установлено, что сопротивление  $Z(p)$  и проводимость  $Y(p)$  пассивного двухполюсника представляют собой *дробно-рациональную функцию* в виде отношения двух строгих полиномов Гурвица комплексной переменной  $p$ .

Однако не каждая дробно-рациональная функция, рассматриваемая как сопротивление или проводимость, является реализуемой в виде пассивного двухполюсника. Исследуя свойства таких функций, Бруне доказал, что, *если дробно-рациональная функция комплексной переменной  $p$  является положительной вещественной функцией, то она всегда может быть реализована в виде пассивного двухполюсника.*

Функция  $F(p)$  называется положительной вещественной функцией (функцией Бруне) комплексной переменной  $p$ , если эта функция удовлетворяет следующим условиям.

1) Если вещественная часть комплексной переменной  $p$  является положительной, то вещественная часть функции также является положительной, т. е., если  $\operatorname{Re}[p] = \sigma > 0$ , то  $\operatorname{Re}[F(p)] \geq 0$ .

2) Если переменная  $p$  является вещественной, то и функция также является вещественной

Указанные условия выполняются, если системная функция удовлетворяет следующим требованиям.

1) Коэффициенты полиномов числителя и знаменателя системных функций должны быть положительными вещественными числами.

2) Степени полиномов числителя и знаменателя системных функций должны отличаться не более чем на единицу.

3) Полюса и нули системных функций должны располагаться в левой полуплоскости переменной  $p$ .

Перечисленные выше требования являются условиями физической реализуемости заданной функции  $Z(p)$  или  $Y(p)$  в виде пассивной цепи.

Если нули и полюса функции  $Z(p)$  или  $Y(p)$  являются простыми и вещественными, и чередуются на отрицательной вещественной полуоси, то такая функция реализуется в виде  $RL$ - или  $RC$ -цепи, т. е. в виде пассивной цепи с потерями.

Если нули и полюса функции  $Z(p)$  или  $Y(p)$  являются простыми и мнимыми и чередуются на мнимой оси, то такая функция реализуется в виде реактивной  $LC$ -цепи, т. е. в виде пассивной цепи без потерь.

### 4.2. Разложение дробно-рациональной функции

Если заданная рациональная функция представляет собой правильную несократимую дробь, имеющую однократные корни знаменателя,

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0}{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0},$$

где  $n$  и  $m$  — степени полиномов числителя и знаменателя, причем  $m > n$ ;  $a_i, b_k$  — положительные вещественные коэффициенты, то она может быть разложена на простые дроби по формуле

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \frac{D_i}{x - x_i}, \quad (4.1)$$

где  $x_i$  —  $i$ -ый корень знаменателя (полюс разлагаемой функции);

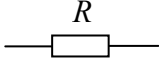
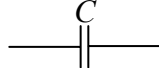
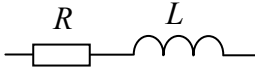
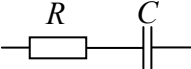
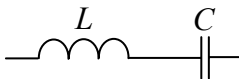
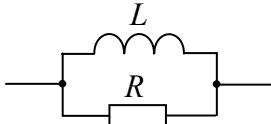
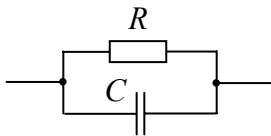
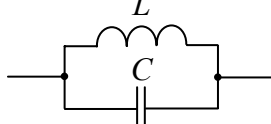
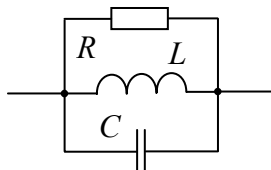
$$D_i = \operatorname{res}_i F(x) = \frac{P(x_i)}{\left. \frac{dQ(x)}{dx} \right|_{x=x_i}} \text{ — вычет функции } F(x) \text{ в полюсе } x = x_i.$$

Если дробно-рациональная функция представляет собой неправильную дробь ( $m \geq n$ ), то она может быть преобразована в сумму многочлена и правильной дроби путем деления полинома числителя на полином знаменателя и выделения целой части.

#### 4.3. Входные функции элементарных пассивных двухполюсников

При синтезе цепей большое значение имеет знание входных функций элементарных пассивных двухполюсников (элементарных звеньев), приведенных в таблице 4.1.

Таблица 4.1 — Схемы и системные функции элементарных пассивных звеньев

| №  | Схема звена                                                                         | Сопротивление $Z(p)$                                                                                           | Проводимость $Y(p)$                        |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1  |    | $R$                                                                                                            | $\frac{1}{R}$                              |
| 2  |    | $pL$                                                                                                           | $\frac{1}{pL}$                             |
| 3  |    | $\frac{1}{pC}$                                                                                                 | $pC$                                       |
| 4  |   | $L(p + \beta)$ , где $\beta = \frac{R}{L}$                                                                     | $\frac{1}{L(p + \beta)}$                   |
| 5  |  | $\frac{R(p + \gamma)}{p}$ , где $\gamma = \frac{1}{RC}$                                                        | $\frac{p}{R(p + \gamma)}$                  |
| 6  |  | $\frac{L(p^2 + \omega_0^2)}{p}$ , где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$                                         | $\frac{p}{L(p^2 + \omega_0^2)}$            |
| 7  |  | $\frac{Rp}{p + \beta}$ , где $\beta = \frac{R}{L}$                                                             | $\frac{p + \beta}{Rp}$                     |
| 8  |  | $\frac{1}{C(p + \gamma)}$ , где $\gamma = \frac{1}{RC}$                                                        | $C(p + \gamma)$                            |
| 9  |  | $\frac{p}{C(p^2 + \omega_0^2)}$ , где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$                                         | $\frac{C(p^2 + \omega_0^2)}{p}$            |
| 10 |  | $\frac{p}{C(p^2 + \gamma p + \omega_0^2)}$ ,<br>где $\gamma = \frac{1}{RC}$ ; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ | $\frac{C(p^2 + \gamma p + \omega_0^2)}{p}$ |

**Примечание.** Параметры  $\beta$  и  $\gamma$  системных функций, приведенных в таблице 4.1, имеют размерность частоты и являются величинами обратными постоянным времени  $RL$ - и  $RC$ -звеньев соответственно.

#### 4.4. Методы реализации входных функций пассивных двухполюсников

Большинство методов синтеза пассивных двухполюсников по заданной входной функции  $Z(p)$  или  $Y(p)$  основано на разложении этой функции на составляющие, каждая из которых представляет собой входную функцию (сопротивление или проводимость) элементарного звена, содержащего не более трех элементов (см. таблицу 4.1). Путем сравнения составляющих разложения с функциями элементарных звеньев определяются вид и параметры элементов звеньев. Затем из найденных звеньев составляют с учетом вида разложения пассивный двухполюсник, реализующий исходную заданную функцию.

Впервые описанный метод реализации входных функций пассивных двухполюсников был предложен Фостером при разработке фильтров для телефонных линий связи.

Поэтому *реализация путем разложение функции сопротивления называют первой формой Фостера, а путем разложение функции проводимости — второй формой Фостера.*

##### Примечание.

Рональд Мартин Фостер (1896 — 1998 г.г.) работал математиком фирмы Bell Laboratories (исследовательский центр компании Bell Telephone Co.). В 1924 г. Фостером была опубликована реактансная теорема, которая впоследствии была использована Вильгельмом Кауэром при разработке математических основ проектирования фильтров.

Метод реализации входных функций, предложенный Кауэром, называется *реализацией по Кауэру*.

Однако по методам Фостера и Кауэра достаточно просто реализуются входные функции пассивных двухполюсников только частного вида, составленных из элементов двух видов:

- $LC$ -двухполюсники, имеющие реактивную входную функцию и не имеющие потерь;
- диссипативные  $RC$ - и  $RL$ -двухполюсники, имеющие потери.

Реализация входных функций  $Z(p)$  или  $Y(p)$  пассивных двухполюсников общего вида, составленных из элементов трех видов  $R$ ,  $L$  и  $C$  представляет собой более сложную проблему. В силу ограниченного объема данной дисциплины далее рассмотрены только методы Фостера и Кауэра.

#### 4.5. Реализация сопротивления двухполюсника по первой форме Фостера

Пусть сопротивление двухполюсника представляет собой рациональную дробь, имеющую простые (некратные) полюса, являющиеся отрицательными вещественными числами,

$$Z(p) = H \frac{A(p)}{B(p)} = H \frac{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}, \quad (4.2)$$

Рассмотрим особенности реализации, характерные для трех возможных случаев, соответствующих различным соотношениям между степенями полиномов числителя и знаменателя функции (4.2):  $n < m$ ,  $n = m$  и  $n > m$ .

##### Случай 1 ( $n < m$ )

Поскольку при  $n < m$  функция  $Z(p)$  представляет собой правильную дробь, то она может быть разложена в соответствии с (4.1) в виде

$$Z(p) = \sum_{i=1}^m \frac{HD_i}{p - p_i} = \sum_{i=1}^m Z_i(p), \quad (4.3)$$

где  $p_i$  —  $i$ -ый полюс функции  $Z(p)$ );

$$D_i = \frac{A(p_i)}{dB(p)/dp|_{p=p_i}}$$

— вычет функции  $A(p)/B(p)$  в полюсе  $p = p_i$ ;  $Z_i(p) = HD_i/(p - p_i)$ .

Сравнивая слагаемые  $Z_i(p)$  с сопротивлениями элементарных звеньев, приведенными в таблице 4.1, видно, что каждое из них можно рассматривать как сопротивление  $RC$ -звена (см. таблица 4.1, звено № 8).

$$Z_i(p) = \frac{1}{C_i \left( p + \frac{1}{R_i C_i} \right)}, \quad (4.4)$$

где  $R_i = -HD_i/p_i$  — сопротивление в омах;  $C_i = 1/HD_i$  — емкость в фарадах.

Поскольку функция (4.3) разлагается в виде суммы  $m$  слагаемых  $Z_i(p)$ , то она реализуется цепью из  $m$  последовательно включенных  $RC$ -звеньев (рис. 4.1).

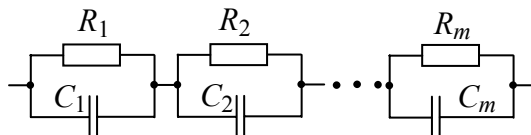


Рис. 4.1 — Реализация функции  $Z(p)$  по первой форме Фостера в виде  $RC$ -цепи при  $n < m$

Если один из полюсов функции  $Z(p)$  равен нулю, то соответствующее ему  $RC$ -звено вырождается в емкость (рис. 4.1,б).

### **Случай 2** ( $n = m$ )

Если  $n = m$ , то путем деления полинома числителя на полином знаменателя из заданной системной функции выделяют постоянную составляющую, которая эквивалентна последовательно включенному активному сопротивлению. При этом деление может быть выполнено одним из двух следующих способов.

#### **Деление без понижения степени полинома числителя**

Полином числителя делят на полином знаменателя, выбирая в качестве частного от деления дробь  $a_0/b_0$ , после чего функция  $Z(p)$  принимает вид (поскольку  $n = m$ , то далее буква  $n$  в показателях степеней полинома числителя заменена на букву  $m$ )

$$\begin{aligned} Z(p) &= H \frac{a_0}{b_0} + H_1 \frac{p^m + a'_{m-2}p^{m-1} + \dots + a'_1p^2 + a'_0p}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0} = H \frac{a_0}{b_0} + H_1 p \frac{A'(p)}{B(p)} = \\ &= H \frac{a_0}{b_0} + Z_1(p), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $H_1 = H \left( 1 - \frac{a_0}{b_0} \right)$  — постоянный коэффициент;

$$Z_1(p) = H_1 p \frac{A'(p)}{B(p)}; \quad \frac{A'(p)}{B(p)} = \frac{p^{m-1} + a'_{m-2}p^{m-2} + \dots + a'_1p + a'_0}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}.$$

Такой способ деления позволяет сохранить в остатке от деления  $Z_1(p)$  исключить из

числителя свободный член, сохранив при этом степень числителя, какой она была у числителя заданной функции.

Поскольку рациональная дробь  $A'(p)/B(p)$  является правильной, то она может быть разложена по формуле (4.1). Тогда функция (4.5) преобразуется к виду

$$Z(p) = H \frac{a_0}{b_0} + \sum_{i=1}^m \frac{p H_1 D_i}{p - p_i}, \quad (4.6)$$

где  $p_i$  —  $i$ -ый корень полинома  $B(p)$ ;  $D_i = \operatorname{res}_i[A'(p)/B(p)] = A'(p_i)/dB(p)/dp|_{p=p_i}$  — вычет функции  $A'(p)/B(p)$  в полюсе  $p = p_i$ .

Сравнивая слагаемые формулы (4.6) с сопротивлениями элементарных звеньев (см. таблицу 4.1), видно, что первое из них реализуется в виде сопротивления  $R_0 = H \frac{a_0}{b_0}$  Ом, а каждое слагаемое под знаком суммы — в виде параллельного  $RL$ -звена (см. таблица 4.1, звено № 7). Таким образом, функция (4.6) реализуется цепью, показанной на рис. 4.2.

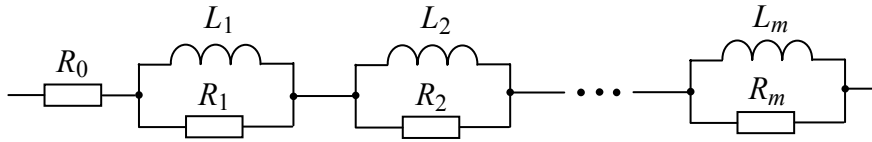


Рис. 4.2 — Реализация функции  $Z(p)$  по первой форме Фостера в виде  $RL$ -цепи при  $m = n$

Если один из полюсов равен нулю, то соответствующее ему  $RL$ -звено вырождается в сопротивление.

#### **Деление с понижением степени полинома числителя**

Полином числителя делят на полином знаменателя, выбирая в качестве частного от деления единицу, после чего функция  $Z(p)$  принимает вид

$$Z(p) = H + H_2 \frac{p^{m-1} + a''_{m-2} p^{m-2} + \dots + a'_1 p + a'_0}{p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} = H + H_2 \frac{A''(p)}{B(p)} = H + Z_1(p), \quad (4.7)$$

где  $H_2 = H(a_{m-1} - b_{m-1})$  — постоянный коэффициент;

$$Z_1(p) = H_2 \frac{A''(p)}{B(p)}; \quad \frac{A''(p)}{B(p)} = \frac{p^{m-1} + a''_{m-2} p^{m-2} + \dots + a'_1 p + a'_0}{p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}.$$

Рациональная дробь  $A''(p)/B(p)$  является правильной и может быть разложена по формуле (4.1). Тогда функция (4.7) преобразуется к виду

$$Z(p) = H + \sum_{i=1}^m \frac{H_2 D_i}{p - p_i}, \quad (4.8)$$

где  $p_i$  —  $i$ -ый корень полинома  $B(p)$ ;  $D_i = \operatorname{res}_i[A''(p)/B(p)] = A''(p_i)/dB(p)/dp|_{p=p_i}$  — вычет функции  $A''(p)/B(p)$  в полюсе  $p = p_i$ .

Сравнивая слагаемые разложения (4.8) с сопротивлениями элементарных звеньев, при-



веденными в таблице 4.1, видно, что первое слагаемое реализуется в виде сопротивления  $R_0 = H$  Ом, а каждое слагаемое под знаком суммы — параллельным  $RC$ -звеном (см. таблица 4.1, звено № 8). В целом функция (4.8) реализуется цепью, изображенной на рис. 4.3.

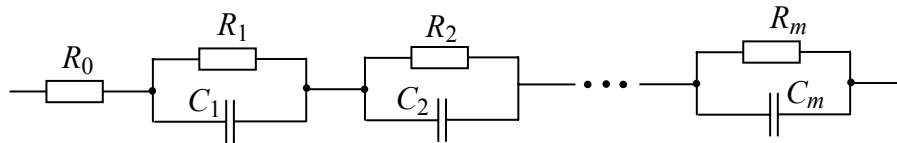


Рис. 4.3 — Реализация функции  $Z(p)$  в виде  $RC$ -цепи по первой форме Фостера при  $m = n$

Если один из полюсов равен нулю, то соответствующее ему  $RC$ -звено вырождается в емкость.

### **Случай 3** ( $n > m$ )

Если  $n > m$ , то  $n = m + 1$  и функция (4.2) представляет собой неправильную дробь вида

$$Z(p) = H \frac{A(p)}{B(p)} = H \frac{p^{m+1} + a_{n-1}p^m + a_{n-1}p^{m-1} + \dots + a_1p + a_0}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}.$$

Деля числитель дроби на знаменатель с понижением степени числителя, можно выделить целую части функции в виде отдельного слагаемого

$$Z(p) = Hp + H_1 \frac{p^m + a'_{m-1}p^{m-1} + \dots + a'_1p + a'_0}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0} = Hp + Z_1(p),$$

где  $H_1 = H(a_{n-1} - b_{m-1})$  — постоянный коэффициент;

$$Z_1(p) = H_1 \frac{p^m + a'_{m-1}p^{m-1} + \dots + a'_1p + a'_0}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}$$

— функция, которая представляет собой отношение двух полиномов с одинаковыми степенями и может быть преобразована аналогично рассмотренному ранее случаю ( $m = n$ ).

Преобразуя  $Z_1(p)$  путем деления числителя на знаменатель без понижения степени полинома числителя, получаем

$$Z(p) = Hp + H_1 \frac{a'_0}{b_0} + \sum_{i=1}^m \frac{pH_2 D_i}{p - p_i}, \quad (4.9)$$

где  $H_2$  — постоянный коэффициент.

Сравнивая слагаемые разложения (4.9) с сопротивлениями элементарных звеньев, приведенными в таблице 4.1, видно, что первое слагаемое реализуется индуктивностью  $L_0 = H$  Гн, второе слагаемое — активным сопротивлением  $R_0 = H_1 \frac{a'_0}{b_0}$  Ом, а каждое слагаемое под знаком суммы — параллельным  $RL$ -звеном (см. таблица 4.1, звено № 7). В результате, функция (4.9) реализуется цепью, показанной на рис. 4.4.

Преобразуя  $Z_1(p)$  путем деления числителя на знаменатель с понижением степени полинома числителя, получаем

$$Z(p) = L_0 p + H_1 + \sum_{i=1}^m \frac{H_1 D_i}{p - p_i}. \quad (4.10)$$

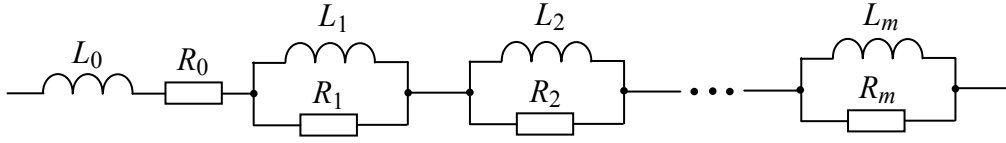


Рис. 4.4 — Реализация функции  $Z(p)$  по первой форме Фостера в виде  $RL$ -цепи при  $n > m$

Сравнивая слагаемые разложения (4.10) с сопротивлениями элементарных звеньев, приведенными в таблице 4.1, видно, что первое слагаемое реализуется индуктивностью  $L_0 = H$  Гн, второе слагаемое — активным сопротивлением  $R_0 = H_1$  Ом, а каждое слагаемое под знаком суммы — параллельным  $RC$ -звеном (см. таблица 4.1, звено № 8). В результате, функция (4.10) реализуется цепью, изображенной на рис. 4.5.

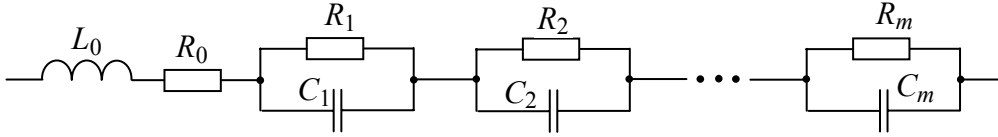


Рис. 4.5 — Реализация функции  $Z(p)$  по первой форме Фостера в виде  $RLC$ -цепи при  $n > m$

#### 4.6. Реализация проводимости двухполюсника по второй форме Фостера

Пусть заданной системной функцией является проводимость, которая имеет простые полюса, представляющие собой отрицательные вещественные число,

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{H} \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{1}{H} \frac{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}. \quad (4.11)$$

По аналогии с реализацией функции  $Z(p)$  (см. п. 4.4) рассмотрим три случая соотношения степеней полиномов числителя и знаменателя функции (4.11).

##### Случай 1 ( $m < n$ )

Если  $m < n$ , то функция (4.11) представляет собой правильную дробь и может быть разложена по формуле (4.1)

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{H(p - p_i)} = \sum_{i=1}^n Y_i(p), \quad (4.12)$$

где  $p_i$  —  $i$ -ый полюс;  $D_i = B(p_i) / dA(p)/dp|_{p=p_i}$  — вычет функции  $Y(p)$  в полюсе  $p = p_i$ ;

$$Y_i(p) = D_i / H(p - p_i).$$

Сравнивая слагаемые суммы (4.12) с проводимостями элементарных двухполюсников, приведенными в таблице 4.1, видно, что каждое из них можно рассматривать как проводимость последовательного  $RL$ -звена (см. таблица 4.1, звено № 4)

$$Y_i(p) = \frac{1}{L_i \left( p + \frac{R_i}{L_i} \right)},$$

где  $R_i = -Hp_i/D_i$  — сопротивление в омах;  $L_i = H/D_i$  — индуктивность в генри.

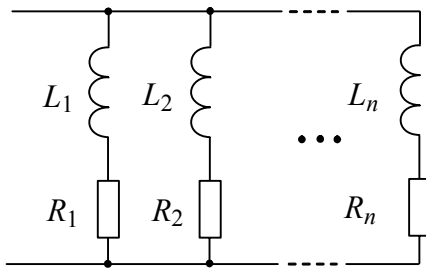


Рис. 4.6 — Реализация  $Y(p)$  по первой форме Фостера в случае  $n < m$  в виде  $RL$ -цепи

Поскольку функция (4.12) разлагается в виде суммы  $n$  слагаемых  $Y_i(p)$ , то она реализуется в виде  $n$  параллельно включенных  $RL$ -звеньев (рис. 4.6).

Если один из полюсов функции (4.12) равен нулю, то соответствующее ему  $RL$ -звено вырождается в индуктивность.

### Случай 2 ( $m = n$ )

Если  $m = n$ , то, применив способ деления числителя на знаменатель без понижения степени полинома числителя, получаем

$$Y(p) = \frac{b_0}{Ha_0} + \frac{H_1 p B'(p)}{A(p)} = \frac{b_0}{Ha_0} + Y_1(p) = \frac{b_0}{Ha_0} + \sum_{i=1}^n \frac{p H_1 D_i}{p - p_i} = \frac{b_0}{Ha_0} + \sum_{i=1}^n Y_i(p), \quad (4.13)$$

где  $Y_1(p) = \frac{H_1 p B'(p)}{A(p)}$  — проводимость;  $H_1 = (1 - b_0/a_0)/H$  — постоянный коэффициент;  $B'(p)$  — полином степени  $n-1 < n$ ;  $D_i$  — вычет функции  $B'(p)/A(p)$  в полюсе  $p_i$ ;  $Y_i(p) = p H_1 D_i / (p - p_i)$  — операторная проводимость.

Первое слагаемое функции (4.13) реализуется в виде активного сопротивления  $R_0 = Ha_0/b_0$  Ом, а каждое из слагаемых  $Y_i(p)$  под знаком суммы — в виде последовательной  $RC$ -звена (см. таблица 4.1, звено № 5), имеющего проводимость

$$Y_i(p) = \frac{p}{R_i \left( p + \frac{1}{R_i C_i} \right)},$$

где  $R_i = 1/H_1 D_i$  — сопротивление в омах;  $C_i = H_1 D_i / p_i$  — емкость в фарадах.

Тогда функция (4.13) реализуется в виде цепи, изображенной на рис. 4.7, а. Если один из полюсов функции  $Y_1(p)$  равен нулю, то соответствующее ему  $RC$ -звено вырождается в сопротивление.

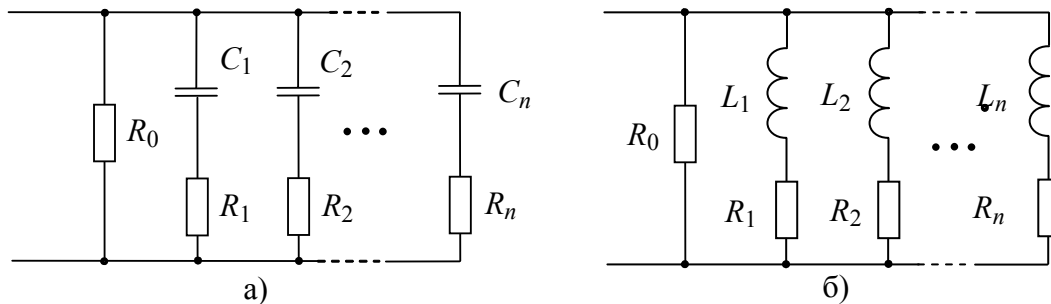


Рис. 4.7 — Реализация  $Y(p)$  по первой форме Фостера в случае  $n = m$ :

а) — в виде  $RC$ -цепи, б) — в виде  $RL$ -цепи

Если применить к функции  $Y(p)$  способ деления числителя на знаменатель с понижением степени полинома числителя, то получим

$$Y(p) = \frac{1}{H} + \sum_{i=1}^n \frac{H_2 D_i}{p - p_i} = \frac{1}{H} + Y_2(p). \quad (4.14)$$

Функция (4.14) позволяет реализовать функции  $Y(p)$  в виде двухполосника (рис. 4.7,б), состоящего из параллельно включенных сопротивления  $R_0 = H$  Ом и  $n$  последовательных  $RL$ -звеньев (см. таблица 4.1, звено № 4). Если один из полюсов функции  $Y_2(p)$  равен нулю, то соответствующее ему  $RL$ -звено вырождается в индуктивность.

### **Случай 3** ( $m > n$ )

Если  $m > n$ , то после деления числителя на знаменатель получаем

$$Y(p) = \frac{p}{H} + H_1 \frac{p^m + b'_{m-1}p^{m-1} + \dots + b'_1p + b'_0}{p^m + a_{n-1}p^{m-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{p}{H} + Y_1(p), \quad (4.15)$$

где  $H_1 = (b_{m-1} - a_{n-1})/H$  — постоянный коэффициент;

$$Y_1(p) = H_1 \frac{p^m + b'_{m-1}p^{m-1} + \dots + b'_1p + b'_0}{p^m + a_{n-1}p^{m-1} + \dots + a_1p + a_0}.$$

Слагаемое  $\frac{p}{H}$  в полученном выше выражении реализуется в виде емкости  $C = \frac{1}{H}$  Ф.

Так как проводимость  $Y_1(p)$  представляет собой отношение двух полиномов с одинаковыми степенями, равными  $m$ , то оно может быть преобразована аналогично случаю  $m = n$ , с выделением целой части одним из рассмотренных выше способов.

### **Пример 4.1**

Реализовать по первой форме Фостера функцию сопротивления

$$Z(p) = \frac{p^2 + a_1p + a_0}{p + b_0}.$$

Разложим заданную функцию путем деления числителя на знаменатель

$$\frac{p^2 + a_1p + a_0}{p + b_0} = p + \frac{(a_1 - b_0)p + a_0}{p + b_0} = \frac{a_0}{b_0} + p + \frac{(a_1 - b_0 - \frac{a_0}{b_0})p}{p + b_0} = \frac{a_0}{b_0} + p + \frac{Dp}{p + b_0},$$

где  $D = (a_1 - b_0)b_0 - a_0$ .

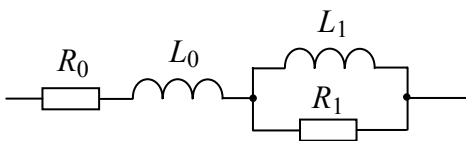


Рис. 4.6 — Реализация сопротивления по первой форме Фостера

Сравнивая слагаемые полученного разложения с сопротивлениями элементарных звеньев, приведенными в таблице 4.1, видно, что первое слагаемое реализуется сопротивлением  $R_0 = a_0/b_0$  Ом, второе слагаемое — индуктивностью  $L_0 = 1$  Гн, а третье слагаемое — параллельным  $RL$ -звеном, образованным сопротивлением

$R_1 = -b_0 D$  Ом и индуктивностью  $L_0 = D$  Гн. Схема синтезированного двухполюсника изображена на рис. 4.6.

#### 4.7. Реализация реактивного сопротивления по первой форме Фостера

Ранее было установлено (см. п. 3), что нули и полюса реактивного сопротивления  $Z(p)$  являются мнимыми числами, которые расположены на мнимой оси и чередуются между собой, а степени полиномы числителя и знаменателя такой функции всегда отличаются на единицу, т. е.  $n \neq m$ .

Рассмотрим два возможных случая:

- функция  $Z(p)$  представляет собой правильную дробь, у которой  $n < m$ ;
- функция  $Z(p)$  представляет собой неправильной дроби, у которой  $n > m$ .

##### **Случай 1** ( $n < m$ )

Если  $n < m$ , то функция может быть разложена по формуле, аналогичной (4.3),

$$Z(p) = H \frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{i=1}^m \frac{H D_i}{p - p_i}, \quad (4.16)$$

где  $p_i$  —  $i$ -ый корень полинома  $B(p)$ ;  $D_i = \text{res}_i[A(p)/B(p)] = A(p_i)/dB(p)/dt|_{p=p_i}$  — вычет функции  $A(p)/B(p)$  в полюсе  $p = p_i$ .

Если знаменатель функции  $Z(p)$  является нечетным полиномом, то функция  $Z(p)$  имеет один нулевой полюс  $p_{п1} = 0$  и  $(m-1)$  мнимых полюсов, которые образуют  $(m-1)/2$  пар комплексно сопряженных чисел.

Наличие нулевого полюса приводит к появлению в разложении (4.16) слагаемого  $H D_0/p$ , где  $D_0$  — вычет функции  $A(p)/B(p)$  в полюсе  $p_{п0} = 0$ . Так как вычеты в комплексно сопряженных мнимых полюсах  $p_i = j\omega_i$ ,  $p_{i+1} = -j\omega_i = \hat{p}_i$  являются одинаковыми положительными вещественными числами  $D_i = D_{i+1} = \text{res}_i[A(p)/B(p)]$ , то каждой паре комплексно-сопряженных полюсов будет соответствовать сумма двух простых дробей

$$\frac{H D_i}{p - j\omega_i} + \frac{H D_i}{p + j\omega_i} = \frac{2 H D_i p}{p^2 + \omega_i^2}.$$

С учетом полученного соотношения разложение (4.16) принимает вид

$$Z(p) = \frac{H D_0}{p} + \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{2 H D_i p}{p^2 + \omega_i^2}. \quad (4.17)$$

Сравнивая составляющие разложения (4.17) с сопротивлениями элементарных звеньев (см. таблица 4.1), видно, что первое слагаемое функции (4.17) реализуется емкостью  $C_0 = 1/H D_1$ , а каждое слагаемое суммы — параллельным  $LC$ -контуром (см. таблица 4.1, звено № 9), емкость и индуктивность которого определяются по формулам:

$$C_i = \frac{1}{2 H D_i}; \quad (4.18)$$

$$L_i = \frac{2HD_i}{\omega_i^2}. \quad (4.19)$$

где  $i = 1, 2, \dots, (m-1)/2$ .

В результате, функция (4.17) реализуется реактивным  $LC$ -двухполюсником, изображенным на рис. 4.8.

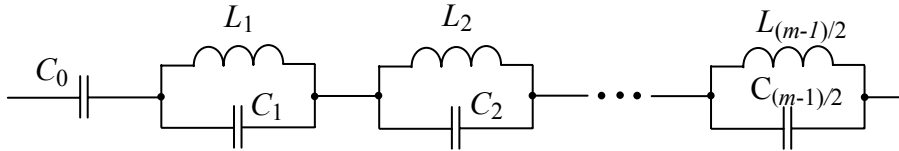


Рис. 4.8 — Реализация реактансного сопротивления по первой форме Фостера при  $m > n$

Если знаменатель функции  $Z(p)$  является четным полиномом, то нулевой полюс будет отсутствовать. При этом число пар комплексно сопряженных полюсов будет равно  $m/2$  и разложение (4.16) принимает вид

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \frac{2HD_i p}{p^2 + \omega_i^2}. \quad (4.20)$$

Из формулы (4.20) следует, что при реализации функции  $Z(p)$  емкость  $C_0$  (рис. 4.8) необходимо заменить параллельным  $LC$ -контуром.

#### **Случай 2** ( $n > m$ )

Поскольку при  $n > m$  функция  $Z(p)$  представляет собой неправильную дробь и в ней можно выделить целую часть, поделив полином числителя на полином знаменателя,

$$Z(p) = Hp + Z_1(p), \quad (4.21)$$

где  $Z_1(p)$  — остаток деления, который будет представлять собой правильную дробь (см. п. 3.4) и может быть разложен аналогично первому случаю, рассмотренному выше.

Если знаменатель функции  $Z_1(p)$  является нечетным полиномом, то разложение  $Z_1(p)$  выполняется по формуле, аналогичной (4.17). При этом функция  $Z(p)$  реализуется цепью в виде последовательного соединения индуктивности  $L_0 = H$ , емкости  $C_0 = 1/HD_1$  и  $(m-1)/2$  параллельных  $LC$ -контуров (рис. 4.9), параметры которых определяются по формулам, аналогичным (4.18), (4.19).

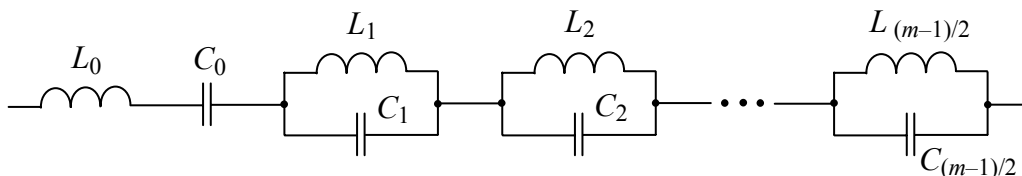


Рис. 4.9 — Реализация реактансного сопротивления по первой форме Фостера

Если знаменатель функции  $Z_1(p)$  является четным полиномом, то разложение  $Z_1(p)$  выполняется по формуле, аналогичной (4.20), и реализуется цепью в виде последовательного соединения  $m/2$  параллельных  $LC$ -контуров. При этом функция  $Z(p)$  реализуется цепью, в которой в отличие от цепи, показанной на рис. 4.9, емкость  $C_0$  необходимо заменить парал-

лельным  $LC$ -контуром.

#### Пример 4.2

Реализовать по первой форме Фостера функцию реактивного сопротивления

$$Z(p) = \frac{3p^4 + 8p^2 + 1}{p^3 + 2p}.$$

#### Решение

Так как степень полинома числителя заданной функции больше степени знаменателя, то, поделив полином числителя на полином знаменателя, получим

$$Z(p) = 3p + \frac{2p^2 + 1}{p^3 + 2p}.$$

Остаток деления представляет собой правильную дробь, которая имеет три полюса:  $p_{п1} = 0$ ,  $p_{п2} = j\sqrt{2}$ ,  $p_{п3} = -j\sqrt{2}$  и может быть разложена по формуле (4.1) в виде

$$Z(p) = 3p + \frac{1}{2p} + \frac{3p}{2(p^2 + 2)}.$$

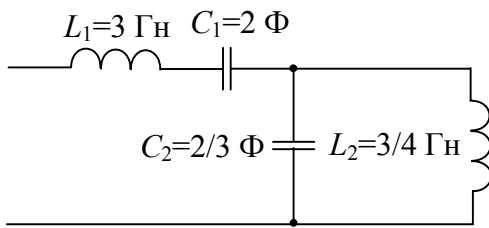


Рис. 4.11 — Реализация проводимости

$L_1 = 2/3$  Гн и емкости  $C_1 = 3/4$  Ф. Цепь, реализующая заданную функцию, изображена на рис. 4.11.

Сравнивая составляющие разложения с проводимостями звеньев таблицы 4.1, видно, что первое слагаемое реализуется индуктивностью  $L_1 = 3$  Гн, второе — емкостью  $C_1 = 2$  Ф, а третье — параллельным  $LC$ -контуром, состоящим из индуктивности

#### 4.8. Реализация реактивной проводимости по второй форме Фостера

Ранее было установлено (см. п. 3), что нули и полюса реактивной проводимости  $Y(p)$  являются мнимыми числами, которые расположены на мнимой оси и чередуются между собой, а степени полиномы числителя и знаменателя такой функции всегда отличаются на единицу, то есть  $n \neq m$ .

Рассмотрим два возможных случая:

- функция  $Y(p)$  представляет собой правильную дробь, у которой  $n < m$ ;
- функция  $Y(p)$  представляет собой неправильной дроби, у которой  $n > m$ .

##### Случай 1 ( $m < n$ )

Если  $m < n$ , то функция  $Y(p)$  представляет собой правильную дробь и может быть разложена по формуле (4.1)

$$Y(p) = \frac{1}{H} \frac{B(p)}{A(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{H(p - p_i)}, \quad (4.22)$$

где  $p_i$  —  $i$ -ый полинома  $A(p)$ ;  $D_i = \text{res}_i[B(p)/A(p)] = B(p_i)/dA(p)/dt|_{p=p_i}$  — вычет функ-

ции  $B(p)/A(p)$  в полюсе  $p = p_i$ .

Если знаменатель функции  $Y(p)$  является нечетным полиномом, то реактансная функция  $Y(p)$  имеет один нулевой полюс  $p_{\text{пл}} = 0$  и  $(n-1)$  мнимых полюсов, которые образуют  $(n-1)/2$  пар комплексно сопряженных чисел.

Наличие нулевого полюса приводит к появлению в разложении (4.22) слагаемого  $D_0/Hp$ , где  $D_0$  — вычет функции  $B(p)/A(p)$  в полюсе  $p_{\text{пл}} = 0$ . Так как вычеты в комплексно сопряженных мнимых полюсах  $p_i = j\omega_i$ ,  $p_{i+1} = -j\omega_i = \hat{p}_i$  являются одинаковыми положительными вещественными числами  $D_i = D_{i+1} = \text{res}_i[B(p)/A(p)]$ , то в разложении (4.22) каждой паре комплексно-сопряженных полюсов будет соответствовать сумма двух простых дробей вида

$$\frac{D_i}{H(p - j\omega_i)} + \frac{D_i}{H(p + j\omega_i)} = \frac{2D_i p}{H(p^2 + \omega_i^2)}.$$

С учетом выше изложенного разложение (4.22) принимает вид

$$Y(p) = \frac{D_0}{Hp} + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2D_i p}{H(p^2 + \omega_i^2)}. \quad (4.23)$$

Сравнивая составляющие разложения (4.23) с проводимостями элементарных звеньев (см. таблица 4.1), видно, что функция (4.23) реализуется цепью (рис. 4.12) в виде параллельного соединения индуктивности  $L_0 = H/D_0$  Гн и  $(n-1)/2$  последовательных LC-контуров, индуктивности и емкости которых определяются по формулам:

$$L_i = \frac{H}{2D_i}; \quad (4.24)$$

$$C_i = \frac{2D_i}{H\omega_i^2}. \quad (4.25)$$

где  $i = 1, 2, \dots, (n-1)/2$ .

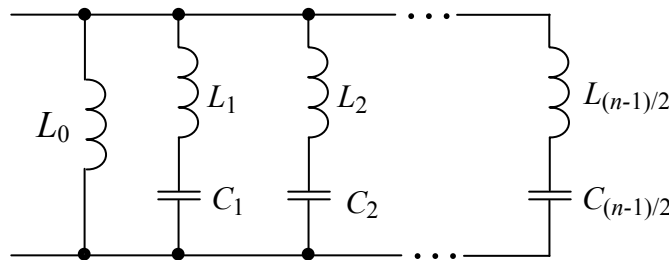


Рис. 4.12 — Реализация реактансной проводимости по второй форме Фостера при нечетном  $n$ , когда  $n > m$

Если знаменатель функции  $Y(p)$  является четным полиномом, то нулевой полюс будет отсутствовать. При этом число пар комплексно сопряженных полюсов будет равно  $n/2$  и разложение (4.17) принимает вид



$$Y(p) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2D_i}{H(p^2 + \omega_i^2)}, \quad (4.26)$$

Из формулы (4.26) следует, что при реализации данной функции  $Y(p)$  необходимо индуктивность  $L_0$  (рис. 4.12) заменить последовательным  $LC$ -контуром.

**Случай 2** ( $m > n$ )

Если  $m > n$ , то функция  $Y(p)$  представляет собой неправильную дробь.

Преобразуя функцию  $Y(p)$  путем деления полинома числителя на полином знаменателя, получаем

$$Y(p) = \frac{p}{H} + Y_1(p), \quad (4.27)$$

где  $Y_1(p)$  — остаток деления, который будет представлять собой правильную дробь (см. п. 3.4) и может быть разложен аналогично первому случаю, рассмотренному выше..

Если знаменатель функции  $Y_1(p)$  является нечетным полиномом, то разложение  $Y_1(p)$  выполняется аналогично (4.23)

$$Y_1(p) = H_1 \frac{D_0}{p} + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2H_1 D_i p}{p^2 + \omega_i^2}.$$

где  $H_1$  — постоянный коэффициент;  $D_0$  — вычет в нулевом полюсе функции  $Y_1(p)$ ;  $D_i$  — вычет, соответствующий  $i$ -ой паре комплексно сопряженных полюсов функции  $Y_1(p)$ .

Тогда (4.27) можно записать в виде

$$Y(p) = \frac{p}{H} + H_1 \frac{D_0}{p} + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2H_1 D_i p}{p^2 + \omega_i^2}, \quad (4.28)$$

Сравнивая члены разложения с проводимостями элементарных звеньев, приведенных в таблице 4.1, находим цепь (рис. 4.13), реализующую функцию  $Y(p)$  в виде параллельного соединения емкости  $C_0 = 1/H$ , индуктивности  $L_0 = 1/D_0$ , и  $(n-1)/2$  последовательных  $LC$  контуров, параметры которых определяются по формулам, аналогичным (4.25), (4.26).

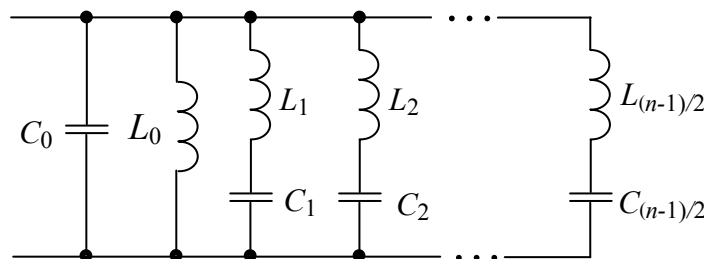


Рис. 4.13 — Реализация реактансной проводимости по второй форме Фостера при  $m > n$  и нечетном  $n$

Если знаменатель функции  $Y_1(p)$  является четным полиномом, то  $Y_1(p)$  раскладывают по формуле, аналогичной (4.26)

$$Y(p) = \frac{p}{H} + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2H_1 D_i p}{p^2 + \omega_i^2}. \quad (4.29)$$

Функция (4.29) реализуется цепью в виде параллельного соединения емкости  $C_0 = 1/H$  Ф и  $n/2$  последовательных  $LC$  контуров. Такая цепь будет отличаться от цепи, показанной на рис. 4.13 только тем, что в ней индуктивность  $L_0$  заменяется последовательным  $LC$ -контуром.

Следует отметить, что обе формы Фостера для взаимнообратных системных функций  $Z(p)$  и  $Y(p)$  содержат равное и минимально необходимое число реактивных элементов. Поэтому построенные по Фостеру двухполосники называют *канонической (классической) реализацией*.

#### 4.9. Реализация реактивных сопротивлений и проводимостей по Кауэру

Реактансная функция реализуема по Кауэру, если она представляет собой неправильную дробь. Если заданная реактансная функция представляет собой правильную дробь, то ее преобразуют в неправильную, а затем реализуют по Кауэру.

Различают две формы реализации по Кауэру, которые отличаются друг от друга способом деления полинома числителя на полином знаменателя. Рассмотрим обе формы Кауэра применительно к реализации функции сопротивления  $Z(p)$ .

В случае реализации реактивного сопротивления  $Z(p)$  по первой форме Кауэра полином числителя делят на полином знаменателя, начиная со старшего члена числителя, в результате чего получают

$$Z(p) = Hp + Z_1(p) = Hp + \frac{1}{Y_1(p)}. \quad (4.30)$$

где  $Y_1(p) = 1/Z_1(p)$  — проводимость, соответствующая остатку деления.

Первое слагаемое разложения (4.30) реализуется в виде индуктивности  $L_1 = H$  Гн. В результате, после первого этапа разложения функция  $Z(p)$  реализуется в виде цепи, показанной на рис. 4.14, где неизвестная часть цепи изображена в виде проводимости  $Y_1(p)$ .

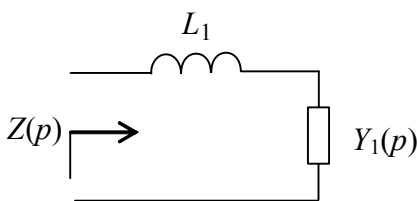


Рис. 4.14 — Реализация  $Z(p)$

после первого этапа разложения

Поскольку функция  $Z_1(p)$  представляет собой правильную дробь (см. п. 3.4), то обратная ей функция  $Y_1(p)$  будет представлять собой неправильную дробь и может быть преобразована аналогично (4.28)

$$Y_1(p) = H_1 p + \frac{1}{Z_2(p)} \quad (4.31)$$

Первое слагаемое функции (4.29) реализуется емкостью  $C_1 = H_1$  Ф.

Подставляя (4.31) в (4.30), получаем

$$Z(p) = Hp + \frac{1}{H_1 p + \frac{1}{Z_2(p)}}. \quad (4.32)$$

После второго этапа разложения в соответствии с (4.30) реализация функции  $Z(p)$  принимает вид, изображенный на рис. 4.15.

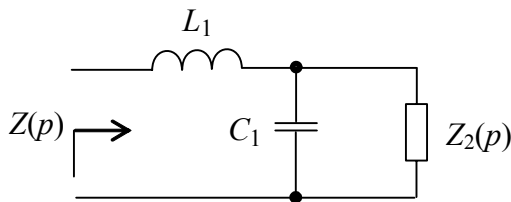


Рис. 4.15 — Реализация  $Z(p)$  после второго этапа разложения

Продолжая описанный процесс разложения, получаем цепную дробь

$$Z(p) = Hp + \frac{1}{H_1p + \frac{1}{H_2p + \frac{1}{H_3p + \dots}}} \quad (4.33)$$

Разложение по формуле (4.33) выполняется до тех пор, пока последний остаток не примет вид, непосредственно реализуемый в виде элементарного звена, определяемого по таблице 4.1.

Из цепной дроби (4.33) следует, что функция  $Z(p)$  реализуется лестничной  $LC$ -цепью (рис. 4.16), которая начинается с  $LC$ -звена, состоящего из индуктивности  $L_1 = H$  Гн и емкости  $C_1 = H_1$  Ф.

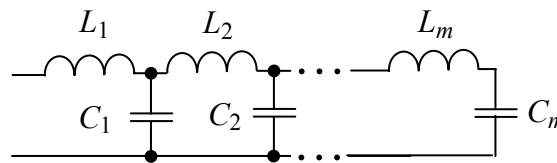


Рис. 4.16 — Реализация реактивного сопротивления по первой форме Кауэру

В случае реализации реактивного сопротивления  $Z(p)$  по второй форме Кауэра все операции деления полинома числителя на полином знаменателя выполняются, начиная не со старшего, а с младшего члена полинома числителя. В случае, когда числитель представляет собой четный полином, содержащий свободный член, указанный методе реализации позволяет преобразовать функцию  $Z(p)$  в следующую цепную дробь

$$Z(p) = \frac{d_1}{p} + \frac{1}{\frac{d_2}{p} + \frac{1}{\frac{d_3}{p} + \frac{1}{\frac{d_4}{p} + \dots}}} \quad (4.34)$$

где  $d_1, d_2, \dots, d_n$  — постоянные коэффициенты, получаемые в процессе деления.

Функция (4.34) реализуется в виде лестничной  $LC$ -цепи, которая отличается от цепи, показанной на рис. 4.16, тем, что в ней индуктивности и емкости следует поменять местами.

### Пример 4.3

Реализовать функцию проводимости

$$Y(p) = \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{6p^3 + 3p}.$$

### Решение

Поделив полином числителя на полином знаменателя в соответствии с первой формой Кауэра,

$$\begin{array}{r}
 12p^4 + 12p^2 + 1 \overline{) 6p^3 + 3p} \\
 \underline{12p^4 + 6p^2} \phantom{+ 1} \\
 6p^3 + 3p \overline{) 6p^2 + 1} \\
 \underline{6p^3 + p} \phantom{+ 1} \\
 6p^2 + 1 \overline{) 2p} \\
 \underline{6p^2} \phantom{+ 1} \\
 1
 \end{array}$$

получаем цепную дробь вида

$$Y(p) = 2p + \frac{1}{p + \frac{1}{3p + \frac{1}{2p}}},$$

которая реализуется цепью (рис. 4.17, а).

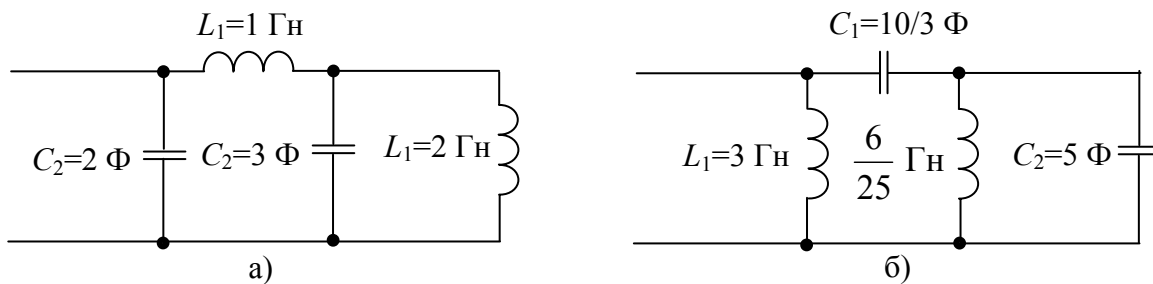


Рис. 4.17 — Двухполюсники, реализованные по первой (а) и второй (б) формам Кауэра

Выполняя деление в соответствии со второй формой Кауэра,

$$\begin{array}{r}
 12p^4 + 12p^2 + 1 \overline{) 6p^3 + 3p} \\
 \underline{12p^4 + 10p^2} \phantom{+ 1} \\
 2p^2 + 1 \overline{) \frac{1}{3p}} \\
 \underline{2p^2 + 1} \\
 0
 \end{array}$$

получаем дробь вида

$$Y(p) = \frac{1}{3p} + \frac{1}{\frac{3}{10p} + \frac{1}{\frac{25}{6p} + \frac{1}{5p}}},$$

которая реализуется двухполюсником, электрическая схема которого изображена на рис. 4.17, б.

## 5. СВОЙСТВА ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

### 5.1. Свойства передаточной функции реализуемого четырехполюсника

Линейные четырехполюсники с постоянными параметрами описываются линейным дифференциальным уравнением, которое можно представить в виду

$$\begin{aligned} b'_m \frac{d^m S_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^m} + b'_{m-1} \frac{d^{m-1} S_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b'_1 \frac{d S_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + b'_0 S_{\text{ВЫХ}}(t) = \\ = a'_n \frac{d^n S_{\text{ВХ}}(t)}{dt^n} + a'_{n-1} \frac{d^{n-1} S_{\text{ВХ}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a'_1 \frac{d S_{\text{ВХ}}(t)}{dt} + a'_0 S_{\text{ВХ}}(t), \end{aligned}$$

где  $S_{\text{ВХ}}(t)$  и  $S_{\text{ВЫХ}}(t)$  — входной и выходной сигналы четырехполюсника, которые могут представлять собой напряжения или токи;  $a'_0, a'_1 \dots a'_n, b'_0, b'_1 \dots b'_m$  — положительные постоянных коэффициенты, зависящие от вида цепи и параметров ее элементов.

Преобразуя дифференциальное уравнение четырехполюсника по Лапласу, получаем

$$\begin{aligned} S_{\text{ВЫХ}}(p)p^m + b_{m-1}S_{\text{ВЫХ}}(p)p^{m-1} + \dots + b_1S_{\text{ВЫХ}}(p)p + b_0S_{\text{ВЫХ}}(p) = \\ = H \left[ S_{\text{ВХ}}(p)p^n + a_{n-1}S_{\text{ВХ}}(p)p^{n-1} + \dots + a_1S_{\text{ВХ}}(p)p + a_0S_{\text{ВХ}}(p) \right], \end{aligned}$$

где  $H = a_n/b_m$ ,  $b_i = b'_i/b'_m$ ,  $a_i = a'_i/a'_n$  — постоянные коэффициенты.

Откуда находим передаточную функцию четырехполюсника

$$K(p) = \frac{S_{\text{ВЫХ}}(p)}{S_{\text{ВХ}}(p)} = H \frac{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + a_{n-1}b_1p + b_0} = H \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (5.1)$$

где  $A(p)$ ,  $B(p)$  — полиномы числителя и знаменателя передаточной функции.

Если передаточная функция имеет простые (некратных) полюса, то импульсная характеристика четырехполюсника, может быть найдена по формуле,

$$h(t) = \sum_{i=1}^m D_i e^{p_i t} \quad (5.3)$$

где  $D_i = \frac{HA(p_i)}{\left. \frac{dB(p)}{dp} \right|_{p=p_i}}$  — вычет передаточной функции в полюсе  $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ .

В соответствии с законом причинно-следственной связи импульсная характеристика устойчивого линейного четырехполюсника должна начинаться в момент поступления на ее вход импульсного воздействия и с течением времени стремится к нулю, поскольку переходный процесс, вызванный воздействием, имеющим конечную энергию, может длиться конечное время. Из формулы (5.3) следует, что импульсная характеристика будет затухающей, если все полюса передаточной функции имеют отрицательную вещественную часть, т. е. все полюса расположены в левой полуплоскости переменной  $p$ .

Кроме того, АЧХ реализуемого четырехполюсника на любой частоте должна иметь конечное значение и при увеличении частоты стремится к постоянному значению или к нулю, поскольку бесконечное значение АЧХ на некоторой частоте соответствует возбуждению це-

пи на этой частоте.

Таким образом, реализуемая передаточная функция  $K(p)$  должна удовлетворять следующим условиям:

- полюса передаточной функции должны быть вещественными или попарно комплексно-сопряженными и располагаться в левой полуплоскости переменной  $p$ , т. е. полином знаменателя должен быть полиномом Гурвица;
- степень полинома числителя передаточной функции не должна быть больше степени полинома ее знаменателя.

## 5.2. Особенности минимально-фазовых и неминимально-фазовых четырехполюсников

*Минимально-фазовыми* называются четырехполюсники, у которых все полюса и нули передаточные функции расположены только в левой полуплоскости переменной  $p$ .

*Неминимально-фазовыми* называются четырехполюсники, у которых все полюса передаточной функции расположены в левой полуплоскости, а нули — как в левой, так и в правой полуплоскости переменной  $p$ .

У передаточной функции минимально-фазовой цепи как числитель, так и знаменатель представляют собой полиномы Гурвица. При этом фазовый сдвиг, вносимый цепью, при прохождении через нее гармонического сигнала, является минимальным на любой частоте, по сравнению с неминимально-фазовой цепью, имеющей полюса и порядок полиномов числителя и знаменателя такие же, как и минимально-фазовая цепь.

### Пример 5.1

Для подтверждения выше сказанного рассмотрим передаточные функции минимально-фазовой цепи

$$K_1(p) = \frac{p+2}{p+3}$$

и неминимально-фазовой цепи

$$K_2(p) = \frac{p-2}{p+3}.$$

Из диаграммы расположения нулей и полюсов (рис. 5.1) видно, что полюса передаточных функций обеих цепей равны и расположены в левой полуплоскости переменной  $p$ . Ноль передаточной функции минимально-фазовой цепи расположен в левой полуплоскости, а ноль передаточной функции неминимально-фазовой цепи расположен в правой полуплоскости переменной  $p$ .

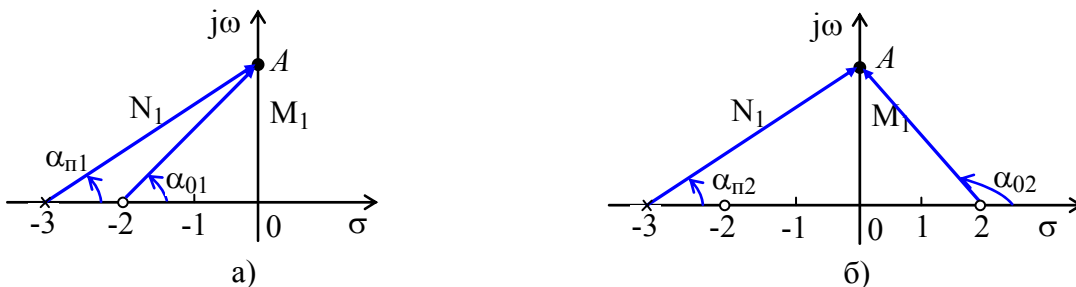


Рис. 5.1 — Расположение нулей и полюсов функции передаточных функций минимально-фазовой (а) и неминимально-фазовой (б) цепей

Модули коэффициентов передачи цепей равны

$$K_1(\omega) = K_2(\omega) = \frac{M_1}{N_1} = \frac{M_2}{N_2} = \sqrt{\frac{\omega^2 + 4}{\omega^2 + 9}},$$

где  $\omega$  — текущая частота, соответствующая положению точки  $A$  на положительной мнимой полуоси, а их аргументы  $\varphi_1(\omega) = \alpha_{01} - \alpha_{п1}$  и  $\varphi_2(\omega) = \alpha_{02} - \alpha_{п2}$  различны.

Так как  $\alpha_{01} < \alpha_{02}$ , а  $\alpha_{п1} = \alpha_{п2}$ , то  $\varphi_1(\omega) < \varphi_2(\omega)$ , т. е. аргумент комплексного коэффициента передачи минимально-фазовой цепи меньше аргумента комплексного коэффициента передачи неминимально-фазовой цепи.

### 5.3. Влияние расположения нулей и полюсов передаточной функции четырехполюсника на его частотные и временные характеристики

Рассмотрим более детально различные случаи расположения нулей и полюсов передаточной функции линейной цепи на плоскости переменной  $p$  и их влияние на характеристики цепи.

1. *Нуль в начале координат*  $p_{0i} = 0$  соответствует передаточной функции, у которой в числителе отсутствует свободный член  $a_0 = 0$ . АЧХ такой цепи имеет нулевое значение на частоте  $\omega = 0$ , т. е. цепь не пропускает постоянную составляющую входного сигнала и подавляет нижние частоты. Следовательно, такая цепь представляет собой фильтр верхних частот.

2. *Нуль в бесконечности*  $p_{0i} = \infty$  имеет место, если степень полинома числителя передаточной функции меньше степени полинома знаменателя  $n < m$ . При этом АЧХ цепи стремится к нулю при бесконечном увеличении частоты, т. е. цепь подавляет верхние частоты. Следовательно, такая цепь представляет собой фильтр нижних частот.

3. *Два нуля*, один из которых располагается **в начале координат**  $p_{0i} = 0$ , а другой **в бесконечности**  $p_{0k} = \infty$ , свидетельствуют о том, что цепь подавляет как нижние, так и верхние частоты, т. е. представляет собой полосовой фильтр.

4. *Полюс первого порядка в начале координат*  $p_{пi} = 0$  соответствует передаточной функции, у которой в знаменателе отсутствует свободный член  $b_0 = 0$ ,

$$K(p) = H \frac{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}{p(p^{m-1} + b_{m-1}p^{m-2} + \dots + b_2p + b_1)}, \quad (5.4)$$

и вызывает появление в разложении (5.3) импульсной характеристики экспоненциальной составляющей с нулевым показателем степени, т. е. постоянной составляющей  $Ha_0$ . Наличие в импульсной характеристике постоянной составляющей является признаком нереализуемости пассивного четырехполюсника, поскольку такая составляющая обладает бесконечной энергией, тогда как импульсная характеристика является реакцией цепи на единичный импульс, энергия которого конечна.

5. *Полюс второго порядка в начале координат*  $p_{пi} = p_{п(i+1)} = 0$  соответствует передаточной функции

$$K(p) = H \frac{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}{p^2(p^{m-2} + b_{m-1}p^{m-3} + \dots + b_2)} \quad (5.5)$$

и вызывает появление в импульсной характеристике цепи линейно нарастающей составляющей  $Ha_0t$ , существование которой в импульсной характеристике является признаком нереа-

лизуемости пассивного четырехполюсника по причине, аналогичной той, которая была указана в предыдущем пункте.

6. *Вещественный отрицательный полюс*  $p_{\Pi i} = -\sigma_i < 0$ , расположенный на вещественной оси в левой полуплоскости переменной  $p$ , соответствует появлению в импульсной характеристике цепи убывающей экспоненциальной составляющей  $A_i e^{-\sigma_i t}$ .

7. *Вещественный положительный полюс*  $p_{\Pi i} = \sigma_i > 0$ , расположенный на вещественной оси в правой полуплоскости переменной  $p$ , соответствует появлению в импульсной характеристике цепи нарастающей экспоненциальной составляющей  $A e^{\sigma_i t}$ , что является признаком неустойчивости четырехполюсника.

8. *Пара простых комплексно сопряженных полюсов*  $p_{\Pi i} = -\sigma_i + j\omega_i$ ,  $p_{\Pi(i+1)} = -\sigma_i - j\omega_i$  в левой полуплоскости переменной  $p$ , соответствует появлению в импульсной характеристике четырехполюсника затухающего по амплитуде колебания  $A_i e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \theta_i)$  с частотой  $\omega_i$  и экспоненциальной огибающей  $A_i e^{-\sigma_i t}$ .

9. *Пара простых комплексно сопряженных полюсов*  $p_{\Pi i} = j\omega_i$ ,  $p_{\Pi(i+1)} = -j\omega_i$  на мнимой оси, появлению в импульсной характеристике четырехполюсника незатухающего по амплитуде колебания  $A_i \cos(\omega_i t + \theta_i)$  с частотой  $\omega_i$ , амплитудой  $A_i$  и начальной фазой  $\theta_i$ , что является признаком неустойчивости четырехполюсника.

10. *Пара простых комплексно сопряженных полюсов*  $p_{\Pi i} = \sigma_i + j\omega_i$ ,  $p_{\Pi(i+1)} = \sigma_i - j\omega_i$  в правой полуплоскости переменной  $p$  соответствует появлению в импульсной характеристике четырехполюсника нарастающего по амплитуде колебания  $A_i e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \theta_i)$  с частотой  $\omega_i$  и экспоненциальной огибающей  $A_i e^{\sigma_i t}$ , что является признаком неустойчивости четырехполюсника.

Таким образом, при синтезе четырехполюсника по заданной передаточной функции важное значение имеет предварительный анализ расположения нулей и полюсов этой функции на комплексной плоскости, что позволяет сделать предварительное заключение о реализуемости заданной функции.

#### 5.4. Свойство модуля комплексного коэффициента передачи реализуемого четырехполюсника

Если известна передаточная функция  $K(p)$ , то соответствующий ей комплексный коэффициент передачи  $K(j\omega)$  может быть найден путем замены переменной  $p$  на  $j\omega$ .

Выполнив указанную подстановку в формуле (5.1), получим комплексный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = H \frac{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}{(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}. \quad (5.6)$$

Так как при  $n$  четном

$$(j\omega)^n = (-1)^{n/2} \omega^n,$$

а при нечетном

$$(j\omega)^n = j(-1)^{(n-1)/2} \omega^n,$$

то коэффициенты полиномов числителя и знаменателя функции (5.6) при четных степенях переменной  $\omega$  будут вещественными числами, а при нечетных степенях — мнимыми.

Группируя члены полиномов числителя и знаменателя с четными и нечетными степе-



нями и вынося общий множитель  $j\omega$  слагаемых с нечетными степенями, преобразуем (5.6) к виду

$$K(j\omega) = H \frac{A_1(\omega^2) + j\omega A_2(\omega^2)}{B_1(\omega^2) + j\omega B_2(\omega^2)} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (5.7)$$

где  $A_1(\omega^2)$ ,  $A_2(\omega^2)$ ,  $B_1(\omega^2)$ ,  $B_2(\omega^2)$  — вещественные полиномы четной степени.

Тогда АЧХ и ФЧХ, соответствующие комплексному коэффициенту передачи (5.7), будут иметь вид:

$$K(\omega) = H \sqrt{\frac{A_1^2(\omega^2) + \omega^2 A_2^2(\omega^2)}{B_1^2(\omega^2) + \omega^2 B_2^2(\omega^2)}}; \quad (5.8)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega A_2(\omega^2)}{A_1(\omega^2)} - \arctg \frac{\omega B_2(\omega^2)}{B_1(\omega^2)}. \quad (5.9)$$

С учетом (5.8) квадрат модуля комплексного коэффициента передачи представляет собой четную вещественную функцию переменной  $\omega$

$$\begin{aligned} K^2(\omega) &= K(j\omega)K(-j\omega) = H^2 \frac{A_1^2(\omega^2) + \omega^2 A_2^2(\omega^2)}{B_1^2(\omega^2) + \omega^2 B_2^2(\omega^2)} = \\ &= H^2 \frac{\omega^{2n} + c_{n-1}\omega^{2n-2} + \dots + c_1\omega^2 + c_0}{\omega^{2m} + d_{m-1}\omega^{2m-2} + \dots + d_1\omega^2 + d_0}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $d_0, d_1, \dots, d_{m-1}, d_m, c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n$  — постоянные коэффициенты, определяемые параметрами цепи.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

— модуль и аргумент комплексного коэффициента передачи являются трансцендентными функциями частоты  $\omega$ , что усложняет их использование при решении задачи синтеза четырехполосников, особенно, в случаях, когда предъявляются требования одновременно как АЧХ, так и к ФЧХ;

— квадрат модуля комплексного коэффициента передачи является четной дробно-рациональной функцией частоты  $\omega$ , что делает его более удобным для аналитических расчетов.

### 5.5. Определение передаточной функции минимально-фазового четырехполосника по его АЧХ

Рассмотрим случай, когда задана АЧХ минимально-фазового четырехполосника, то есть задан модуль передаточной функции  $K(\omega)$ , и необходимо определить передаточную функцию в операторном виде и ФЧХ этого четырехполосника. Тогда с учетом (5.10) модуль передаточной функции можно представить в виде

$$K^2(\omega) = K(j\omega)K(-j\omega).$$

Производя в последнем выражении замену переменной  $j\omega = p$  и учитывая, что при такой замене  $\omega^{2n} = [-(j\omega)^2]^n$  преобразуется в  $[-(p)^2]^n = (-1)^n p^{2n}$ , получаем уравнение

$$K(p)K(-p) = H^2 \frac{(-1)^n p^{2n} + (-1)^{n-1} c_{n-1} p^{2n-2} + \dots + (-1)c_1 p^2 + c_0}{(-1)^m p^{2m} + (-1)^{m-1} d_{m-1} p^{2m-2} + \dots + (-1)d_1 p^2 + d_0} = (-1)^{n-m} \frac{W(p)}{V(p)} \quad (5.11)$$

Полиномы числителя  $W(p^2)$  и знаменателя  $V(p^2)$  функции (5.11) имеют вещественные коэффициенты и являются четными относительно переменной  $p$ . Известно, что если  $p_k$  является корнем четного полинома, то  $-p_k$  также является корнем этого полинома. От-

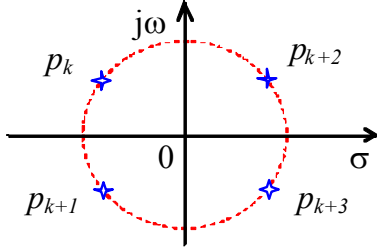


Рис. 5.2 — Расположение корней четного полинома

куда следует, что, одна половина нулей и полюсов функции (5.11) располагается в левой полуплоскости, другая — в правой полуплоскости симметрично относительно первой половины. В результате, комплексно сопряженных корни четных полиномов располагаются на плоскости переменной  $p$  по правилу квадратной симметрии (рис. 5.2). Согласно этому правилу каждой паре комплексно сопряженных корней  $p_k = -a + jb$ ,  $p_{k+1} = -a - jb$ , расположенных в левой полуплоскости комплексной переменной  $p$ , соответствует еще одна пара комплексно сопряженных корней  $-p_k = a - jb$

$-p_{k+1} = a + jb$ , расположенных в правой полуплоскости. Поскольку модули всех четырех корней равны, то на плоскости переменной  $p$  они располагаются на окружности с центром в начале координат.

Если нулям и полюсам, расположенным в левой полуплоскости, присвоить индекс “л”, а нулям и полюсам, расположенным в правой полуплоскости, — индекс “п”, то числитель и знаменатель дробной части уравнения (5.11) можно представить в виде произведения двух полиномов

$$W(p) = W_{\text{л}}(p)W_{\text{п}}(p), \quad (5.12)$$

$$V(p) = V_{\text{л}}(p)V_{\text{п}}(p), \quad (5.13)$$

где  $W_{\text{л}}(p)$  и  $V_{\text{л}}(p)$  — полиномы числителя и знаменателя, корни которых расположены в левой полуплоскости, а  $W_{\text{п}}(p)$  и  $V_{\text{п}}(p)$  — полиномы числителя и знаменателя, корни которых расположены в правой полуплоскости соответственно.

Так как полиномы  $W_{\text{л}}(p)$ ,  $V_{\text{л}}(p)$ , корни которых имеют отрицательную вещественную часть, являются *полиномами Гурвица*, то полиномы  $W_{\text{п}}(p)$ ,  $V_{\text{п}}(p)$ , корни которых имеют положительную вещественную часть и сопряжены с корнями полиномов  $W_{\text{л}}(p)$ ,  $V_{\text{л}}(p)$ , называются *сопряженными полиномами Гурвица*.

С учетом (5.12), (5.13) преобразуем правую часть уравнения (5.11)

$$K(p)K(-p) = (-1)^{n-m} \frac{W_{\text{л}}(p)}{V_{\text{л}}(p)} \frac{W_{\text{п}}(p)}{V_{\text{п}}(p)} = K_{\text{м}}(p) \frac{W_{\text{п}}(p)}{V_{\text{п}}(p)}.$$

где  $K_{\text{м}}(p) = (-1)^{n-m} \frac{W_{\text{л}}(p)}{V_{\text{л}}(p)}.$

Поскольку все нули и полюса функция  $K_{\text{м}}(p)$  располагаются в левой полуплоскости переменной  $p$ , то она может рассматриваться как передаточная функция минимально-фазовой цепи.

Функция  $K_{\text{м}}(p)$  с точностью до множителя  $(-1)^{n-m} = \pm 1$ , может быть записана в следующем виде

$$K(p) = K_m(p) = \pm \frac{W_{\text{л}}(p)}{V_{\text{л}}(p)}. \quad (5.14)$$

Заменяя в формуле (5.14) переменной  $p$  на  $j\omega$ , находим комплексный коэффициент передачи, что позволяет затем определить соответствующую ему ФЧХ.

Таким образом, зная АЧХ минимально-фазовой цепи можно определить ее передаточную функцию и ФЧХ, выполнив следующие преобразования:

- находят квадрат АЧХ  $K^2(\omega)$ ;
- в полученном выражении заменяют переменной  $j\omega$  на  $p$  и определяют корни полиномов числителя и знаменателя полученной функции;
- используя теорему Виета, выделяют в числителе и знаменателе полиномы  $W_{\text{л}}(p)$  и  $V_{\text{л}}(p)$ , корни которых располагаются в левой полуплоскости переменной  $p$ ;
- находят передаточную функцию минимально-фазовой цепи в виде рациональной дроби (5.14);
- заменяя в найденной передаточной функции переменную  $p$  на  $j\omega$ , находят комплексный коэффициент передачи  $K(j\omega)$  цепи и определяют его аргумент, который и представляет собой искомую ФЧХ.

Если заданной функцией минимально-фазовой цепи является ФЧХ  $\varphi(\omega)$ , то, используя преобразование Гильберта, можно найти логарифмическую функцию потерь (функцию затухания) цепи

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\omega - \xi} d\xi.$$

Тогда АЧХ и комплексный коэффициент передачи цепи будет определяться по формулам:

$$\begin{aligned} K(\omega) &= e^{-\alpha(\omega)}; \\ K(\omega) &= e^{-\alpha(\omega)} e^{j\varphi(\omega)}. \end{aligned}$$

Не смотря на кажущуюся простоту вычислений, определение АЧХ минимально-фазовой цепи по ее ФЧХ носит больше теоретический, чем практический характер, что обусловлено трудностями вычисления преобразования Гильберта. Поэтому преобразование Гильберта обычно используют для объяснения однозначной взаимосвязи вещественной и мнимой частей комплексного коэффициента передачи минимально-фазовой цепи.

## 5.6. Свойства передаточной функции неминимально-фазового четырехполюсника

Пусть задана передаточная функция  $K(p)$  устойчивой неминимально-фазовой цепи

$$K(p) = H \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (5.15)$$

у которой все полюса располагаются в левой полуплоскости, а некоторые нули или все — в правой полуплоскости переменной  $p$ .

Используя теорему Виета, можно из нулей, расположенных в левой полуплоскости, сформировать полином Гурвица  $W_{\text{л}}(p)$ , а из нулей расположенных в правой полуплоскости — сопряженный полином Гурвица  $\Psi_{\text{п}}(p)$ . Тогда передаточную функцию (5.15) можно представить в виде

$$K(p) = H \frac{W_{\text{л}}(p) \Psi_{\text{п}}(p)}{B(p)}. \quad (5.16)$$

Умножая числитель и знаменатель (5.16) на полином  $\Psi_{\text{л}}(p)$ , который сопряжен с полиномом  $\Psi_{\text{п}}(p)$  и корни которого расположены в левой полуплоскости переменной  $p$ , получаем

$$K(p) = H \frac{W_{\text{л}}(p) \Psi_{\text{л}}(p)}{B(p)} \frac{\Psi_{\text{п}}(p)}{\Psi_{\text{л}}(p)} = K_{\text{м}}(p) K_{\text{ф}}(p). \quad (5.17)$$

где

$$K_{\text{м}}(p) = H \frac{W_{\text{л}}(p) \Psi_{\text{л}}(p)}{B(p)}. \quad (5.18)$$

$$K_{\text{ф}}(p) = \frac{\Psi_{\text{п}}(p)}{\Psi_{\text{л}}(p)}. \quad (5.19)$$

Поскольку полиномы числителя и знаменателя функции (5.19) являются полиномами Гурвица, то эту функцию можно рассматривать как передаточную функцию некоторой минимально-фазовой цепи.

В свою очередь, функцию (5.20) можно рассматривать, как передаточную функцию некоторой неминимально-фазовой цепи, поскольку нули этой функции расположены в правой полуплоскости переменной  $p$ . Так как полиномы числителя и знаменателя функции (5.20) являются комплексно сопряженными, то они имеют равные модули  $|\Psi_{\text{п}}(p)| = |\Psi_{\text{л}}(p)|$  и противоположные по знаку аргументы  $\varphi_{\text{п}} = -\varphi_{\text{л}}$ .

Заменяя в (5.17) переменную  $p$  на  $j\omega$ , находим комплексный коэффициент передачи неминимально фазовой цепи

$$K(j\omega) = K_{\text{м}}(j\omega) K_{\text{ф}}(j\omega), \quad (5.20)$$

где

$$K_{\text{м}}(j\omega) = \frac{W_{\text{л}}(j\omega) \Psi_{\text{л}}(j\omega)}{B(j\omega)} \quad (5.21)$$

— комплексный коэффициент передачи минимально фазовой части цепи

$$K_{\text{ф}}(j\omega) = \frac{\Psi_{\text{п}}(j\omega)}{\Psi_{\text{л}}(j\omega)}. \quad (5.22)$$

— комплексный коэффициент передачи неминимально фазовой части цепи

Комплексный коэффициент передачи (5.22) определяет цепь, которая имеет во всем диапазоне частот равномерную АЧХ  $|K_{\text{ф}}(j\omega)| = 1$  и некоторую ФЧХ  $\varphi_{\text{ф}}(\omega) = 2\varphi_{\text{п}}(\omega)$ . Такие цепи называются *фазовыми фильтрами*, а реализуемый ими комплексный коэффициент передачи  $K_{\text{ф}}(j\omega)$  — *фазовым коэффициентом*, поскольку фазовый фильтр вносит изменения только в фазовый спектр сигнала, проходящего через фильтр, оставляя без изменения его амплитудный спектр.

Фазовые фильтры используются для коррекции только фазового спектра сигнала. Платой за такую возможность является сложность реализации фазовых фильтров. Например, пассивные фазовые фильтры реализуются в виде симметричных уравновешенных четырехполюсников, ни один из входов или выходов которых не должен быть соединен с общим проводом, т. е. не заземлен. При этом существенной проблемой является электромагнитная

совместимость фильтров.

Таким образом, из (5.20) следует, что любую неминимально-фазовую цепь можно реализовать в виде последовательного соединения физически реализуемой минимально-фазовой цепи и фазового фильтра.

### Пример 5.2

Задана передаточная функция

$$K(p) = \frac{p^2 - p + 1}{p^2 + p + 1}.$$

Определить вид цепи, соответствующий заданной передаточной функции. Построить АЧХ и ФЧХ, соответствующие заданной передаточной функции. Определить является ли заданная функция реализуемой.

### Решение

Решая уравнение  $p^2 + p + 1 = 0$ , находим полюса передаточной функции:

$$p_{п1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad p_{п1,2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решая уравнение  $p^2 - p + 1 = 0$ , находим нули передаточной функции:

$$p_{01} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad p_{02} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как нули передаточной функции расположены в правой полуплоскости, то эта функция соответствует неминимально-фазовой цепи. Поскольку на комплексной плоскости переменной  $p$  нули передаточной функции являются отражением ее полюсов относительно мнимой оси, то модуль передаточной функции будет равен единице. Это свидетельствует о том, что заданная передаточная функция соответствует фазовому фильтру.

Заменяя в заданной передаточной функции переменную  $p$  на  $j\omega$ , находим комплексный коэффициент передачи цепи

$$K(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 - j\omega}{1 - \omega^2 + j\omega}.$$

Определяем АЧХ и ФЧХ цепи:

$$|K(j\omega)| = 1;$$

$$\varphi(\omega) = -2\arctg \frac{\omega}{1 - \omega^2}.$$

Найденные частотные характеристики изображены на рис. 5.3,а и 5.3,б соответственно.

Так как АЧХ цепи равномерна во всем диапазоне частот, а ФЧХ неравномерна, то данная цепь вносит изменения только в фазовый спектр сигнала, не изменяя при этом его амплитудный спектр. Следовательно, цепь представляет собой фазовый фильтр. Поскольку ФЧХ на частоте  $\omega_0 = 1$  имеет максимальную скорость изменения, то на этой частоте цепи имеет наибольшее время задержки.

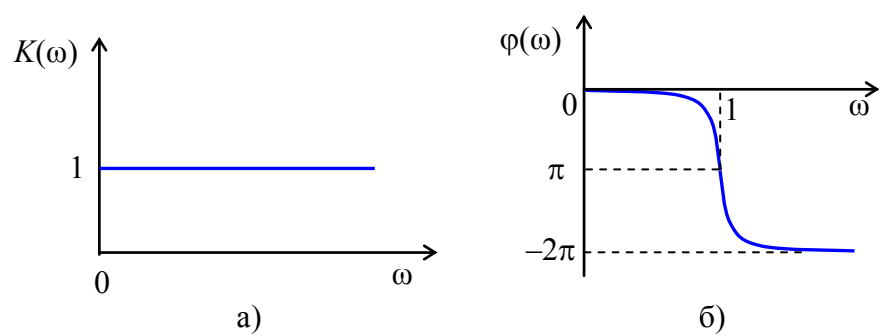


Рис. 5.3 — Частотные характеристики четырехполюсника: а — АЧХ, б — ФЧХ

## 6. СИНТЕЗ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

### 6.1. Методы реализации четырехполюсников по заданной передаточной функции

Реализация четырехполюсника предполагает переход от заданной передаточной функции к электрической схеме четырехполюсника и определение параметров элементов схемы.

Далее предполагается, что заданная передаточная функция удовлетворяет условиям реализуемости (см. п. 5.1). Если заданная передаточная функция не удовлетворяет условиям реализуемости, то ее аппроксимируют реализуемой функцией, которая с приемлемой точностью обеспечивает заданные характеристики четырехполюсника.

Наиболее широкое применение находят прямой и каскадный методы реализации передаточной функции.

*Метод прямой реализации* заключается в синтезе схемы четырехполюсника по заданной передаточной функции, без каких-либо ее преобразований. Наиболее просто реализуются передаточные функции первого или второго порядка путем их сравнения с передаточными функциями известных четырехполюсников того же порядка.

*Метод каскадной реализации* подразумевает разложение заданной передаточной функции на составляющие, каждая из которых может быть реализована прямым методом. При этом различают каскадно-последовательную и каскадно-параллельную реализацию.

*Каскадно-последовательная реализация* заключается в представлении передаточной функции в виде произведения более простых (элементарных) передаточных функций, реализуемых прямым методом

$$K(p) = \prod_{i=1}^m K_i(p), \quad (6.1)$$

где  $i = 1, 2 \dots m$  — номер элементарной функции;  $m$  — общее число элементарных функций;  $K_i(p)$  —  $i$ -ая элементарная передаточная функция.

В соответствии с разложением (6.1) структурная схема четырехполюсника (рис. 6.1) должна состоять из  $m$  последовательно соединенных каскадов, каждый из которых реализует один из сомножителей разложения.

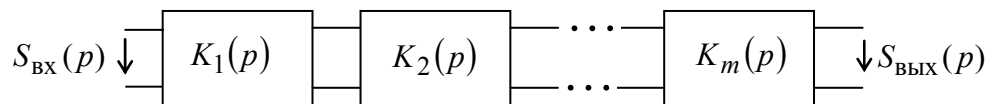


Рис. 6.1 — Каскадно-последовательная реализация четырехполюсника

Разложение (6.1) может быть выполнено на основании теоремы Виета путем преобразования полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (5.1) в произведения двучленов, число которых равно числу корней этих полиномов,

$$K(p) = H \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_{\pi 1})(p - p_{\pi 2}) \dots (p - p_{\pi m})}, \quad (6.2)$$

где  $p_{01}, p_{02} \dots p_{0n}$  — корни полинома числителя, которые называются нулями передаточной функции;  $p_{\pi 1}, p_{\pi 2} \dots p_{\pi m}$  — корни полинома знаменателя, которые называются полюсами передаточной функции.

Группируя двучлены числителя и знаменателя функции (6.2) можно получить различные каскадно-последовательные реализации передаточной функции.

*Каскадно-параллельная реализация* заключается в представлении передаточной функ-

ции в виде суммы элементарных передаточных функций, реализуемых прямым методом

$$K(p) = \sum_{i=1}^m K_i(p). \quad (6.3)$$

Разложению (6.3) соответствует реализация в виде структурной схема (рис. 6.2), состоящей из  $m$  параллельно соединенных каскадов, каждый из которых реализует одно из слагаемых разложения.

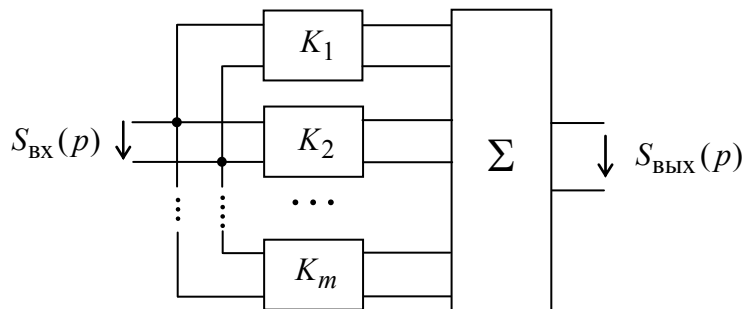


Рис. 6.2 — Каскадно-параллельная реализация четырехполюсника

При разложении передаточной функции по формулам (6.1), (6.3) необходимо соблюдать следующие правила:

составляющие разложения  $K_i(p)$  должны удовлетворять условию реализуемости;

степени полиномов числителя и знаменателя всех составляющих разложения  $K_i(p)$  должны быть меньше соответствующих степеней разлагаемой функции, т. е. составляющие разложения должны быть более простыми, чем исходная функция.

Каскадная реализация осуществляется с точностью до постоянного вещественного множителя, значение которого находят в процессе реализации.

Разложения (6.1), (6.3), как правило, выполняют так, чтобы составляющие разложения  $K_i(p)$  имели порядок не выше второго и могли быть реализованы прямым методом.

При выборе схемы четырехполюсников возможны следующие виды реализации:

— *пассивная реализация*, основанная на использовании пассивных цепей, состоящих только из  $RLC$ -элементов;

— *активная реализация*, основанная на использовании цепей, содержащих не только пассивные, но и активные элементы (транзисторы, операционные усилители и т. п.);

— *смешанная реализация*, основанная на использовании как активных, так и пассивных цепей.

Для успешной каскадной реализации необходимо исключить взаимное влияние каскадов друг на друга. Поэтому при реализации каскадов либо между ними включают буферные усилители (*каскадно-развязанной реализации*), либо обеспечить режим согласования каскадов (*каскадно-согласованная реализация*).

*Каскадно-развязанная реализация* наиболее просто осуществляется при использовании активных цепей, которые обычно строятся на основании операционных усилителей и  $RC$ -элементов. Такие каскады в литературе называют  $ARC$ -структурами (от англ. *Amplifier-Resistance-Capacity*), которые имеют большое входное  $R_{вх}$  и малое выходное  $R_{вых}$  сопротивления. Причем, чем больше  $R_{вх}$  и  $R_{вых}$  отличаются друг от друга, тем выше точность реализации заданной функции. Важным достоинством  $ARC$ -структур является то, что они достаточно хорошо реализуются в интегральном исполнении.

*Каскадно-согласованная реализация* может быть выполнена с использованием пассивных каскадов, имеющих одинаковые характеристические сопротивления. В этом случае, если



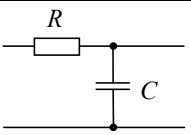
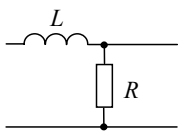
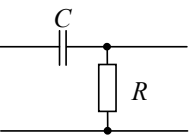
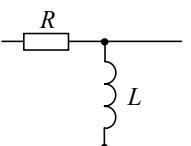
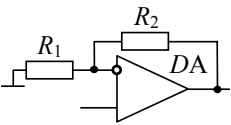
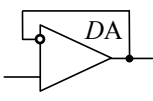
последний каскад нагружен на сопротивление нагрузки, равное характеристическому, то его входной сопротивление будет также равно характеристическому сопротивлению. В результате, при последовательном соединении каскадов все каскады будут работать в режиме согласования. Недостатком такой реализации является трудность согласования каскадов, имеющих комплексное характеристическое сопротивление. Рассогласования каскадов приводит к расхождению действительных и расчетных характеристик четырехполюсника.

Рассмотрим более детально перечисленные выше методы синтеза линейных четырехполюсников.

### 6.2. Реализация передаточных функций первого порядка

В таблице 6.1 приведены пассивные элементарные  $RC$ - или  $RL$ -четырёхполюсники, реализующие передаточную функцию первого порядка, а также типовые буферные каскады на операционном усилителе  $DA$ .

Таблица 6.1 — Схемы и передаточные функции четырехполюсников первого порядка

| № | Схема четырехполюсника                                                              | Передаточная функция $K(p)$                                                      | Тип схемы             |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1 |    | $\frac{\gamma}{p + \gamma}$ , где $\gamma = \frac{1}{RC}$                        | Фильтр нижних частот  |
| 2 |   | $\frac{1}{\beta \left( p + \frac{1}{\beta} \right)}$ , где $\beta = \frac{R}{L}$ | Фильтр нижних частот  |
| 3 |  | $\frac{p}{p + \gamma}$ , где $\gamma = \frac{1}{RC}$                             | Фильтр верхних частот |
| 4 |  | $\frac{p}{p + \frac{1}{\beta}}$ , где $\beta = \frac{R}{L}$                      | Фильтр верхних частот |
| 5 |  | $1 + \frac{R_2}{R_1}$                                                            | Буферный каскад       |
| 6 |  | 1                                                                                | Буферный каскад       |

### 6.3. Реализация передаточной функции второго порядка

В общем случае передаточная функция второго порядка имеет вид

$$K(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}, \quad (6.4)$$

Функция (6.4) называется биквадратной передаточной функцией, так как ее числитель и знаменатель являются квадратными полиномами. Возможно семь разновидностей функции (6.4), из которых пять реализуются в виде определенного типа фильтров (таблица 6.2.).

Почти все биквадратные фильтры, указанные в таблице 6.2 реализуются в виде активного  $RC$ -фильтра на операционном усилителе, который используется в качестве источника напряжения, управляемого напряжением. Применение операционных усилителей позволяет синтезировать активные  $RC$ -фильтры, передаточные функции которых имеет комплексные полюса, в отличие от передаточных функций пассивных  $RC$ -фильтров, имеющих только отрицательные вещественные полюса. Основным достоинством активные  $RC$ -фильтров является отсутствие индуктивностей, что повышает их надежность и позволяет реализовать в интегральном исполнении.

Таблица 6.2 — Передаточные функции второго порядка

| № | Передаточная функция                          | Нули функции                                               | Тип реализуемой схемы                                           |
|---|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1 | $\frac{a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}$               | $p_{01} = \infty$                                          | Фильтр нижних частот                                            |
| 2 | $\frac{a_1 p}{p^2 + b_1 p + b_0}$             | $p_{01} = 0; \quad p_{02} = \infty$                        | Полосно-пропускающий фильтр                                     |
| 3 | $\frac{a_2 p^2}{p^2 + b_1 p + b_0}$           | $p_{01} = p_{02} = 0$                                      | Фильтр верхних частот                                           |
| 4 | $\frac{a_2 p^2 + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}$     | $p_{01} = j\sqrt{a_0/a_2},$<br>$p_{01} = -j\sqrt{a_0/a_2}$ | Полосно-заграждающий (режекторный) фильтр                       |
| 5 | $\frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}$ |                                                            | Фазовый (всепропускающий) фильтр при $a_1 = -b_1$ и $a_0 = b_0$ |

В качестве примера рассмотрим реализацию передаточной функции фильтра нижних частот (ФНЧ)

$$K(p) = \frac{a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}, \quad (6.5)$$

Покажем, что аналогичную передаточную функцию имеет активный  $RC$ -каскад, схема которого изображена на рис. 6.3,а. В технической литературе такой каскад называется фильтром Салена-Ки (по имени ученых, предложивших данный фильтр в 1955 году).

Будем считать, что усилитель  $DA$  имеет коэффициент усиления  $K_0$ ; входное сопротивление  $R_{вх} \approx \infty$  и выходное сопротивление  $R_{вых} \approx 0$ . Следует отметить, что современные интегральные операционные усилители достаточно хорошо удовлетворяют указанным выше

значениям  $R_{\text{вх}}$  и  $R_{\text{вых}}$  в частотном диапазоне от постоянного тока до 10 МГц.

На рис. 6.3,б показана эквивалентная схема каскада, для которой справедливо следующее соотношение

$$K_0 = \frac{U_2}{U_3} = \frac{U_2}{I_3 \cdot \frac{1}{pC_2}} = \frac{U_2 pC_2}{I_1 + I_2}.$$

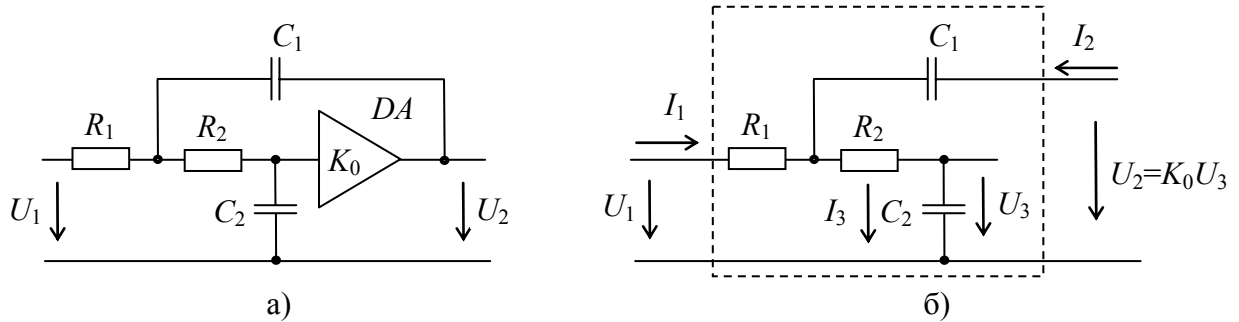


Рис. 6.3 — Электрическая (а) и эквивалентная (б) схемы активного  $RC$ -фильтра Салена-Ки

Откуда находим

$$I_2 = \frac{U_2 pC_2}{K_0} - I_1. \quad (6.6)$$

Запишем уравнения четырехполюсника, выделенного на рис. 6.3,б пунктирной линией:

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2; \\ U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2, \end{cases} \quad (6.7)$$

и определим его  $Z$ -параметры:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = R_1 + R_2 + \frac{1}{pC_2}; & Z_{12} &= \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = R_2 + \frac{1}{pC_2}; \\ Z_{21} &= \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = R_2 + \frac{1}{pC_2}; & Z_{22} &= \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = R_2 + \frac{1}{pC_1} + \frac{1}{pC_2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Подставляя (6.6) в уравнения системы (6.7) и преобразуя, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 = U_1 \frac{1}{Z_{11} - Z_{12}} - U_2 \frac{Z_{12} pC_2}{K_0(Z_{11} - Z_{12})}; \\ I_1 = U_2 \frac{Z_{22} pC_2 - K_0}{K_0(Z_{22} - Z_{21})}. \end{cases}$$

С учетом (6.8) определяем  $Z_{11} - Z_{12} = R_1$  и  $Z_{22} - Z_{21} = 1/pC_1$ . Подставляя в последнюю систему уравнений полученные выражения и недостающий  $Z$ -параметры (6.8), получаем

$$\begin{cases} I_1 = U_1 \frac{1}{R_1} - U_2 \frac{1 + pR_2C_2}{K_0R_1}; \\ I_1 = U_2 \frac{p^2R_2C_1C_2 + pC_2 + pC_1(1 - K_0)}{K_0}. \end{cases}$$

Приравнивая правые части уравнений и преобразуя, находим передаточную функцию фильтра

$$K(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{K_0}{R_1C_1R_2C_2}}{p^2 + \frac{1}{R_2C_2} \left( \frac{R_2C_2}{R_1C_1} + \frac{C_2}{C_1} + 1 - K_0 \right) p + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}. \quad (6.9)$$

Переходя к нормированной переменной  $p_n = p/\omega_0$ , где  $\omega_0 = 2\pi f_0$  — граничная частота фильтра, получаем

$$K(p_n) = \frac{\frac{K_0}{R_1C_1R_2C_2}}{\omega_0^2 p_n^2 + \frac{1}{R_2C_2} \left( \frac{R_2C_2}{R_1C_1} + \frac{C_2}{C_1} + 1 - K_0 \right) p_n + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}. \quad (6.10)$$

Для упрощения расчетов обычно принимают  $R_2C_2 = 1/\omega_0$ . Тогда формула (6.10) принимает вид

$$K(p_n) = \frac{\frac{K_0}{\omega_0 R_1 C_1}}{p_n^2 + \left( \frac{1}{\omega_0 R_1 C_1} + \frac{C_2}{C_1} + 1 - K_0 \right) p_n + \frac{1}{\omega_0 R_1 C_1}}. \quad (6.10)$$

Приравнивая коэффициенты полиномов знаменателей функций (6.5) и (6.9) и учитывая, что  $1/\omega_0 R_1 C_1 = b_0$ , получаем систему уравнений для расчета параметров элементов схемы:

$$\begin{cases} b_0 + \frac{C_2}{C_1} + 1 - K_0 = b_1; \\ \frac{1}{\omega_0 R_1 C_1} = b_0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Поскольку коэффициенты  $b_1$  и  $b_0$  знаменателя передаточной функции реализуемого фильтра должны быть положительными числом, то коэффициент усиления усилителя должен удовлетворять условию

$$K_0 < b_0 + \frac{C_2}{C_1} + 1 - b_1. \quad (6.12)$$

Следует иметь в виду, что при приближении коэффициент усиления к значению  $K_0 = b_0 + C_2/C_1 + b_0 - b_1$  на АЧХ фильтра появляется подъем на частоте близкой к  $\omega_0$ , а при выполнении условия  $K_0 \geq b_0 + C_2/C_1 + b_0 - b_1$  фильтр самовозбуждается на этой частоте.

При расчете фильтра обычно задаются или отношением сопротивлений  $R_2/R_1$  и значением одного из сопротивлений, или отношением емкостей  $C_2/C_1$  и значением одной из емкостей. Значения сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$  выбирают так, чтобы они были много меньше входного, но много больше выходного сопротивления усилителя, используемого в фильтре. Значения емкостей  $C_1$ ,  $C_2$  выбирают так, чтобы они были много больше паразитной емкости схемы  $C_{\Pi} = C_{\text{вх}} + C_{\text{м}}$ , где  $C_{\text{вх}}$  — входная емкость усилителя,  $C_{\text{м}}$  — емкость монтажа.

### Пример 6.1

Реализовать по схеме Саллена-Ки передаточную функцию ФНЧ второго порядка, имеющего граничную частоту  $f_0 = 10$  кГц, используя усилитель, входное сопротивление которого —  $R_{\text{вх}} = 100$  кОм, а выходное сопротивление —  $R_{\text{вых}} = 50$  Ом

$$K(p) = \frac{1}{p^2 + p + 2}.$$

### Решение

Полагая  $R_2 C_2 = 1/\omega_0$  и задавая отношение сопротивлений  $R_2/R_1 = 1$ , находим

$$R_1 = R_2 = 1/C_2 \omega_0.$$

Учитывая значения коэффициентов полинома знаменателя функции  $K(p)$ , составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 + \frac{C_2}{C_1} + 1 - K_0 = 1; \\ \frac{1}{\omega_0 R_1 C_1} = 2. \end{cases}$$

Подставляя (6.12) во второе уравнение системы, находим отношением емкостей  $C_2/C_1 = 2$ , подставляя которое в неравенство (6.12), получаем условие

$$K_0 < 2 + 2 + 1 - 1 = 4,$$

с учетом которого выбираем коэффициент усиления усилителя  $K_0 = 3$ .

Выбираем значение сопротивлений из условия

$$R_{\text{вх}} = 100 \text{ кОм} \gg R_1 = R_2 = 2 \text{ кОм} \gg R_{\text{вых}} = 50 \text{ Ом},$$

находим значения емкостей

$$C_2 = \frac{1}{\omega_0 R_2} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^3} = 7961 \text{ пФ}.$$

$$C_1 = \frac{C_2}{2} = \frac{7961}{2} = 3980 \text{ пФ}.$$

#### 6.4. Особенности расположения нулей и полюсов передаточных функций пассивных лестничных четырехполюсников

Лестничным четырехполюсником называется цепь (рис. 6.4), образованная чередующимися параллельными и последовательными ветвями.

При синтезе лестничных четырехполюсников большое значение имеет расположение нулей и полюсов заданной передаточной функции, поскольку оно позволяет в первом приближении правильно выбрать вид реализуемой схемы.

Для передаточной функции лестничного четырехполюсника характерны два вида нулей:

- нули, обусловленные равенством бесконечности сопротивление одной из последовательных ветвей  $Z_{si} = \infty$  ( $Y_{si} = 0$ );
- нули, обусловленные равенством нулю сопротивления одной из параллельных ветвей  $Z_{pi} = 0$  ( $Y_{pj} = \infty$ ).

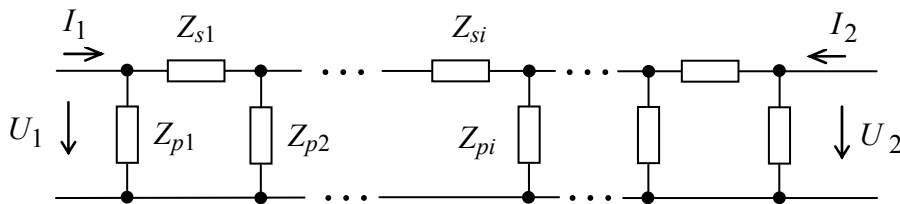


Рис. 6.4 — Лестничный четырехполюсник

Ранее было показано, что, если четырехполюсник представляет собой пассивную  $RL$ - или  $RC$ -цепь, то нули и полюса входного и выходного сопротивлений, а также входной и выходной проводимостей такой цепи являются отрицательными вещественными числами, которые располагаются на отрицательно вещественно полуоси комплексной плоскости  $p$  и чередуются между собой. В зависимости от типа используемых реактивных элементов (емкость или индуктивность) и места их включения (в последовательную ветвь или в параллельную) передаточная функция лестничной  $RC$ - или  $RL$ -цепи может иметь нули на нулевой частоте или на бесконечно большой частоте.

Например, в случае лестничной  $RC$ -цепи при включении емкости в качестве хотя бы одной из последовательных ветвей  $Z_{si}$ , передаточная функция цепи будет иметь нуль на нулевой частоте, так как сопротивление емкостной ветви на нулевой частоте бесконечно большое  $Z_{si} = \infty$ , что эквивалентно разрыву такой ветви (режим холостого хода). Если одна из параллельных ветвей  $Z_{pi}$  цепи представляет собой емкость, а предшествующая ей последовательная ветвь — сопротивление, то передаточная функция цепи будет иметь нуль в бесконечности, так как на бесконечно большой частоте сопротивление емкости равно нулю  $Z_{pi} = 0$ , что эквивалентно короткому замыканию такой ветви (режим короткого замыкания). В результате, в обоих случаях выходной сигнал цепи будет равен нулю.

Если четырехполюсник представляет собой реактивную  $LC$ -цепь без потерь и без взаимных индуктивностей (идеальная  $LC$ -цепь), то, как было показано ранее, нули и полюса входного и выходного сопротивлений, а также входной и выходной проводимостей такой цепи являются мнимыми числами, которые располагаются на мнимой оси комплексной плоскости  $p$ . Причем нули и полюса чередуются между собой. Нули передаточной функции такой лестничной  $LC$ -цепи совпадают с полюсами сопротивлений последовательных ветвей  $Z_{si}$ , представляющих собой идеальные параллельные  $LC$ -контур, а также с нулями сопротивлений параллельных ветвей  $Z_{pj}$ , представляющих собой идеальные последовательные  $LC$ -контур. Физически это объясняется тем, что на резонансной частоте идеальный парал-

лельный  $LC$ -контур эквивалентен разрыву цепи (режим холостого хода), а идеальный последовательный  $LC$ -контур — короткому замыканию цепи (режим короткого замыкания). В обоих случаях цепь не пропускает сигнал, поданный на вход.

Поскольку реальные  $LC$ -цепи имеют потери в элементах цепи, то переходные процессы в таких цепях носят характер затухающих колебаний. Поэтому полюса передаточных функций реальных  $LC$ -цепей содержат отрицательную вещественную часть, являются попарно комплексно сопряженными и в случае малых потерь располагаются в левой полуплоскости вблизи мнимой оси.

### 6.5. Реализация полиномиальной передаточной функции, имеющей отрицательные вещественные полюса

Полиномиальной передаточной функцией называется дробно-рациональная функция в виде отношение полиномов переменной  $p$ .

Рассмотрим реализацию полиномиальной передаточной функции вида

$$K(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_n p^n}{p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (6.10)$$

у которой  $n \leq m$  и полюса являются отрицательными вещественными числами, т.е. располагаются на отрицательной вещественной полуоси комплексной плоскости  $p$ .

Запишем уравнения четырехполюсника, используя  $Z$ -параметры,

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2; \\ U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2, \end{cases} \quad (6.11)$$

где  $U_1, U_2, I_1, I_2$  — входные и выходные напряжения и токи четырехполюсника;  $Z_{11}, Z_{22}, Z_{12}, Z_{21}$  — входное, выходное и передаточные сопротивления четырехполюсника, определяемые в режиме холостого хода.

С учетом (6.11) передаточная функция четырехполюсника в режиме холостого хода на выходе ( $I_2 = 0$ ), будет определяться следующим выражением

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} \Big|_{I_2=0} = \frac{Z_{21}(p)I_1(p)}{Z_{11}(p)I_1(p)} = \frac{Z_{21}(p)}{Z_{11}(p)}. \quad (6.12)$$

Из теории цепей известно, что параметры  $Z_{21}, Z_{11}$  лестничного четырехполюсника, содержащего параллельные ветви на входе и выходе (см. рис. 6.4), представляют собой рациональные дроби  $Z_{21} = n_{21}/d_{21}$ ,  $Z_{11} = n_{11}/d_{11}$ , имеющие одинаковые знаменатели, т.е.  $d_{21} = d_{11}$ .

Тогда передаточную функцию (6.12) можно представить в виде

$$K(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{n_{21}(p)}{n_{11}(p)}.$$

Откуда следует, что нули передаточной функции будут совпадать с нулями передаточного сопротивления  $Z_{21}(p)$ , а полюса — с нулями входного сопротивления  $Z_{11}(p)$ . Поскольку заданная передаточная функция имеет только вещественные отрицательные полюса,

то все нули функции  $Z_{11}(p)$  располагаются на отрицательной вещественной полуоси. Из теории синтеза двухполосников известно, что полюса сопротивления пассивных  $RC$ - или  $RL$ -двухполосников располагаются также на отрицательной вещественной полуоси и чередуются с нулями (см. п. 3.4). Тогда зная расположение нулей  $RC$ - или  $RL$ -двухполосника, можно выбрать расположение его полюсов и определить их значения. С помощью теоремы Виета по известным нулям и полюсам, можно составить функцию  $Z_{11}(p)$ , а затем по ней синтезировать лестничный двухполосник по методу Кауэра. Если узлы последней ветви такого двухполосника рассматривать как выходные полюса четырехполосника, то можно считать, что задача синтеза четырехполосника по заданной передаточной функции решена.

Таким образом, реализация полиномиальной передаточной функции может быть сведена к синтезу лестничного двухполосника, для чего необходимо выполнить следующие действия:

- определить полюса передаточной функции, т.е. найти корни уравнения  $B(p) = 0$ ;
- используя найденные полюса как нули сопротивления  $Z_{11}(p)$  выбрать его полюса так, чтобы они чередовались с нулями на отрицательной вещественной полуоси;
- по известным нулям и полюсам составить функцию  $Z_{11}(p)$ , используя теорему Виета;
- разложить функцию  $Z_{11}(p)$  по методу Кауэра в непрерывную цепную дробь, которая реализуется в виде лестничной цепи;
- определить вид и параметры элементов лестничной цепи, сопоставляя составляющих цепной дроби с системными функциями элементарных двухполосников (см. таблицу 4.1).

К недостаткам описанного метода реализации можно отнести следующее:

- метод применим только для реализации передаточных функций, имеющих простые отрицательные вещественные полюса, и не применим к передаточным функциям, имеющим комплексные полюса;
- поскольку метод предполагает, что цепь, будет работать в режиме холостого хода, то сопротивление нагрузки цепи должно либо быть достаточно большим по сравнению с её выходным сопротивлением, либо между синтезированной цепью и нагрузкой необходимо включить буферный каскад с большим входным сопротивлением и малым выходным сопротивлением, что усложняет реализацию.

### Пример 6.2

По заданной передаточной функции синтезировать лестничную цепь

$$K(p) = \frac{1}{p^2 + 6p + 8}.$$

Построить диаграмму расположения нулей и полюсов входного сопротивления синтезируемой цепи.

### Решение

Решая уравнение

$$p^2 + 6p + 8 = 0,$$

определяем его корни  $p_1 = -3 + \sqrt{9-8} = -2$  и  $p_2 = -3 - \sqrt{9-8} = -4$ , которые представляют собой полюса заданной передаточной функции.

Выбираем числитель сопротивления  $Z_{11}(p)$  равным знаменателю передаточной функ-



ции, т.е.  $n_{11}(p) = p^2 + 6p + 8$ .

Выбираем корни знаменателя сопротивления  $Z_{11}(p)$  так, чтобы они чередовались на отрицательной вещественной полуоси с полюса передаточной функции:  $p_{п1} = -1 > -2$  и  $-4 < p_{п2} = -3 < -2$ . Диаграмма расположения нулей и полюсов сопротивления  $Z_{11}(p)$  изображена на рис. 6.5.

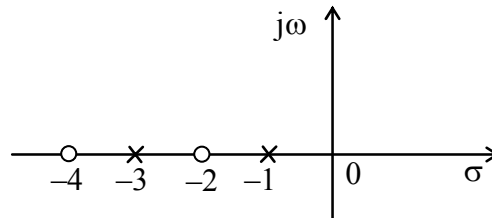


Рис. 6.5 — Диаграмма расположения нулей и полюсов входного сопротивления  $Z_{11}(p)$  синтезируемой цепи

Используя теорему Виета, составляем функцию входного сопротивления синтезируемой цепи

$$Z_{11}(p) = \frac{p^2 + 6p + 8}{(p+1)(p+3)} = \frac{p^2 + 6p + 8}{p^2 + 4p + 3}.$$

Преобразуем функцию  $Z_{11}(p)$  по методу Кауэра в цепную дробь

$$Z_{11}(p) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{\frac{4}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}p + 3}}},$$

которая реализуется в виде лестничной RC-цепи, показанной на рис. 6.6.

Сравнивая составляющие найденной цепной дроби с системными функциями элементарных двухполюсников (см. таблицу 4.1) определяем вид и параметры элементов цепи (рис. 6.6).

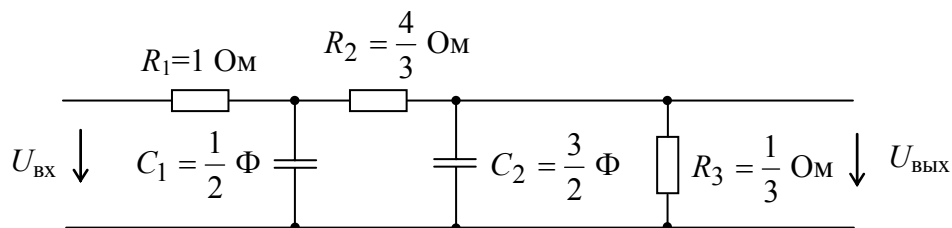


Рис. 6.6 — Лестничная RC-цепь, реализующая заданную передаточную функцию

При необходимости все параметры цепи могут быть денормированы с учетом заданной частоты нормирования  $\omega_0$ , делая замену переменных  $p = p_H \omega_0$ .

## 6.6. Свойства мостовых симметричных четырехполюсников с постоянным характеристическим сопротивлением

Мостовым четырехполюсником (мостовой цепью) называется цепь, обобщенная структура которой показана на рис. 6.7,а. Мостовой четырехполюсник состоит из четырех ветвей

(плеч) с сопротивлениями  $Z_1, Z_2, Z_3$  и  $Z_4$ , образующими замкнутый контур. Диагональные узлы мостового четырехполюсника 1, 1' образуют вход, а диагональные узлы 2, 2' — выход.

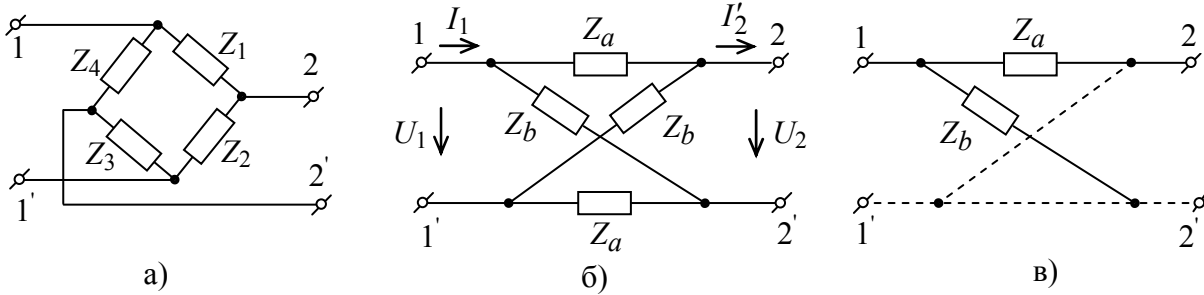


Рис. 6.7 — Электрические схемы мостового четырехполюсник: обобщенная (а), полная (б) и упрощенная (в) схемы симметричного мостового четырехполюсника

Отличительной особенностью мостового четырехполюсника является то, что ни один из входов не может быть соединен ни с одним из его выходов.

Мостовой четырехполюсник (рис. 6.7,б), у которого сопротивления противоположных плеч попарно равны  $Z_1 = Z_3 = Z_a$  и  $Z_2 = Z_4 = Z_b$ , называется *симметричным*, поскольку перемена местами его входных и выходных зажимов не изменяет токов и напряжений во внешней по отношению к четырехполюснику цепи.

Симметричный мостовой четырехполюсник называется *уравновешенным*, если его схема симметрична относительно продольной оси. Уравновешенные четырехполюсники предназначены для включения между генератором и нагрузкой, электрические схемы которых, в свою очередь, также должны быть симметричны относительно их продольных осей. Не следует путать условие уравновешенности мостового четырехполюсника с условием его баланса  $Z_a^2 = Z_b^2$ .

Далее рассматриваются только симметричные мостовые четырехполюсники, упрощенная схема которых показана на рис. 6.7,в.

Рассмотрим уравнения обобщенного мостового четырехполюсника (рис. 6.8,а), составленные с использованием  $A$ -параметров,

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2' \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2' \end{cases} \quad (6.13)$$

Известно, что для симметричного четырехполюсника выполняется условие

$$A_{11} = A_{22}. \quad (6.14)$$

Параметры  $A_{11}, A_{21}$  определяются в режиме холостого хода на выходе четырехполюсника, т.е. при  $\dot{I}_2' = 0$  (см. рис. 6.7,б):

$$A_{11} = A_{22} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2' = 0} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{\dot{U}_1 Z_b}{Z_a + Z_b} - \frac{\dot{U}_1 Z_a}{Z_a + Z_b}} = \frac{Z_a + Z_b}{Z_b - Z_a}; \quad (6.15)$$

$$A_{21} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_2=0} = \frac{\frac{\dot{U}_1}{(Z_a + Z_b)/2}}{\frac{\dot{U}_1 Z_b}{Z_a + Z_b} - \frac{\dot{U}_1 Z_a}{Z_a + Z_b}} = \frac{2}{Z_b - Z_a}. \quad (6.16)$$

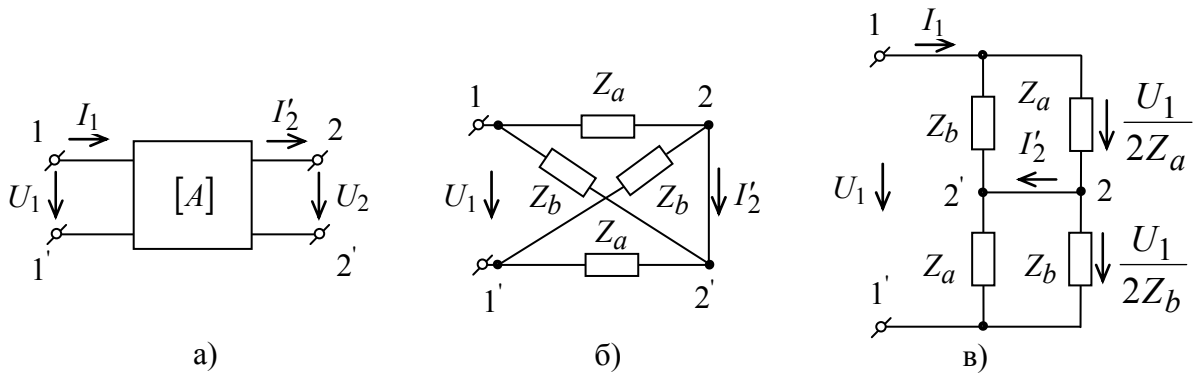


Рис.6.8 — Обобщенная схема четырехполюсника (а) и схемы мостового четырехполюсника (б, в), соответствующие режиму короткого замыкания на выходе

Параметр  $A_{12}$  определяется в режиме короткого замыкания на выходе (рис. 6.8,в). Поскольку сопротивления верхней и нижней частей цепи (рис. 6.8,в) одинаковы, то напряжения  $\dot{U}_1$  на каждой из них будет равно  $\dot{U}_1/2$ . Тогда

$$A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2'} \Big|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{\dot{U}_1}{2Z_a} - \frac{\dot{U}_1}{2Z_b}} = \frac{2Z_a Z_b}{Z_b - Z_a}. \quad (6.17)$$

Из теории цепей известно, что если сопротивление нагрузки симметричного четырехполюсника равно его *характеристическому сопротивлению*  $Z_c$ , то входное сопротивление такого четырехполюсника также равно характеристическому сопротивлению

$$Z_{\text{вх}} = Z_c. \quad (6.18)$$

Рассмотрим симметричный мостовой четырехполюсник, нагруженный со стороны зажимов 2-2' сопротивлением, равным характеристическому  $Z_c$  (рис. 6.9).

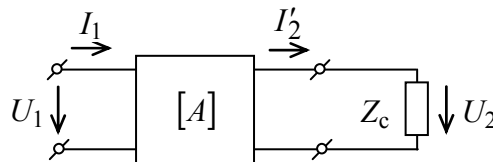


Рис. 6.9 — Обобщенная схема четырехполюсника, нагруженного характеристическим сопротивлением

Используя уравнения (6.13), определим входное сопротивление четырехполюсника

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2'}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2'} = \frac{A_{11}Z_c + A_{12}}{A_{21}Z_c + A_{22}}. \quad (6.19)$$

Преобразуя (6.19) с учетом (6.14) и (6.18), получаем уравнение

$$Z_c = \frac{A_{11}Z_c + A_{12}}{A_{21}Z_c + A_{11}},$$

решая которое, находим

$$Z_c = \sqrt{A_{12}/A_{21}}. \quad (6.20)$$

Подставляя  $A$ -параметры (6.15)...(6.17) в (6.20), получаем

$$Z_c = \sqrt{\frac{2Z_a Z_b / (Z_b - Z_a)}{2/(Z_b - Z_a)}} = \sqrt{Z_a Z_b}. \quad (6.21)$$

С учетом первого уравнения системы (6.13) определим передаточную функцию четырехполюсника, нагруженного на характеристическое сопротивление  $Z_c$ ,

$$K(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2'} = \frac{1}{A_{11} + A_{12} \frac{\dot{I}_2'}{\dot{U}_2}} = \frac{1}{A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_c}}.$$

Подставляя в полученное выражение  $A$ -параметры (6.15) и (6.17) в операторном виде и учитывая (6.21), находим

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{1}{\frac{Z_a + Z_b}{Z_b - Z_a} + \frac{2Z_a Z_b}{(Z_b - Z_a)\sqrt{Z_a Z_b}}} = \frac{Z_b - Z_a}{Z_a + 2\sqrt{Z_a Z_b} + Z_b} = \\ &= \frac{(\sqrt{Z_b})^2 - (\sqrt{Z_a})^2}{(\sqrt{Z_b} + \sqrt{Z_a})^2} = \frac{\sqrt{Z_b} - \sqrt{Z_a}}{\sqrt{Z_b} + \sqrt{Z_a}}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Наиболее просто согласование четырехполюсников реализуется, если их характеристическое сопротивление являлось вещественной постоянной величиной  $Z_c = R_c$ . Тогда с учетом (6.21) сопротивления  $Z_b$  и  $Z_a$  связаны между собой следующим соотношением

$$Z_b = \frac{R_c^2}{Z_a}. \quad (6.23)$$

Отсюда следует, что, задавая сопротивление  $Z_a$  в виде реализуемой функции, можно найти реализуемое сопротивление  $Z_b$ .

Подставляя (6.23) в (6.22), находим передаточную функцию мостового четырехполюсника с постоянным характеристическим сопротивлением

$$K(p) = \frac{\frac{R_c}{\sqrt{Z_a}} - \sqrt{Z_a}}{\frac{R_c}{\sqrt{Z_a}} + \sqrt{Z_a}} = \frac{R_c - Z_a}{R_c + Z_a}. \quad (6.24)$$

### 6.7. Реализация заданной передаточной функции мостовым симметричным четырехполюсником с постоянным характеристическим сопротивлением

В теории цепей показано, что мостовой симметричный четырехполюсник с активным характеристическим сопротивлением  $Z_c = R_c$  может быть использован для реализации почти всех передаточных функций  $K(p)$  как минимально-фазовых, так и неминимально-фазовых цепей.

Действительно, по заданной реализуемой передаточной функции, решая уравнение (6.25) относительно  $Z_a$ , находим

$$Z_a(p) = R_c \frac{1 - K(p)}{1 + K(p)}. \quad (6.26)$$

где  $K(p)$  — заданная передаточная функция.

Подставляя (6.26) в (6.24), получаем выражение, определяющее сопротивление  $Z_b$

$$Z_b(p) = R_c \frac{1 + K(p)}{1 - K(p)}. \quad (6.27)$$

Если найденные сопротивления  $Z_a(p)$  и  $Z_b(p)$  имеют порядок не выше второго, то они реализуются непосредственно путем их сравнения с табличными величинами (см. таблицу 4.1). В случае, если порядок сопротивлений  $Z_a(p)$  и  $Z_b(p)$  выше второго, то они могут быть реализованы одним из известных способов, например, по Фостеру или по Кауэру.

Рассмотренный метод реализации передаточной функции имеет следующие недостатки:

- сложность реализации;
- отсутствие общего узла для входных и выходных зажимов четырехполюсника;
- трудность интегрального исполнения четырехполюсника, обусловленная наличием в нем индуктивностей.

#### Пример 6.3

Необходимо реализовать передаточная функция  $K(p) = \frac{p + 10^6}{p + 2 \cdot 10^6}$  мостовым симметричным четырехполюсником с постоянным характеристическим сопротивлением  $R_c = 75 \text{ Ом}$ .

#### Решение

Определяем нуль  $p_{01} = -10^6$  и полюс  $p_{п1} = -2 \cdot 10^6$  передаточной функции. Поскольку найденные значения располагаются на вещественной полуоси в левой полуплоскости, то передаточная функция является реализуемой.

Используя формулы (6.26) и (6.27), рассчитываем комплексные сопротивления ветвей мостового четырехполюсника:

$$Z_a = R_c \frac{1 - K(p)}{1 + K(p)} = 75 \frac{1 - \frac{p + 10^6}{p + 2 \cdot 10^6}}{1 + \frac{p + 10^6}{p + 2 \cdot 10^6}} = \frac{75 \cdot 10^6}{2p + 3 \cdot 10^6} = \frac{1}{\frac{1}{25} + \frac{2}{75} 10^{-6} p};$$

$$Z_b = \frac{R_c^2}{Z_a} = \frac{75^2}{\frac{75 \cdot 10^6}{2p + 3 \cdot 10^6}} = 75 \cdot 10^{-6} \cdot (2p + 3 \cdot 10^6) = 225 + 150 \cdot 10^{-6} p.$$

Сравнение найденных величин с сопротивлениями элементарных двухполюсников (см. таблицу 4.1), показывает, что ветвь с сопротивлением  $Z_a$  может быть реализовано в виде параллельного соединения сопротивления  $R_a = 25$  Ом и емкости  $C_a = \frac{2}{75}$  мкФ (рис. 6.10,а), а ветвь с сопротивлением  $Z_b$  — в виде последовательного соединения сопротивления  $R_b = 225$  Ом и индуктивности  $L_b = 150$  мкГн (рис. 6.10,б).

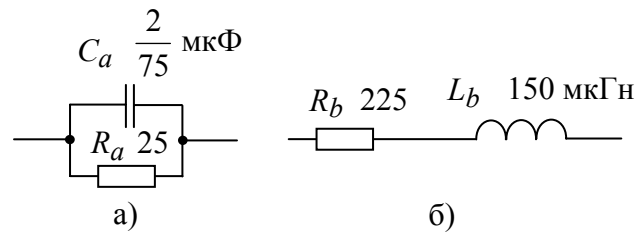


Рис. 6.10 — Электрические схемы ветвей мостового четырехполюсника

С учетом полученных результатов составляем схему мостового симметричного четырехполюсника (рис. 6.11).

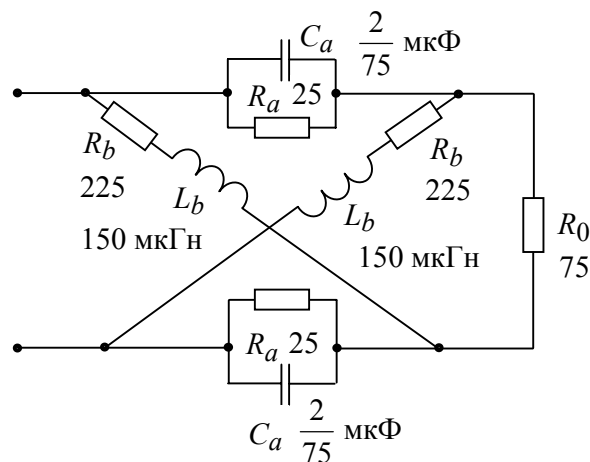


Рис. 6.11 — Электрическая схема синтезированного мостового четырехполюсника

## 7. СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

### 7.1. Виды фильтров и предъявляемые к ним требования

*Электрическим фильтром* называется четырехполюсник, который пропускает колебания в заданном диапазоне частот, называемом полосой пропускания, и подавляет колебания в области частот вне этого диапазона, называемой полосой задерживания (подавления).

По взаимному расположению полос пропускания и задерживания различают следующие типы фильтров: фильтр нижних частот (ФНЧ), фильтр верхних частот (ФВЧ), полосно-пропускающий фильтр (ПФ), полосно-заграждающий фильтр (ЗФ).

Ширина спектра сигналов, используемых в радиоэлектронных устройствах, практически всегда ограничена некоторым частотным диапазоном, выбор которого производится с учетом характеристик передаваемого сообщения, назначения устройства, помеховой обстановкой, требованиями электромагнитной совместимости и т. п.

Основным требованием, предъявляемых к фильтрам, является выделение полезного сигнала, содержащего информацию, из смеси сигнала с помехой и подавление составляющих спектра помехи, частота которых находится за пределами диапазона частот, занимаемого спектром сигнала. При этом под помехой понимают любой сигнал, искажающий полезный сигнал, (внешние и внутренние шумы, сигналы сторонних электронных устройств и т. п.).

### 7.2. Характеристики неискажающего фильтра

*Неискажающим* называют фильтр, который обеспечивает неискаженную (идеальную) передачу сигнала и полное подавление помех, спектр которых не перекрывается со спектром сигнала.

Так как скорость распространения сигнала в реальных цепях является конечной величиной, то сигнал на выходе неискажающего фильтра  $S_{\text{ВЫХ}}(t)$ , будет всегда запаздывать относительно входного сигнала  $S_{\text{ВХ}}(t)$  на некоторое время задержки  $t_0$  (рис. 7.1).

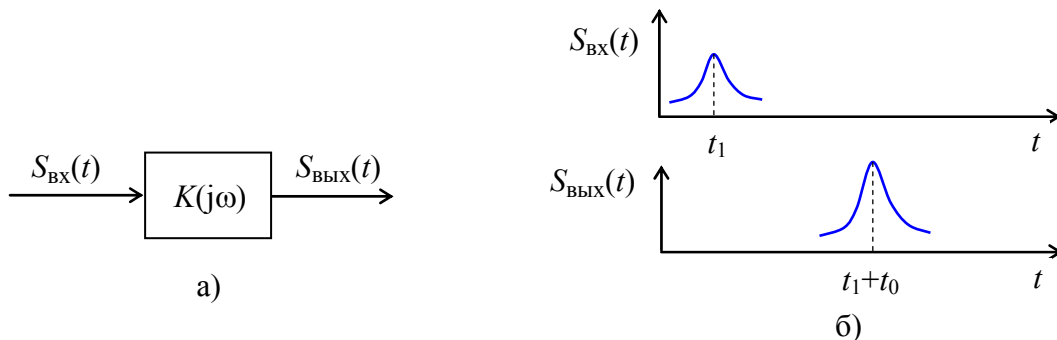


Рис. 7.1 — Неискажающий фильтр (а) и временные диаграммы сигналов (б) на его входе  $S_{\text{ВХ}}(t)$  и выходе  $S_{\text{ВЫХ}}(t)$

Тогда сигнал на выходе неискажающего фильтра можно представить в виде

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = K_0 S_{\text{ВХ}}(t - t_0), \quad (7.1)$$

где  $A_0$  — масштабный коэффициент пропорциональности между выходным и входным сигналами;  $t_0$  — временной сдвиг выходного сигнала по отношению к входному сигналу.

Пусть спектр входного сигнала ограничен по ширине и находится в диапазоне частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ . Тогда с учетом (7.1) спектры выходного и входного сигналов связаны следующим соотношением

$$S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = K_0 S_{\text{ВХ}}(j\omega) e^{-j\omega t_0}, \quad (7.2)$$

С другой стороны спектральная плотность выходного сигнала фильтра определяется следующим выражением

$$S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = \begin{cases} S_{\text{ВХ}}(j\omega) K(j\omega) & \text{при } \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2; \\ 0 & \text{при } |\omega| \leq \omega_1 \text{ и } |\omega| \geq \omega_2, \end{cases} \quad (7.3)$$

где  $K(j\omega)$  — комплексный коэффициент передачи фильтра.

На рис. 7.2. изображены АЧХ и ФЧХ неискажающих ФНЧ и ПФ.

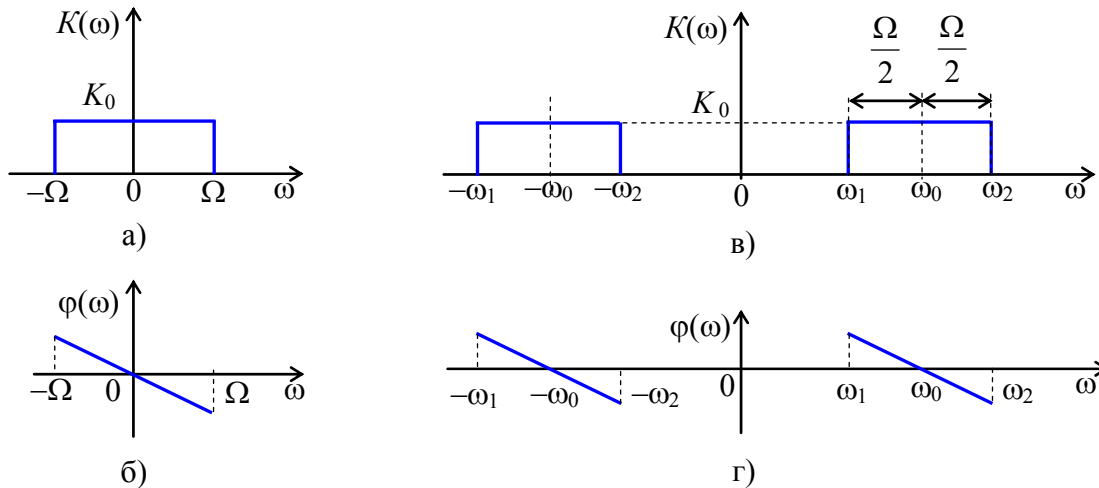


Рис. 7.2 — Частотные характеристики неискажающих фильтров: а) и б) — АЧХ и ФЧХ неискажающего ФНЧ; в) и г) — АЧХ и ФЧХ неискажающего ПФ

Неискажающий ФНЧ имеет граничных частоты  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = \Omega$ , а неискажающий ПФ — граничные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , неравные нулю.

В пределах полосы пропускания неискажающий фильтр должен иметь равномерную АЧХ и линейную ФЧХ. За пределами полосы пропускания АЧХ неискажающего фильтра должна быть равна нулю, а ФЧХ может иметь произвольный вид.

Приравнявая (7.2) и (7.3) и преобразуя, находим комплексный коэффициент передачи неискажающего ФНЧ

$$K(j\omega) = \begin{cases} K_0 e^{-j\omega t_0} & \text{при } |\omega| \leq \Omega; \\ 0 & \text{при } |\omega| \geq \Omega. \end{cases} \quad (7.4)$$

где  $\Omega = 2\pi\Pi$  — полоса пропускания ФНЧ в единицах круговой (циклической) частоты;  $\Pi$  — полоса пропускания ФНЧ в единицах обычной частоты.

С учетом (7.4) находим АЧХ фильтра

$$K(\omega) = \begin{cases} K_0 & \text{при } |\omega| \leq \Omega; \\ 0 & \text{при } |\omega| \geq \Omega. \end{cases} \quad (7.5)$$

Поскольку импульсная характеристика линейного четырехполюсника связана с его комплексным коэффициентом передачи обратным преобразованием Фурье, то с учетом (7.4) импульсная характеристика неискажающего ФНЧ определяется по формуле



$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{\omega_2} K_0 e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{K_0}{j2\pi(t-t_0)} e^{j\omega(t-t_0)} \Big|_{-\omega_2}^{\omega_2} = \\
&= \frac{K_0}{j2\pi(t-t_0)} \left( e^{j\omega_2(t-t_0)} - e^{-j\omega_2(t-t_0)} \right) = \frac{K_0}{j2\pi(t-t_0)} j2 \sin[\omega_2(t-t_0)] = \\
&= \frac{K_0 \omega_2}{\pi} \frac{\sin[\omega_2(t-t_0)]}{\omega_2(t-t_0)} = H_0 \Psi[\omega_2(t-t_0)],
\end{aligned} \tag{7.6}$$

где  $\Psi[\omega_2(t-t_0)] = \sin[\omega_2(t-t_0)]/\omega_2(t-t_0)$  — функция, известная в математике под названием “магический синус”  $y = \sin x/x$ ;  $H_0 = \frac{K_0 \omega_2}{\pi}$  — максимальное значение импульсной характеристики.

Импульсная характеристика (7.7) неискажающего ФНЧ показана на рис. 7.3.

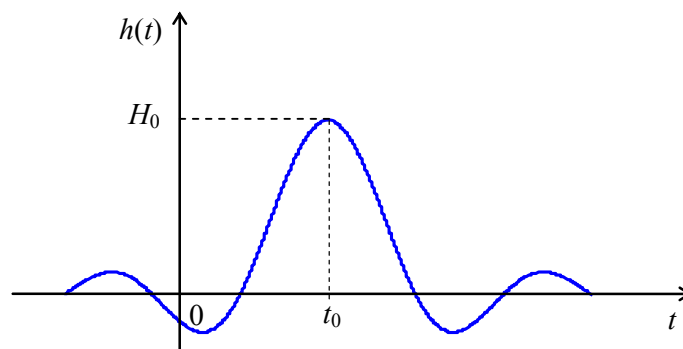


Рис. 7.3 — Импульсная характеристика неискажающего ФНЧ

Так как импульсная характеристика цепи представляет собой реакцию цепи на единичное импульсное воздействие  $\delta(t)$ , поступающее на вход цепи в момент  $t = 0$ , то импульсная характеристика физически реализуемой цепи до момента  $t = 0$  должна быть равна нулю, поскольку при  $t < 0$  на входе цепи нет никакого воздействия.

Следовательно, импульсная характеристика любой реальной цепи должна удовлетворять условию

$$h(t) = \begin{cases} h(t) \neq 0 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t \leq 0, \end{cases} \tag{7.7}$$

которое называется условием физической реализуемости цепи.

Однако импульсная характеристика (см. рис. 7.3) неискажающего ФНЧ не удовлетворяет условию физической реализуемости (7.8), поскольку она начинается теоретически при  $t = -\infty$ , т. е. до прихода воздействия. В результате, получаем нарушение закона о причинно-следственной связи, согласно которому *следствие не может опережать во времени причину, вызвавшую это следствие*. Отсюда следует вывод о невозможности физической реализации неискажающего ФНЧ.

Аналогичным образом можно определить импульсную характеристику неискажающего полосно-пропускающего фильтра, АЧХ которого изображена на рис. 7.2, в,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0 e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0 [\cos \omega(t-t_0) + j \sin \omega(t-t_0)] d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} K_0 \cos \omega(t-t_0) d\omega = \frac{K_0}{\pi(t-t_0)} [\sin \omega_2(t-t_0) - \sin \omega_1(t-t_0)]. \quad (7.8)$$

Граничные частоты полосы пропускания фильтра удобно представить в виде (см. рис. 7.2,г)

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_0 + \frac{\Omega}{2}; \\ \omega_1 &= \omega_0 - \frac{\Omega}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (7.9), находим

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{K_0}{\pi(t-t_0)} \left\{ \sin \left[ \left( \omega_0 + \frac{\Omega}{2} \right) (t-t_0) \right] - \sin \left[ \left( \omega_0 - \frac{\Omega}{2} \right) (t-t_0) \right] \right\} = \\ &= \frac{K_0 \Omega}{\pi} \frac{\sin \frac{\Omega}{2} (t-t_0)}{\frac{\Omega}{2} (t-t_0)} \cos \omega_0 (t-t_0). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Импульсная характеристика (7.10) изображена на рис. 7.4 и представляет собой модулированное колебание с частотой  $\omega_0$ , огибающая которого изменяется по закону  $\sin \frac{\Omega}{2} (t-t_0) / \frac{\Omega}{2} (t-t_0)$ .

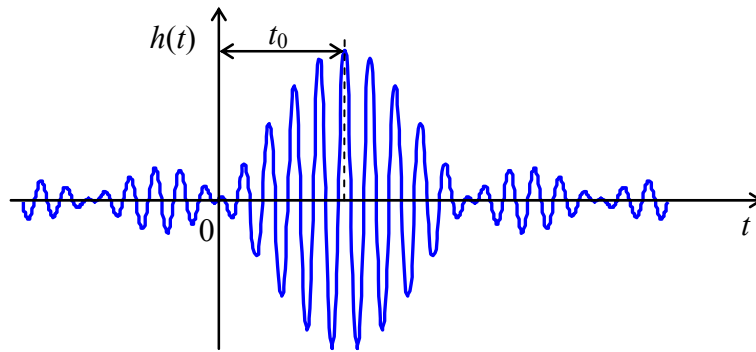


Рис. 7.4 — Импульсная характеристика идеального ПФ

Поскольку импульсная характеристика идеального ПФ опережает входное воздействие, то это свидетельствует о физической нереализуемости такого фильтра.

Таким образом, неискажающие ФНЧ и ПФ являются нереализуемыми и могут рассматриваться только как теоретические идеальные модели фильтров. Однако это не означает, что идеальные фильтры не надо изучать, так как анализ их характеристик позволяет не только выявить потенциальные возможности фильтров, но и правильно обосновать требования к реальным фильтрам с учетом допустимых отклонений их характеристик от идеальных.

### 7.3. Особенности аппроксимирующих функций, используемые при синтезе фильтров

В многих задачах синтеза фильтров требования, предъявляемые к частотным характеристикам фильтра, касаются только АЧХ тогда, как к ФЧХ никаких требований не предъявляется. Поэтому далее речь идет о синтезе фильтра по заданной АЧХ. Последняя может быть

задана аналитически, графически или в виде таблицы. Однако даже при аналитическом задании АЧХ, т.е. в виде формулы, она может оказаться нереализуемой. В этом случае прибегают к аппроксимации заданной АЧХ реализуемой функцией, которая называется *аппроксимирующей функцией*.

В качестве примера на рис. 7.5 изображены АЧХ  $K(\omega)$  идеального ФНЧ (пунктирная линия) и аппроксимирующая функция  $f(\omega)$  (сплошная линия).

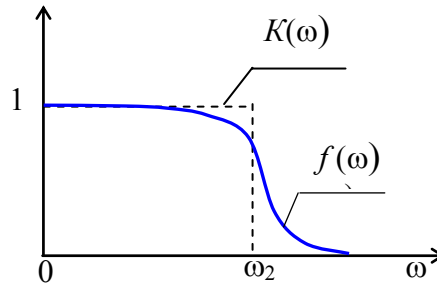


Рис. 7.5 — АЧХ  $K(\omega)$  идеального ФНЧ и аппроксимирующая функция  $f(\omega)$

В задачах синтеза цепей по заданной АЧХ под погрешностью аппроксимации обычно понимают относительную погрешность, выраженную в децибелах,

$$\delta = 20 \lg \left| \frac{f(\omega) - K(\omega)}{K(\omega)} \right|.$$

Оценка погрешности цепи во временной области по ее погрешности в частотной области является достаточно трудоемкой задачей. Опыт реализации большого числа цепей показывает, что при малой погрешности аппроксимации частотных характеристик получается приемлемое для практики соответствие между выходным и входным сигналами во временной области.

Рассмотрим случай, когда аппроксимирующая функция должна удовлетворять следующим условиям:

- быть реализуемой минимально-фазовой цепью;
- обеспечивать погрешность аппроксимации заданной АЧХ, не превышающую заданного значения.

Аппроксимирующая функция  $f(\omega, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  должна быть функцией не только частоты  $\omega$ , но и конечного числа варьируемых параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ , значения которых должны удовлетворять дополнительным требованиям.

Обычно вид аппроксимации и реализованные в соответствии с ним фильтры называются по имени автора, предложившего соответствующую аппроксимирующую функцию. В настоящее время широкое распространение получили следующие типы фильтров:

- *фильтры Баттерворта*;
- *фильтры Чебышева первого и второго рода*;
- *фильтры Чебышева второго рода*;
- *эллиптические фильтры*, известные также как *фильтр Кауэра-Золоторева* или *двойные фильтры Чебышева*;
- *фильтры Бесселя*.

Выбор типа фильтра зависит от предъявляемых к нему требований.

*Фильтры Баттерворта* обеспечивает максимально плоскую монотонную АЧХ в полосе пропускания. Однако их переходные характеристики имеют выброс и колебания. Примером АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта может служить АЧХ, показанная на рис. 7.5.

Аппроксимация по Баттерворту, которая является частным случаем аппроксимации по

Тейлору и сводится к разложению заданной функции  $K(\omega)$  и аппроксимирующей функции  $f(\omega)$  в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки  $\omega = \omega_0$  частотного интервала аппроксимации. Если потребовать, чтобы в точке  $\omega = \omega_0$  совпадали значения заданной и аппроксимирующей функций, а также  $(N-1)$  их производных, начиная с первой, то получим систему из  $N$  уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\omega_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = K(\omega_0); \\ \frac{df(\omega_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)}{d\omega} = \frac{dK(\omega_0)}{d\omega}; \\ \dots \\ \frac{d^{N-1} f(\omega_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)}{d\omega^{N-1}} = \frac{d^{N-1} K(\omega_0)}{d\omega^{N-1}}. \end{array} \right. \quad (7.10)$$

Решая систему уравнений (7.10) находят параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ .

*Фильтры Чебышева первого рода* имеют *равноволновую АЧХ* в полосе пропускания и монотонно убывающую в полосе задерживания. Такие фильтры обеспечивает большее затухание в полосе задерживания, чем фильтр Баттерворта, но их АЧХ носит колебательный характер в пределах полосы пропускания. Кроме того, фильтры Чебышева вызывают еще большие выбросы и колебания переходной характеристики по сравнению с фильтрами Баттерворта.

*Фильтры Чебышева II рода* (инверсные фильтры Чебышева), имеют АЧХ монотонно убывающую в полосе пропускания и равноволновую в полосе задерживания.

На рис. 7.6 изображена АЧХ фильтров нижних частот Чебышева первого и второго рода.

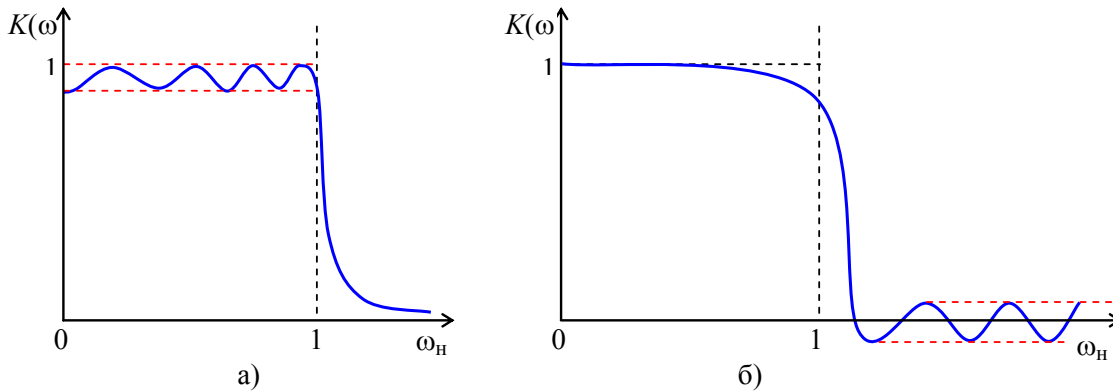


Рис. 7.6 — АЧХ ФНЧ Чебышева первого (а) и второго (б) рода

Аппроксимация по Чебышеву формулируется как задача отыскания таких параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  аппроксимирующей функции  $f(\omega_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ , при которых ее наибольшее отклонение от заданной функции  $K(\omega)$  в интервале аппроксимации  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  было бы минимальным, что в математическом виде записывается в следующем виде

$$\min \max |f(\omega) - K(\omega)|$$

и соответствует наилучшему равномерному приближению аппроксимирующей функции к заданной. Такая задача была впервые сформулирована и решена русским математиком П.Л. Чебышевым, который разработал теорию наилучшего равномерного приближения аппроксимирующей функции к заданной.

*Эллиптические фильтры*, известные также как *фильтра Кауэра-Золоторева* или двой-

ные фильтры Чебышева и имеющие равноволновую АЧХ как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания. Такие фильтры обеспечивают наибольшую крутизну нарастания затухания в переходной полосе частот, т.е. между полосой пропускания и полосой задерживания.

*Фильтры Бесселя* имеют максимально плоскую частотную характеристикой группового времени задержки и построены на основании аппроксимации линейной ФЧХ идеального ФНЧ рядом Тейлора в окрестности точки  $\omega = 0$ . Такие фильтры имеют монотонную переходную характеристику, но обеспечивают меньшее затухание в полосе задерживания, чем фильтр Баттерворта такого же порядка.

Так как АЧХ и ФЧХ минимально-фазовой цепи однозначно взаимосвязаны (см. п. 5.5, лекция 8), то при синтезе минимально-фазовых фильтров может быть выбрана аппроксимирующая функция только для одной из частотных характеристик (или для АЧХ или для ФЧХ). При этом вид другой частотной характеристики будет предопределен. В этом отношении синтез фильтров Баттерворта, Чебышева и эллиптический основан на аппроксимации АЧХ, а синтез фильтра Бесселя — на аппроксимации ФЧХ.

Практически все методы аппроксимации частотных характеристик идеальных фильтров основаны на использовании аппроксимирующих функций, которые либо непосредственно представляют собой рациональную дробь, либо могут быть в нее преобразованы. При этом широкое применение находит аппроксимирующая функция

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + F^2(\omega)}}, \quad (7.11)$$

где  $F(\omega)$  — функции, которая должна быть минимальна в полосе пропускания и максимальна в полосе задерживания фильтра.

В настоящее время разработан ряд программ схемотехнического моделирования, которые позволяют по заданному типу фильтра (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, ЗФ и т. п.), виду аппроксимирующей функции и требованиям к АЧХ синтезировать фильтр и моделировать их работу. К таким программам относятся: *Microwave Office*, *Micro-Cap*, *Filter Solutions*, *FilterPro* и др.

#### 7.4. Синтез фильтра нижних частот Баттерворта

Фильтр нижних частот Баттерворта обеспечивает имеет нулевое ослабление на нулевой частоте ослабление, медленно и монотонно увеличивающееся ослабление в полосе пропускания, на границе которой оно достигает 3 дБ, и быстро и монотонно увеличивающееся ослабление в полосе задерживания.

При синтезе ФНЧ Баттерворта используется аппроксимирующая функция вида

$$K(\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_n^{2m}}}, \quad (7.12)$$

где  $\omega_n = \omega/\omega_0$  — нормированная частота;  $\omega_0$  — граничная частота полосы пропускания;  $m$  — порядок фильтра.

Частотная характеристика (7.12) была впервые описаны в 1930 г. английским инженером Стивеном Баттервортом в статье “*On the Theory of Filter Amplifier*”. На рис.7.6 изображены АЧХ фильтров Баттерворта различного порядка.

При увеличении порядка фильтра уменьшается неравномерность ослабления в полосе пропускания, возрастают крутизна спада АЧХ и ослабление в полосе задерживания. Следует отметить, что АЧХ фильтра Баттерворта на частоте среза  $\omega_n = 1$ , т. е. на границе полосы пропускания, независимо от порядка фильтра равна  $K(\omega_n) = 1/\sqrt{2} \approx 0,7$ , что в логарифмическом масштабе соответствует ослаблению 3 дБ.

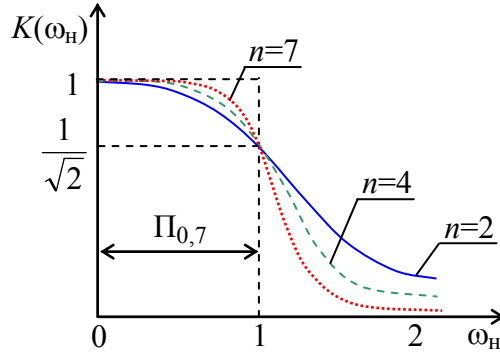


Рис. 7.6 — Амплитудно-частотные характеристики ФНЧ Баттерворта различного порядка

Для определения передаточной функции фильтра Баттерворта найдем квадрат функции (7.12),

$$K^2(\omega_H) = K(j\omega_H)K(-j\omega_H) = \frac{1}{1 + \omega_H^{2m}}.$$

Сделав в полученном выражении замену переменной  $\omega_H = p_H/j = -jp_H$ , получаем

$$K(p_H)K(-p_H) = \frac{1}{1 + \left(\frac{p_H}{j}\right)^{2m}} = \frac{1}{1 + (-jp_H)^{2m}}.$$

Решая уравнение

$$1 + (-jp_H)^{2m} = 0,$$

находим его корни

$$p_{\text{п}k} = \frac{\sqrt[2m]{-1}}{-j} = j(-1)^{1/2m},$$

где  $k = 1, 2, \dots, 2m$ .

Учитывая, что  $-1 = e^{j\pi} = e^{j3\pi} = \dots = e^{j(2k-1)\pi}$ , получаем

$$p_{\text{п}k} = j \left( e^{j(2k-1)\pi} \right)^{\frac{1}{2m}} = j \left( \cos \frac{2k-1}{2m} \pi + j \sin \frac{2k-1}{2m} \pi \right) = -\sin \frac{2k-1}{2m} \pi + j \cos \frac{2k-1}{2m} \pi. \quad (7.13)$$

Поскольку полюса (7.13) имеют модуль равный единице, то на комплексной плоскости они располагаются на окружности единичного радиуса. Из (7.13) следует, что в зависимости от номера  $k$  вещественная и мнимая части полюсов изменяются по гармоническому закону.

При изменении  $k$  от 1 до  $m$  аргумент полюсов изменяется в диапазоне  $0 < \frac{2k-1}{2m} \pi < \pi$ . При этом полюса имеют отрицательную вещественную часть и располагаются в левой полуплоскости. При изменении  $k$  от  $m$  до  $2m$  аргумент полюсов изменяется в диапазоне  $\pi < \frac{2k-1}{2m} \pi < 2\pi$ , вещественная часть полюсов — положительная и они располагаются в правой полуплоскости.

Так как реализуемой передаточной функции соответствуют полюса, расположенные только в левой полуплоскости, то, используя эти полюса, находим передаточную функцию

$$K(p_n) = \frac{1}{(p_n - p_{n1})(p_n - p_{n2}) \dots (p_n - p_{nm})}. \quad (7.14)$$

Реализация передаточной функции (7.14) осуществляются одним из описанных выше способов (см. 6.3, 6.5, 6.7). Нормирования и денормирование частоты не изменяет характера диаграммы расположения полюсов и нулей. При денормировании все полюса перемещаются вдоль радиальных линий с окружности единичного радиуса на окружность, радиус которой равен заданной частоте  $\omega_0$ , (см. п.2.5).

В многочисленной справочной литературе можно найти таблицы не только со значениями полюсов и коэффициентами полиномов передаточных функций ФНЧ Баттерворта различного порядка, но и схемы и значения параметров элементов схем таких фильтров. Многие схемотехнические программы позволяют по заданным параметрам фильтра определить электрическую схему фильтра и параметры его элементов, например, *FilterPro*, *Filter Solutions*, *Micro-Cap* и т.п.

### Пример 7.1

Найти передаточную функцию пассивного ФНЧ Баттерворта второго порядка.

Определяем полюса функции (7.12) по формуле (7.13) при  $m = 3$ :

$$\begin{aligned} p_{n1} &= -\sin \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 2} \pi + j \cos \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 2} \pi = -\sin \frac{\pi}{4} + j \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ p_{n2} &= -\sin \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2} \pi + j \cos \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2} \pi = -\sin \frac{3\pi}{4} + j \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ p_{n3} &= -\sin \frac{2 \cdot 3 - 1}{2 \cdot 2} \pi + j \cos \frac{2 \cdot 3 - 1}{2 \cdot 2} \pi = -\sin \frac{5\pi}{4} + j \cos \frac{5\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ p_{n4} &= -\sin \frac{2 \cdot 4 - 1}{2 \cdot 2} \pi + j \cos \frac{2 \cdot 4 - 1}{2 \cdot 2} \pi = -\sin \frac{7\pi}{4} + j \cos \frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

Расположение полюсов на комплексной плоскости показано на рис. 7.7.

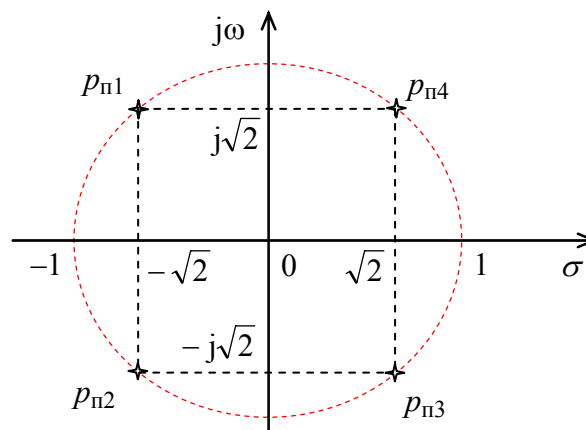


Рис. 7.7 — Расположение полюсов на комплексной плоскости

Используя полюса  $p_{n1} = -0,5 + j/\sqrt{2}$ ,  $p_{n2} = -0,5 - j/\sqrt{2}$ , расположенные в левой полуплоскости определяем передаточную функцию фильтра

$$K(p) = \frac{1}{(p + 0,5 - j/\sqrt{2})(p + 0,5 + j/\sqrt{2})} = \frac{1}{p^2 + p + 0,75}.$$

Полученная передаточная функция может быть реализована одним из рассмотренных выше способов, например, в виде активного ФНЧ второго порядка Салена-Ки (см. п. 6.3).

### Пример 7.2

Найти передаточную функцию пассивного ФНЧ Баттерворта третьего порядка.

Определяем полюса функции (7.12) по формуле (7.13) при  $m = 3$ :

$$\begin{aligned} p_{п1} &= -\sin \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 3} \pi + j \cos \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 3} \pi = -\sin \frac{\pi}{6} + j \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}; & p_{п2} &= \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ p_{п3} &= -\sin \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 3} \pi + j \cos \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 3} \pi = -\sin \frac{\pi}{2} + j \cos \frac{\pi}{2} = -1; & p_{п4} &= 1; \\ p_{п5} &= -\sin \frac{2 \cdot 3 - 1}{2 \cdot 3} \pi + j \cos \frac{2 \cdot 3 - 1}{2 \cdot 3} \pi = -\sin \frac{5\pi}{6} + j \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}; & p_{п6} &= \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Расположение полюсов на комплексной плоскости показано на рис. 7.8.

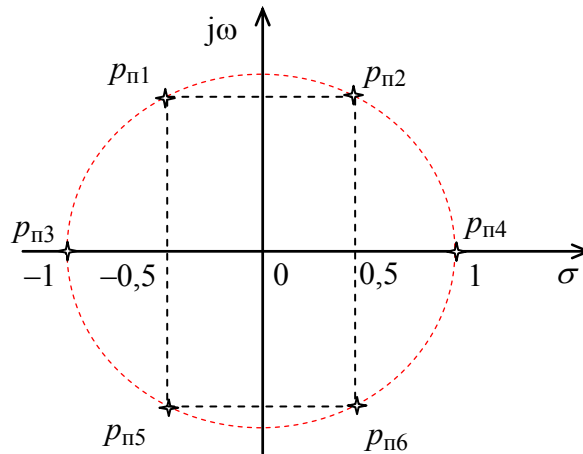


Рис. 7.7 — Расположение полюсов на комплексной плоскости

Используя полюса  $p_{п1} = -0,5 + j\sqrt{3}/2$ ,  $p_{п3} = -0,5$ ,  $p_{п5} = -0,5 - j\sqrt{3}/2$ , расположенные в левой полуплоскости определяем передаточную функцию фильтра

$$K(p) = \frac{1}{(p + 0,5 - j\sqrt{3}/2)(p + 0,5 + j\sqrt{3}/2)(p + 0,5)} = \frac{1}{(p^2 + p + 3,25)(p + 0,5)} = K_1(p)K_2(p),$$

где  $K_1(p) = \frac{1}{p^2 + p + 3,25}$ ;  $K_2(p) = \frac{1}{p + 0,5}$ .

Фильтр может быть реализован путем последовательного соединения двух активных ФНЧ второго и первого порядка с передаточными функциями  $K_1(p)$  и  $K_2(p)$  соответственно, построенных на основе операционных усилителей, что позволяет исключить влияние фильтров друг на друга.

### 7.5. Особенности полиномов Чебышева

Полином Чебышева  $m$ -го порядка, определяется выражением

$$T_m(\omega_H) = \cos(m \arccos \omega_H), \quad (7.15)$$



где  $\omega_H = \omega/\omega_0$  — нормированная частота;  $\omega_0$  — граничная частота полосы пропускания;  $m$  — порядок фильтра.

Чтобы доказать, что  $T_m(\omega_H)$  является полиномом переменной  $\omega$ , введем дополнительную переменную  $x = \arccos \omega_H$ , подставляя которую в (7.18), получаем

$$T_m(\omega_H) = \cos mx. \quad (7.16)$$

Используя известные тригонометрические тождества, находим полиномы Чебышева разного порядка:

$$\begin{aligned} T_0(\omega_H) &= \cos(0) = 1; \quad T_1(\omega_H) = \cos x = \cos(\arccos \omega_H) = \omega_H; \\ T_2(\omega_H) &= \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 2\omega_H^2 - 1; \\ T_3(\omega_H) &= \cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x \sin^2 x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = -3\cos x + 4\cos^3 x = -3\omega_H + 4\omega_H^3; \\ T_4(\omega_H) &= \cos 4x = \cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x = (-3\cos x + 4\cos^3 x)\cos x - \sin(2x + x)\sin x = \\ &= -3\cos^2 x + 4\cos^4 x - (\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x)\sin x = -3\cos^2 x + 4\cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x - \\ &- (2\cos^2 x - 1)\sin^2 x = -3\cos^2 x + 4\cos^4 x - 2(1 - \cos^2 x)\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1)(1 - \cos^2 x) = \\ &= 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x = 1 - 8\omega_H^2 + 8\omega_H^4. \end{aligned}$$

Используя рекуррентную тригонометрическую формулу

$$\cos[(m+1)x] = 2\cos mx \cos x - \cos[(m-1)x],$$

можно найти рекуррентную формулу для полинома Чебышева

$$T_{m+1}(\omega_H) = 2\omega_H T_m(\omega_H) - T_{m-1}(\omega_H). \quad (7.17)$$

Например, подставляя, найденные выше выражения  $T_2(\omega_H)$  и  $T_3(\omega_H)$  в (7.17), получаем полином Чебышева 4-го порядка

$$T_4(\omega_H) = 2\omega_H T_3(\omega_H) - T_2(\omega_H) = 2\omega_H (-3\omega_H + 4\omega_H^3) - (2\omega_H^2 - 1) = 1 - 8\omega_H^2 + 8\omega_H^4,$$

который совпадает с выражением, найденным ранее.

Полиномы Чебышева независимо от их порядка удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} 0 \leq |T_m(\omega_H)| \leq 1 & \text{при } |\omega_H| \leq 1; \\ |T_m(\omega_H)| > 1 & \text{при } |\omega_H| > 1. \end{cases}$$

На рис. 7.8 изображены графики функций  $T_m(\omega_H)$  разного порядка.

Из рис. 7.8 видно, что при  $|\omega_H| > 1$  полиномы  $T_m(\omega_H)$  монотонно возрастают. Полиномы нечетной степени  $m$  являются нечетными, а четной степени — четными функциями переменной  $\omega_H$ .

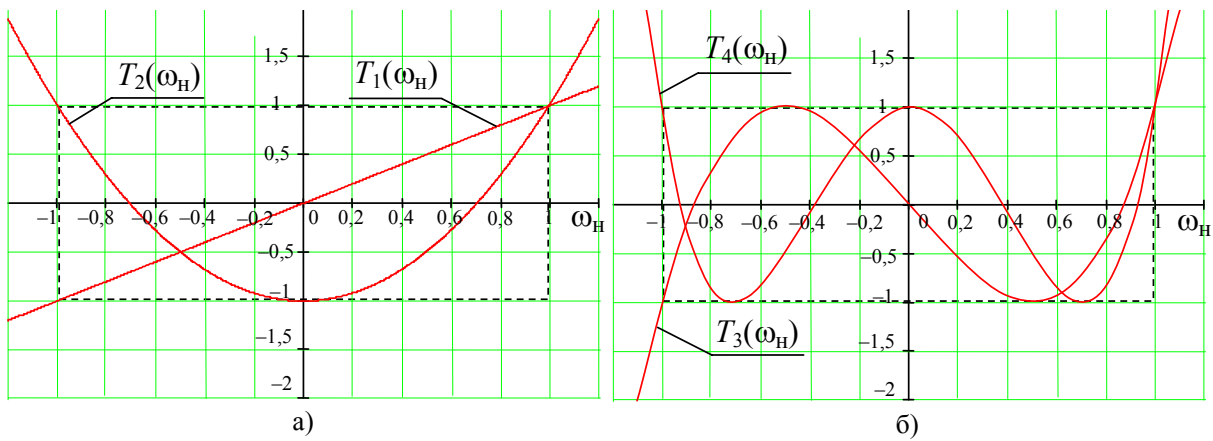


Рис. 7.8 — Полиномы Чебышева: (а) — 1-го и 2-го порядка, (б) — 3-го и 4-го порядка

На интервале  $|\omega_n| \leq 1$  функция  $\arccos \omega_n$  является вещественной. При этом полином Чебышева (7.15) представляет собой косинус вещественного угла и изменяется периодически в пределах от  $-1$  до  $+1$  (см. область прямоугольной формы, выделенную на рис. 7.8 пунктиром). При  $|\omega_n| > 1$  полином Чебышева представляет собой гиперболический косинус вещественного угла, который при увеличении  $\omega_n$  монотонно возрастает от 1 до  $\infty$ .

## 7.6. Синтез фильтра нижних частот Чебышева

**Фильтром нижних частот Чебышева** называется фильтр, который синтезируется путем аппроксимации АЧХ идеального ФНЧ функцией вида

$$K(\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_m^2(\omega_n)}}, \quad (7.18)$$

где  $0 < \varepsilon < 1$  — коэффициент, определяющий амплитуду пульсаций АЧХ в полосе пропускания фильтра.

На рис. 7.9 изображена амплитудно-частотная характеристика ФНЧ Чебышева 4-ого порядка.

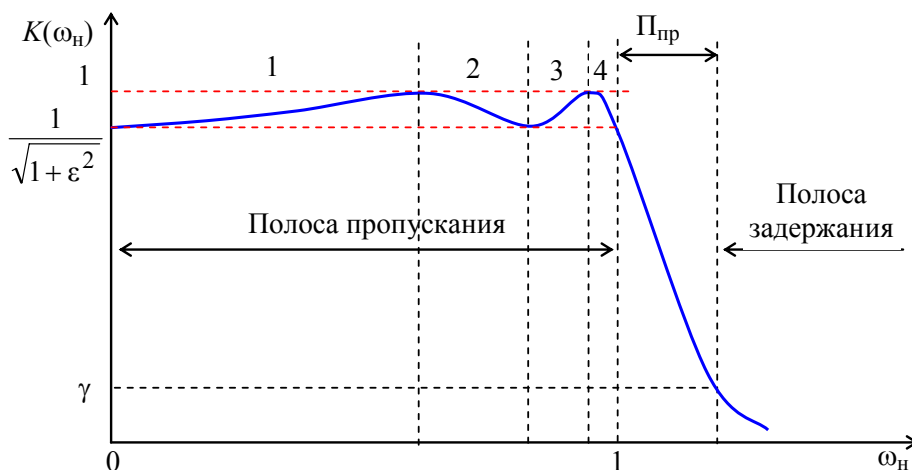


Рис. 7.9 — АЧХ ФНЧ Чебышева 4-ого порядка

Из рис. 7.9 видно, что в пределах полосы пропускания АЧХ имеет колебательный характер, причем число изменений АЧХ между минимальным и максимальным значениями, определяется порядком  $m$  фильтра (на рис. 7.9 интервалы изменения отмечены цифрами). Указанные колебания называют *пульсациями АЧХ*. В полосе задерживания АЧХ монотонно

убывает с крутизной, большей, чем у фильтра Баттерворта такого же порядка. На частоте среза  $\omega_{H0} = 1$  АЧХ фильтра Чебышева равна  $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ , а не  $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ , как это имело место в случае ФНЧ Баттерворта.

Для определения передаточной функции фильтра воспользуемся ранее рассмотренной методикой (см. п. 5.5) и найдем с учетом (7.18) квадрат АХЧ

$$K^2(\omega_H) = K(j\omega_H)K(-j\omega_H) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_m^2(\omega_H)}.$$

Сделав в полученном выражении замену переменной  $\omega_H = p_H/j = -jp_H$ , где  $p_H = \sigma_H + j\omega_H$ , получаем

$$K(p_H)K(-p_H) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_m^2(-jp_H)}. \quad (7.19)$$

Для определения полюсов найденной функции необходимо определить корни уравнения  $1 + \varepsilon^2 T_m^2(-jp_H) = 0$ . Используя подстановку

$$-jp_H = \cos \theta, \quad (7.20)$$

где  $\theta = \alpha + j\beta$  — комплексная переменная, и учитывая, что  $\arccos(\cos \theta) = \theta$ , получаем

$$1 + \varepsilon^2 T_m^2(\cos \theta) = 1 + \varepsilon^2 \cos^2(m\theta) = 0.$$

Преобразуя уравнение, приводим его к виду

$$1 - (j\varepsilon)^2 \cos^2(m\theta) = [1 + j\varepsilon \cos(m\theta)][1 - j\varepsilon \cos(m\theta)] = 0.$$

Решение уравнения имеет вид

$$\cos(m\theta) = \pm \frac{j}{\varepsilon}.$$

После подстановки  $\theta = \alpha + j\beta$  получаем

$$\cos(m\alpha + jm\beta) = \cos m\alpha \operatorname{ch} m\beta - j \sin m\alpha \operatorname{sh} m\beta = \pm \frac{j}{\varepsilon}.$$

Приравнивая вещественные и мнимые составляющие левой и правой частей уравнения, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos m\alpha \operatorname{ch} m\beta = 0; \\ \sin m\alpha \operatorname{sh} m\beta = \pm \frac{1}{\varepsilon}, \end{cases}$$

решая которую относительно переменных  $\alpha$  и  $\beta$ , находим

$$\alpha_k = \pm \frac{(2k-1)\pi}{2m}; \quad \beta_k = \pm \frac{1}{m} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\varepsilon},$$

где  $k = 1, 2, \dots, m$ .

С учетом (7.20) определяем полюса функции (7.19)

$$p_{\Pi k} = j \cos \theta_k = j \cos \left( \pm \frac{(2k-1)\pi}{2m} \pm j \frac{1}{m} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\varepsilon} \right) = \\ = j \left\{ \cos \frac{(2k-1)\pi}{2m} \cos \left( j \frac{1}{m} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\varepsilon} \right) \mp \sin \left( \pm \frac{(2k-1)\pi}{2m} \right) \sin \left( \pm j \frac{1}{m} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\varepsilon} \right) \right\}.$$

Полагая  $\alpha_k = (2k-1)\pi/2n$  и используя известные соотношения:  $\cos(j\alpha) = \operatorname{ch} \alpha$ ,  $\sin(j\alpha) = j \operatorname{sh} \alpha$ , преобразуем полученное выражение

$$p_{\Pi k} = \pm \sin \alpha_k \operatorname{sh} \left( \frac{1}{m} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\varepsilon} \right) + j \cos \alpha_k \operatorname{ch} \left( \frac{1}{m} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\varepsilon} \right) = \sigma_k + j \omega_k,$$

где

$$\sigma_k = \pm \sin \alpha_k \operatorname{sh} \left( \frac{1}{m} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\varepsilon} \right); \quad \omega_k = \cos \alpha_k \operatorname{ch} \left( \frac{1}{m} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

— вещественная и мнимая составляющие  $k$ -го полюса соответственно.

Решая последние уравнения относительно  $\sin \alpha_k$  и  $\cos \alpha_k$  и используя тождество  $\cos^2 \alpha_k + \sin^2 \alpha_k = 1$ , получаем уравнение

$$\frac{\sigma_k^2}{\operatorname{sh}^2 \left( \frac{1}{m} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\varepsilon} \right)} + \frac{\omega_k^2}{\operatorname{ch}^2 \left( \frac{1}{m} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\varepsilon} \right)} = 1,$$

связывающее вещественную и мнимую части  $k$ -го полюса,

На комплексной плоскости данное уравнение представляет собой уравнение эллипса  $\sigma_k^2/a^2 + \omega_k^2/b^2 = 1$ , на котором располагаются полюса функции (7.19). Полуоси этого эллипса определяются знаменателями дробей, образующих левую часть уравнения,

$$a = \operatorname{sh} \left( \frac{1}{m} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\varepsilon} \right); \quad b = \operatorname{ch} \left( \frac{1}{m} \operatorname{Arcsh} \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Используя полюса, расположенные в левой полуплоскости, составляем передаточную функцию фильтра Чебышева

$$K(p_H) = \frac{1}{(p_H - p_{\Pi 1})(p_H - p_{\Pi 2}) \dots (p_H - p_{\Pi m})} = \frac{1}{b_m p_H^m + b_{m-1} p_H^{m-1} + \dots + b_2 p_H^2 + b_1 p_H}. \quad (7.20)$$

Реализация передаточной функции (7.20) выполняется в соответствии с одним из ранее рассмотренных методов (см. п. 6)..

В справочной литературе по расчету фильтров, как правило, приводятся таблицы с коэффициентами полинома знаменателя передаточной функции (7.20), а также параметрами элементов фильтров Чебышева разного порядка.

В качестве примера на рис. 7.9 показано расположение полюсов передаточной функции ФНЧ Чебышева 4-го порядка. Полюсам, соответствующим реализуемой передаточной функции, присвоены буквенные обозначения:  $p_{\Pi 1}, \dots, p_{\Pi 4}$  и они обозначены знаком **X**.

Следует отметить, что координаты полюсов, отмеченные на рис. 7.10, можно геометрически связать с координатами полюсов двух ФНЧ Баттерворта того же порядка, которые расположены на окружностях с радиусами, равными полуосям эллипса, и отмечены на рис.

7.10 знаками  $\Delta$  и  $\square$  соответственно. Ординаты полюсов фильтра Чебышева определяются ординатами полюсов фильтра Баттерворта, расположенных на окружности большого радиуса, а их абсциссы — абсциссами полюсов фильтра Баттерворта, расположенных на окружности малого радиуса.

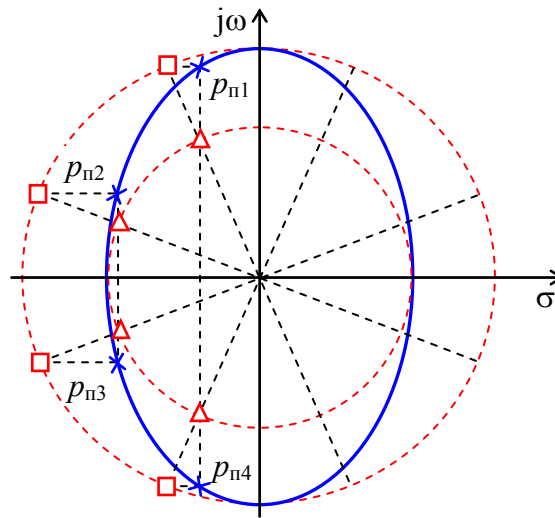


Рис. 7.10 — Полюсная диаграмма фильтра Чебышева 4-го порядка

Различают фильтры Чебышёва I и II родов. У фильтра Чебышёва II рода (инверсный фильтр Чебышёва) отсутствуют пульсации в полосе пропускания, однако присутствуют в полосе задержания (рис. 7.11). Такой фильтр используется реже, чем фильтр Чебышёва I рода, ввиду менее крутого спада АЧХ в полосе задержания при одинаковом порядке фильтров.

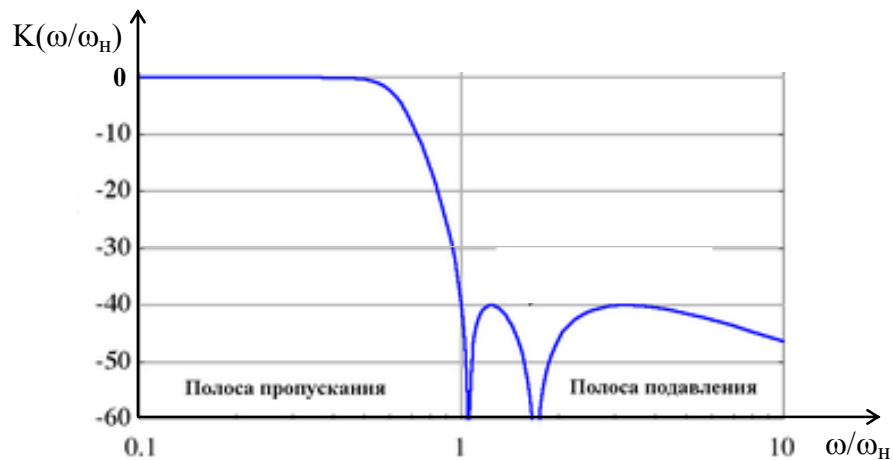


Рис. 7.11 — АЧХ фильтра нижних частот Чебышёва II рода при  $\varepsilon = 0,01$

Более крутой спад АЧХ можно получить, если допустить пульсации не только в полосе пропускания, но и в полосе подавления, добавив в передаточную функцию нули, расположенные на мнимой оси комплексной плоскости. Однако это ведёт к менее эффективному подавлению в полосе задержания. Такого типа фильтр называется эллиптическим или фильтром Кауэра, который его предложил.

### 7.7. Денормирование по частоте параметров ФНЧ

После того, как определены параметры элементов нормированного ФНЧ, выполняется их денормирование по формулам (2.13), (2.14), (2.15) (см. п. 2.5). При синтезе фильтра нижних частот в качестве нормирующей частоты  $\omega_0$  выбирают граничную частоту полосы про-

пускания, а в качестве нормирующего сопротивления  $R_0$  — сопротивление нагрузки, обеспечивающее согласованный режим его работы. Обычно значения коэффициентов полиномов числителя и знаменателя нормированной передаточной функции, а также нормированные параметры элементов цепей, заносят в таблицы, которые приводятся в технической литературе, что позволяет существенно упростить и унифицировать синтез цепей.

Для денормирования АЧХ фильтра достаточно в ее выражении заменить нормированную частоту  $\omega_n$  отношением  $\omega/\omega_0$ , где  $\omega$  — денормированная частота. При этом не обязательно выполнять денормирование параметров элементов фильтра. На рис. 7.12 изображена АЧХ фильтра, денормированная по частоте.

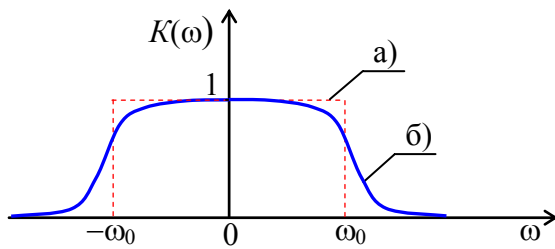


Рис. 7.12 — Денормированные по частоте АЧХ идеального (а) и реального (б) ФНЧ

### Пример 7.2

Найти денормированные передаточную функцию и параметры элементов ФНЧ (рис. (7.13) нагруженного на входе и выходе сопротивлением  $R_0 = 200$  Ом, если граничная частота полосы пропускания  $\omega_0 = 10^5$  рад/с и нормированную передаточную функцию фильтра имеет вида

$$H(p_n) = \frac{1}{2(p_n^2 + \sqrt{2}p_n + 1)}. \quad (7.20)$$

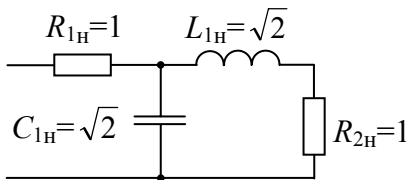


Рис. 7.13 — Схема нормированного ФНЧ

Делая в (7.21) замену переменной  $s_n = p/\omega_0$ , находим денормированную по частоте передаточную функцию ФВЧ

$$K(p) = \frac{1}{2\left\{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{p}{\omega_0} + 1\right\}} = \frac{\omega_0^2}{2(p^2 + \sqrt{2}\omega_0 p + \omega_0^2)}.$$

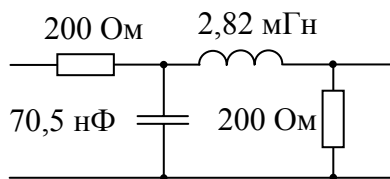


Рис. 7.14 — Схема денормированного ФНЧ

С учетом значений  $\omega_0 = 10^5$  рад/с,  $R_0 = 100$  Ом определяем денормированные параметры элементов ФНЧ (рис. 7.14):  $L_1 = R_0 L_{1n} / \omega_0 \approx 2,82$  мГн,  $C_1 = C_{1n} / R_0 \omega_0 = 70,5$  нФ,  $R_1 = R_2 = R_{1n} R_0 = 200$  Ом.

## 7.8. Метод синтеза фильтров по ФНЧ-прототипу

В настоящее время теория синтеза линейных фильтров нижних частот достаточно хорошо разработана. Кроме того, фильтры нижних частот по сравнению с другими видами фильтров (верхних частот, полосового, заграждающего и др.) отличаются более простой реализацией. Поэтому синтез фильтров другого вида, отличного от ФНЧ, обычно выполняют путем преобразования ФНЧ, который в этом случае называется *ФНЧ-прототипом* или просто *прототипом*. Такое преобразование позволяет найти структуру и параметры элементов

синтезируемого фильтра путем модификации структуры и параметров элементов ФНЧ-прототипа. В результате, удастся устранить необходимость прямой реализации передаточной функции синтезируемого фильтра, отличного от ФНЧ, что требует громоздких расчетов.

Исследования показали, что преобразование ФНЧ-прототипа не оказывает влияния на погрешность аппроксимации АЧХ синтезируемого фильтра.

Чтобы избежать ошибок в обозначениях комплексной переменной передаточной функции преобразуемого ФНЧ-прототипа и фильтра, получаемого в результате преобразования, будем в дальнейшем переменную передаточной функции ФНЧ-прототипа обозначать буквой  $s$ , а переменную передаточной функции синтезируемого фильтра — буквой  $p$ .

*Синтез фильтров путем преобразования ФНЧ-прототипа* сводится к следующему.

1. Исходя из требований к частотным характеристикам синтезируемого фильтра, определяют вид и порядок передаточной функции  $K(s)$ , а также схему ФНЧ-прототипа.

2. Переменную  $s$  передаточной функции  $K(s)$  ФНЧ-прототипа заменяют переменной  $p$ , которая связана с  $s$  функцией

$$s = \Psi(p). \quad (7.21)$$

Вид функции  $s = \Psi(p)$  выбирают так, чтобы передаточная функция  $K(s)$  ФНЧ-прототипа преобразовывалась в передаточную функцию  $K(p)$  синтезируемого фильтра.

3. С учетом функции (7.21) преобразуют схему и элементы ФНЧ-прототипа в схему и элементы синтезируемого фильтра. При необходимости одновременно с преобразованием элементов схемы выполняется денормирование их параметров по частоте и сопротивлению.

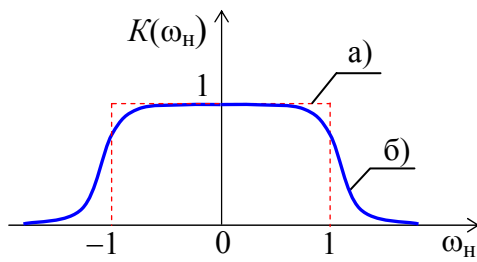


Рис. 7.15 — Нормированные АЧХ идеального (а) и реального (б) ФНЧ-прототипа

При синтезе фильтров особый интерес представляет преобразование точек  $s_1 = 0$  и  $s_2 = \infty$  комплексной плоскости переменной  $s$ . Для ФНЧ-прототипа точка  $s_1 = 0$  соответствует частоте  $\omega_{н1} = 0$ , на которой нормированная АЧХ равна  $K(\omega_{н1}) = 1$ , и точка  $s_2 = \pm\infty$ , соответствующая частоте  $\omega_{н2} = \pm\infty$ , в окрестности которой АЧХ асимптотически стремится к нулю. (рис.

7.15)

Функция (7.21) выбирается так, чтобы выполнялись следующие условия:

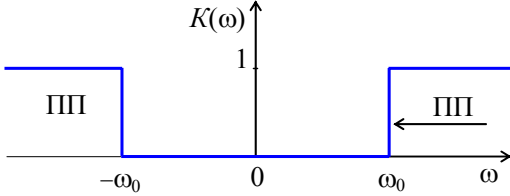
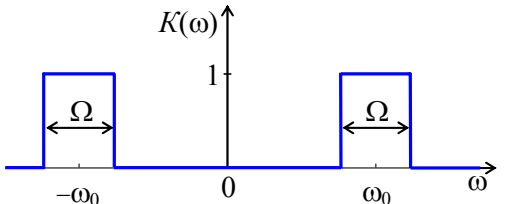
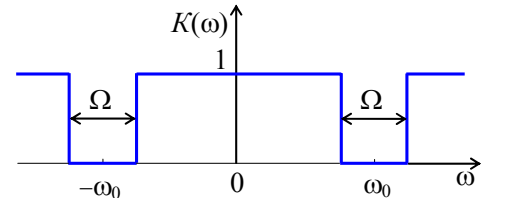
— точка  $s_1 = 0$  комплексной плоскости переменной  $s$  преобразуется в точку  $p_1$  комплексной плоскости переменной  $p$ , которая соответствует середине полосы пропускания синтезируемого фильтра;

— точка  $s_2 = \infty$  комплексной плоскости переменной  $s$  преобразуется в точку  $p_2$  комплексной плоскости переменной  $p$ , в окрестности которой АЧХ синтезируемого фильтра асимптотически стремится к нулю.

Для большинства фильтров вид функции (7.21) известен и связанные с ней преобразования достаточно хорошо исследованы. В таблице 7.1 приведены вид функции (7.21), АЧХ и характерные частоты следующих идеальных фильтров: фильтра верхних частот (ФВЧ), полосового фильтра (ПФ) и заграждающего фильтра (ЗФ). Функции  $s = \Psi(p)$ , приведенные в таблице 7.1, обеспечивают не только нужное преобразование передаточной функции ФНЧ-прототипа, но и денормирование ее по частоте  $\omega_0$ .

Таким образом, синтез фильтра по ФНЧ-прототипу позволяет определять схему и параметры элементов синтезируемого фильтра, используя только схему ФНЧ-прототипа и функцию преобразования переменных  $s = \Psi(p)$ , соответствующую виду синтезируемого фильтра (см. таблицу 7.1).

Таблице 7.1 — Идеальные характеристики синтезируемых фильтров, отличных от ФНЧ

| Вид<br>фильтра | Функция $s = \Psi(p)$                   | АЧХ идеального<br>синтезируемого фильтра                                           | Средняя частота<br>полосы пропускания                                                                      | Частота асимптотического<br>стремления к нулю                                                              |
|----------------|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>ФВЧ</b>     | $s = \frac{\omega_0}{p}$                |   | $\omega_1 = \infty$<br>( $p_1 = \pm\infty$ )                                                               | $\omega_2 = 0$<br>( $p_2 = 0$ )                                                                            |
| <b>ПФ</b>      | $s = \frac{p^2 + \omega_0^2}{\Omega p}$ |   | $\omega_{11} = \omega_0$<br>$\omega_{12} = -\omega_0$<br>( $p_{11} = j\omega_0$<br>$p_{12} = -j\omega_0$ ) | $\omega_{21} = 0$<br>$\omega_{22} = \pm\infty$<br>( $p_{21} = 0$<br>$p_{22} = \pm\infty$ )                 |
| <b>ЗФ</b>      | $s = \frac{\Omega p}{p^2 + \omega_0^2}$ |  | $\omega_{11} = 0$<br>$\omega_{12} = \pm\infty$<br>( $p_{11} = 0$<br>$p_{12} = \pm\infty$ )                 | $\omega_{21} = \omega_0$<br>$\omega_{22} = -\omega_0$<br>( $p_{21} = j\omega_0$<br>$p_{22} = -j\omega_0$ ) |

**Примечание.** В таблице 7.1 использованы следующие обозначения:  $\omega_{1i}$  — средняя частота полосы пропускания;  $\omega_{2i}$  — частота, в окрестности которой АЧХ асимптотически стремится к нулю;  $\Omega$  — полоса пропускания (ПП) фильтра.

Так как операторные сопротивления и проводимости реактивных элементов зависят от комплексной переменной  $s$ , то преобразования  $s = \Psi(p)$ , указанные в таблице 7.1, будут вызывать изменения этих сопротивлений и проводимостей. Поскольку сопротивления резистивных элементов ФНЧ-прототипа не зависят от комплексной переменной  $s$ , то преобразования  $s = \Psi(p)$ , указанные в таблице 7.1, не вызывают изменения этих элементов. Следовательно, при синтезе фильтров по ФНЧ-прототипу резистивные элементы синтезированного фильтра будут такими же как у прототипа, тогда как реактивные элементы претерпевают существенные изменения.

Проанализируем, как изменяются структура и параметры элементов ФНЧ-прототипа при его преобразовании в другие виды фильтров.

### 7.9. Синтез фильтра верхних частот по ФНЧ-прототипу

Поскольку АЧХ ФВЧ и ФНЧ являются взаимнообратными, то в качестве функции (7.21) используется гиперболическая функция (см. таблицу 7.1)

$$s = \frac{\omega_0}{p}. \quad (7.22)$$

Делая в передаточной функции ФНЧ-прототипа замену переменной (7.22), находим передаточную функцию ФВЧ. Денормированная АЧХ ФВЧ изображена на рис. 7.16.



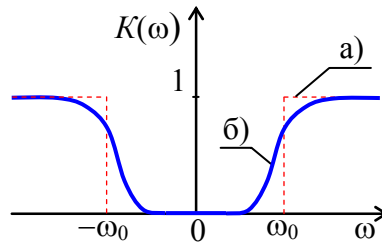


Рис. 7.16 — Денормированная по частоте АЧХ ФВЧ

Нетрудно убедиться, что замена переменной (7.22) преобразует начала координат переменной  $s$  (точка  $s = 0$ ) в бесконечно удаленную точку переменной  $p$  и наоборот, что приводит к инверсии вида АЧХ, при которой полосы пропускания и задержания меняются местами и ФНЧ преобразуется в ФВЧ.

В результате подстановки (7.24) и денормирования по частоте и по сопротивлению операторные сопротивления индуктивностей и емкостей ФНЧ-прототипа преобразуются в выражения:

$$z_i = sL_{iH}R_0 = \frac{\omega_0 L_{iH}R_0}{p} = \frac{1}{pC_i};$$

$$z_k = \frac{R_0}{sC_{kH}} = \frac{pR_0}{\omega_0 C_{kH}} = L_k p,$$

которые можно рассматривать сопротивления емкости

$$C_i = 1/\omega_0 L_{iH}R_0, \quad (7.23)$$

и индуктивности

$$L_k = R_0/\omega_0 C_{kH}, \quad (7.24)$$

где  $L_{iH}$  и  $C_{kH}$  — нормированные  $i$ -ая индуктивность и  $k$ -ая емкость ФНЧ-прототипа;  $\omega_0$ ,  $R_0$  — частота и сопротивление денормирования.

Из (7.22), (7.23) следует, что подстановка (7.22) вызывает в структуре ФНЧ-прототипа замену индуктивностей емкостями и наоборот.

### Пример 7.3

Путем преобразования нормированного ФНЧ-прототипа (рис. 7.13) синтезировать фильтр верхних частот с граничной частотой  $\omega_0 = 10^3$  рад/с, нагруженный на входе и выходе сопротивлением  $R_0 = 50$  Ом.

### Решение

Подставляя известные значения параметров реактивных элементов схемы ФНЧ-прототипа и формулы (7.26), (7.27), определяем значения емкости

$$C_1 = 1/\omega_0 L_{1H}R_0 = 2 \cdot 10^{-5}/\sqrt{2} = 14,1 \text{ мкФ}$$

и индуктивности

$$L_1 = R_0/\omega_0 C_{H1} = 50 \cdot 10^{-3}/\sqrt{2} \approx 35,4 \text{ мГн}.$$

Определяем параметры резистивных элементов фильтра  $R_1 = R_2 = R_{1H}R_0 = 50$  Ом. Заменяя реактивные элементы ФНЧ-прототипа их дуальными эквивалентами и оставляя места

включения резистивных элементов без изменения, составляем схему фильтра верхних частот (рис. 7.17).

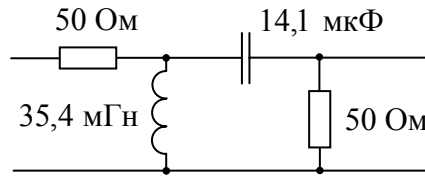


Рис. 7.17 — Электрическая схема ФВЧ

### 7.10. Синтез полосового фильтра по ФНЧ-прототипу

Для преобразования передаточной функции ФНЧ-прототипа в передаточную функцию полосового фильтра используется подстановка (см. таблицу 7.1)

$$s = \frac{p^2 + \omega_0^2}{\Omega p}. \quad (7.25)$$

Функция (7.25) преобразует характерные точки комплексной плоскости переменной  $s$  в следующие точки комплексной плоскости переменной  $p$  :  
 точку  $s_1 = 0$  в две точки  $p = \pm j\omega_0$  расположенные на мнимой оси, которая соответствует середине полосы пропускания полосового фильтра  
 точку  $s = \infty$  в две точки  $p = 0$  и  $p = \infty$ , в которой АЧХ полосового фильтра стремится к нулю.

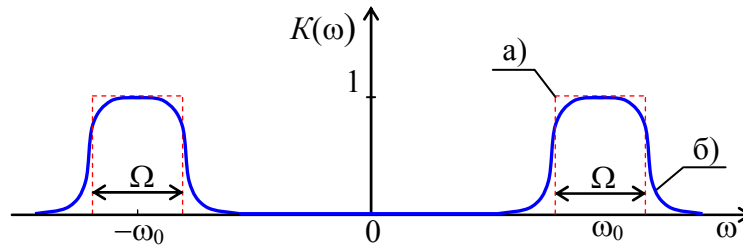


Рис. 7.18 — Денормированная АЧХ полосового фильтра

В результате подстановки (7.25) и денормирования по частоте и по сопротивлению операторные сопротивления  $i$ -ой индуктивности ФНЧ-прототипа преобразуется к виду

$$z_i = R_0 s L_{iH} = R_0 L_{iH} \frac{p^2 + \omega_0^2}{\Omega p} = p \frac{R_0 L_{iH}}{\Omega} + \frac{R_0 \omega_0^2 L_{iH}}{p \Omega} = p L_i + \frac{1}{p C_i},$$

а операторная проводимость  $k$ -ой емкости — к виду

$$y_k = \frac{s C_{kH}}{R_0} = C_{kH} \frac{p^2 + \omega_0^2}{\Omega R_0 p} = p \frac{C_{kH}}{\Omega R_0} + \frac{\omega_0^2 C_{kH}}{\Omega R_0 p} = C_k p + \frac{1}{L_k p}.$$

где  $\omega_0$ ,  $R_0$  — частота и сопротивление денормирования.

Сопротивление  $z_i$  можно рассматривать как сопротивление последовательного  $LC$ -контура, состоящего из индуктивности

$$L_i = R_0 L_{iH} / \Omega \quad (7.26)$$

и емкости

$$C_i = \Omega / R_0 \omega_0^2 L_{iH}, \quad (7.27)$$

а проводимость  $y_k$  как проводимость параллельного  $LC$ -контура, состоящего из емкости

$$C_k = C_{kH} / \Omega R_0 \quad (7.28)$$

и индуктивности

$$L_k = \Omega R_0 / \omega_0^2 C_{kH}. \quad (7.29)$$

Таким образом, подстановка (7.25) вызывает в структуре ФНЧ-прототипа замену каждой индуктивности последовательным  $LC$ -контуром (рис. 7.19,а), а каждой емкости параллельным  $LC$ -контуром (рис. 7.19,б), денормированные параметры которых определяются по формулам (7.26)...(7.29) соответственно.

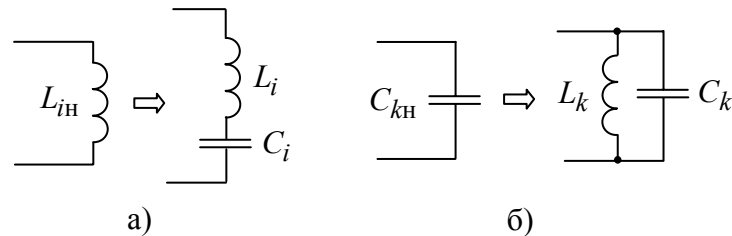


Рис. 7.19 — Преобразование реактивных элементов ФНЧ-прототипа в элементы ПФ

Удвоение число элементов полосового фильтра по сравнению с ФНЧ-прототипом объясняется квадратичным характером функции (7.25), при котором порядок полосового фильтра будет в два раза превышать порядок прототипа.

#### Пример 7.4

Путем преобразования ФНЧ-прототипа (рис. 7.13) синтезировать полосовой фильтр с граничной частотой  $\omega_0 = 10^6$  рад/с, полосой пропускания  $\Omega = 10^4$  рад/с, сопротивлением нагрузки  $R_0 = 75$  Ом.

#### Решение

Используя формулы (7.26)...(7.27), определяем параметры последовательного  $LC$ -контура, заменяющего индуктивность ФНЧ-прототипа:

$$L_1 = R_0 L_{1H} / \Omega = 75 \cdot \sqrt{2} / 10^4 \approx 10,6 \text{ мГн};$$

$$C_1 = \Omega / R_0 \omega_0^2 L_{1H} = 10^4 / (75 \cdot 10^{12} \cdot \sqrt{2}) \approx 94,3 \text{ пФ}$$

и параллельного  $LC$ -контура, заменяющего емкость ФНЧ-прототипа:

$$L_2 = \Omega R_0 / \omega_0^2 C_{1H} = 10^4 \cdot 75 / 10^{12} \cdot \sqrt{2} \approx 0,53 \text{ мкГн};$$

$$C_2 = C_{1H} / \Omega R_0 = \sqrt{2} / (10^4 \cdot 75) \approx 1,89 \text{ мкФ}.$$

Находим параметры резистивных элементов фильтра  $R_1 = R_2 = R_{1H} R_0 = 75$  Ом.

Заменяя в схеме ФНЧ-прототипа индуктивность последовательных контуром с параметрами  $L_1, C_1$ , а емкость параллельным контуром с параметрами  $L_2, C_2$  и оставляя места

включения резистивных элементов без изменения, составляем схему полосового фильтра (рис. 7.20).

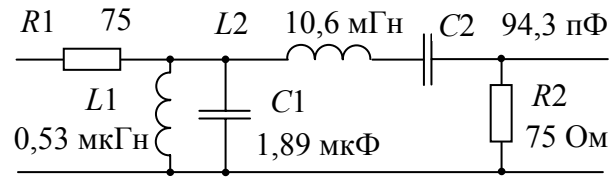


Рис. 7.20 — Схема полосового фильтра

На рис. 7.20 показаны нормированная АЧХ и ФЧХ полосового фильтра (рис. 7.21), полученные путем его моделирования в пакете прикладных программ *Microcap*. Видно, что результаты моделирования достаточно хорошо удовлетворяют исходными данными задачи.

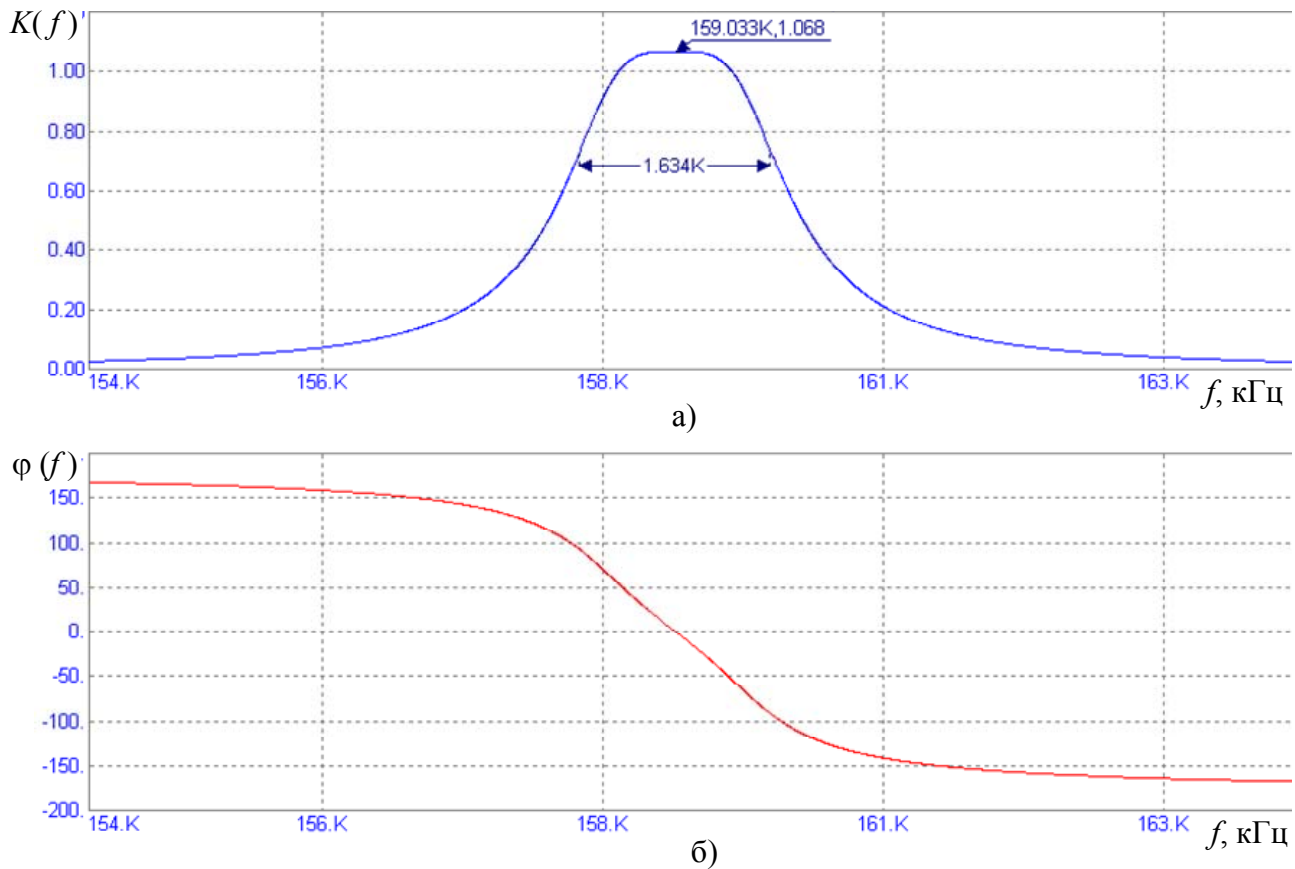


Рис. 7.21 — Частотные характеристики полосового фильтра: АЧХ (а) и ФЧХ (б)

В качестве демонстрации сложности синтеза полосового фильтра по его передаточной функции, найдем последнюю, делая замену переменной (7.25) в формуле (7.21)

$$K(p) = \frac{\omega_0^2}{2(p^4 + \sqrt{2}\Pi p^3 + (2\omega_0^2 + \Pi^2)p^2 + \sqrt{2}\Pi\omega_0^2 p + \omega_0^4)}.$$

Чтобы синтезировать фильтр, используя полученное выражение, необходимо применить к нему один из изложенных выше методов разложения, что существенно сложнее описанного выше метода преобразования ФНЧ-прототипа.

### 7.11. Синтез заграждающего фильтра по ФНЧ-прототипу

Поскольку АЧХ заграждающего и полосового фильтров взаимнообратные, то для синтеза заграждающего фильтра по ФНЧ-прототипу используется функцию, обратная (7.25),

$$s = \frac{\Omega p}{p^2 + \omega_0^2}. \quad (7.30)$$

где  $\Omega$  — полоса задержания синтезируемого фильтра.

Функция (7.30) преобразует точку  $s_1 = 0$  в три точки  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = \infty$  и  $p_3 = -\infty$ , а точку  $s_2 = \infty$  — в две точки, расположенные на мнимой оси  $p_{10} = j\omega_0$  и  $p_{20} = -j\omega_0$ , что и требуется для заграждающего фильтра, АЧХ которого (рис. 7.22) имеет средние частоты областей заграждения (асимптотического затухания)  $\omega_0$  и  $-\omega_0$ , а средние частоты полос пропускания  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = \infty$  и  $\omega_3 = -\infty$ .

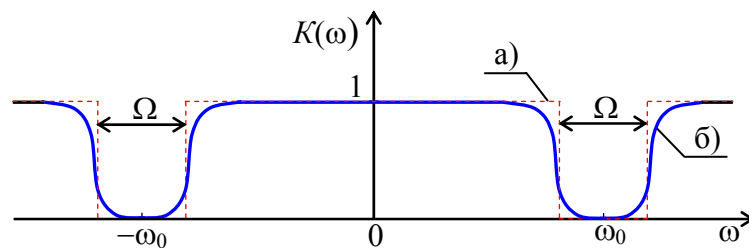


Рис. 7.22 — АЧХ идеального (а) и реального (б) заграждающих фильтров

В результате подстановки (7.30) и денормирования по частоте и по сопротивлению операторная проводимость  $i$ -ой индуктивности ФНЧ-прототипа преобразуется к виду

$$y_i = \frac{1}{R_0 s L_{iH}} = \frac{1}{R_0 L_{iH} \frac{\Omega p}{p^2 + \omega_0^2}} = \frac{p}{\Omega R_0 L_{iH}} + \frac{\omega_0^2}{\Omega R_0 L_{iH} p} = C_i p + \frac{1}{L_i p},$$

а операторное сопротивление  $k$ -ой емкости — к виду

$$z_k = \frac{R_0}{s C_{kH}} = \frac{R_0}{C_{kH} \frac{\Omega p}{p^2 + \omega_0^2}} = \frac{R_0 p}{\Omega C_{kH}} + \frac{R_0 \omega_0^2}{\Omega C_{kH} p} = L_k p + \frac{1}{C_k p},$$

где  $\omega_0$ ,  $R_0$  — частота и сопротивление денормирования.

Проводимость  $y_i$  можно рассматривать как проводимость параллельного  $LC$ -контура, состоящего из емкости

$$C_i = 1/\Omega R_0 L_{iH} \quad (7.31)$$

и индуктивности

$$L_i = \Omega R_0 L_{iH} / \omega_0^2, \quad (7.32)$$

а сопротивление  $z_k$  можно рассматривать как сопротивление последовательного  $LC$ -контура, состоящего из индуктивности

$$L_k = R_0 / \Omega C_{kH} \quad (7.33)$$

$$C_k = \Omega C_{kH} / R_0 \omega_0^2. \quad (7.34)$$

Таким образом, преобразование (7.30) вызывает в структуре ФНЧ-прототипа замену каждой индуктивности параллельным  $LC$ -контуром (рис. 7.23,а), а каждой емкости последовательным  $LC$ -контуром (рис. 7.23,б), параметры которых определяются по формулам (7.31)...(7.34).

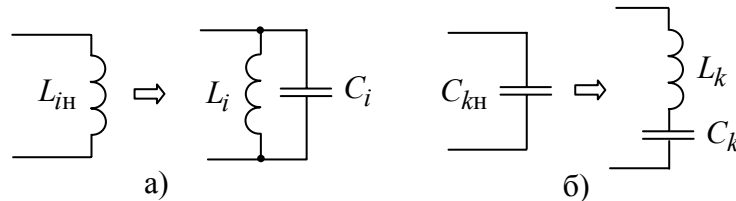


Рис. 7.23 — Преобразование элементов ФНЧ-прототипа в элементы 3Ф

### Пример 7.5

Путем преобразования ФНЧ-прототипа (рис. 7.13) синтезировать заграждающий фильтр с граничной частотой  $\omega_0 = 10^6$  рад/с, полосой задержания  $\Omega = 10^4$  рад/с, сопротивлением нагрузки  $R_0 = 75$  Ом.

### Решение

Используя формулы (7.31)...(7.32), определяем параметры параллельного  $LC$ -контура, заменяющего индуктивность ФНЧ-прототипа,

$$C_1 = 1/\Omega R_0 L_{1H} = 1/(10^4 \cdot 75 \cdot \sqrt{2}) \approx 0,943 \text{ мкФ}$$

$$L_1 = \Omega R_0 L_{1H} / \omega_0^2 = 10^4 \cdot 75 \cdot \sqrt{2} / 10^{12} \approx 1,06 \text{ мГн}$$

и последовательного  $LC$ -контура, заменяющего емкость ФНЧ-прототипа,

$$L_2 = R_0 / \Omega C_{2H} = 75 / 10^4 \cdot \sqrt{2} \approx 5,3 \text{ мГн}$$

$$C_1 = \Omega C_{1H} / R_0 \omega_0^2 = 10^4 \sqrt{2} / (75 \cdot 10^{12}) \approx 189 \text{ пФ}$$

Находим параметры резистивных элементов фильтра  $R_1 = R_2 = R_{1H} R_0 = 75$  Ом и составляем схему заграждающего фильтра (рис. 7.24).

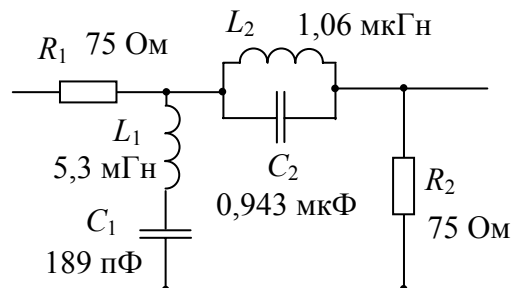


Рис. 7.24 — Схема заграждающего фильтра

В отличие от полосового фильтра (рис. 7.20) в заграждающем фильтре (рис. 7.24) последовательный и параллельный контура меняются местами, что объясняется взаимнообратностью АЧХ этих фильтров.

На рис 7.25 показаны АЧХ и ФЧХ заграждающего фильтра (рис. 7.24), полученные пу-

тем его моделирования в пакете прикладных программ *Microcap*.

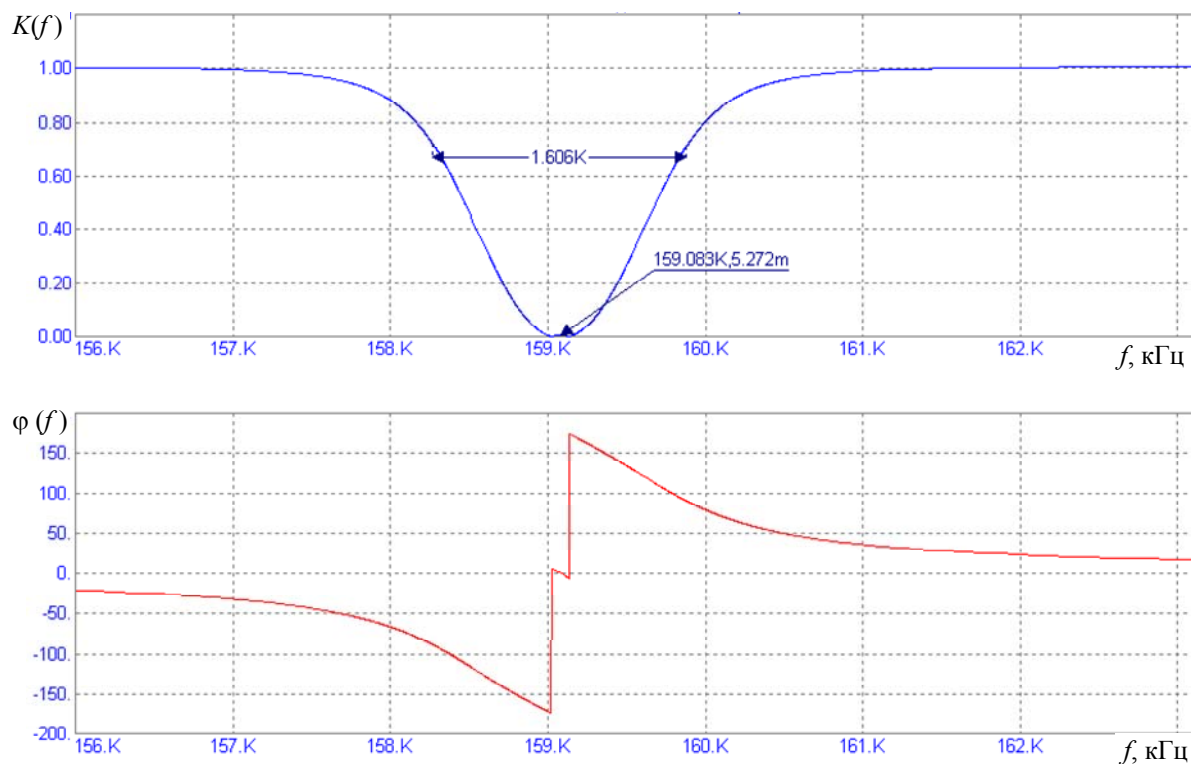


Рис. 7.25 — Частотные характеристики заграждающего фильтра: АЧХ (а) и ФЧХ (б)

Видно, что АЧХ заграждающего фильтра является инверсной относительно АЧХ полосового фильтра (рис. 7.20).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Не смотря на то, что теория синтеза линейных цепей достаточно хорошо разработана, не исключена возможность появления новых методов синтеза и новых принципов построения цепей. Наглядным подтверждением этому является быстрое развитие фильтров на переключаемых конденсаторах, которые позволяют реализовать в интегральном исполнении практически все виды фильтров с управляемыми параметрами.

Благодаря интенсивному развитию ЭВМ широкое распространение в настоящее время получили цифровые фильтры, возможности которых практически не ограничены, поскольку они зависят только от сложности программного обеспечения и быстродействия компьютера, которые быстро прогрессируют. Например, при обработке сигналов цифровым фильтром есть возможность установить добротность до 10000, коэффициент усиления на определенной частоте может достигать 60 дБ, а ослабления — до бесконечности, то есть можно получить практически полное подавление нежелательных частотных составляющих спектра обрабатываемого сигнала, что невозможно получить с помощью аналоговых фильтров. Цифровые фильтры не дают фазовых сдвигов частот, хотя, если это необходимо, то такой сдвиг может быть реализован. Цифровые фильтры не добавляют шум в выходной сигнал.

Однако история развития техники показывает, наиболее аналоговые и цифровые устройства во многих применениях простота и высокое быстродействие аналоговых устройств весьма эффективно дополняет универсальность и неограниченные функциональные возможности цифровых устройств.

Теория линейных электрических цепей, по существу, является теорией линейных систем, поскольку в своем развитии она использовала методы и принципы, полученные в теоретической механике, теории автоматического регулирования, т.е. при анализе и синтезе различных линейных устройств.

Поэтому описанные выше этапы синтеза линейных цепей, а также сопутствующие им приемы могут быть успешно использованы для синтеза систем. В настоящее время теория синтеза систем находится в стадии становления.

Следует отметить, что на этапе реализации практически всем методы синтеза линейных цепей характерен общий подход, который в общем виде был описан Гиллемином Э.А. — профессором Массачусетского технологического института в его известной монографии (Гиллемин Э.А. Синтез пассивных цепей / Э. А. Гиллемином // под. ред. М.М. Айзинова. — М.: Связь, 1970 — 720 с. (главу 3, п. 3.1 “Общие замечания о синтезе”, с. 70 — 73). Указанный подход к решению задач синтеза сводится в следующем.

Если функция, аппроксимирующая заданную функцию системы, сложна, то, отделяя от нее одну за другой простые части в виде слагаемого или сомножителя можно реализовать всю цепь. При таком разложении необходимо соблюдать следующие условия:

- отделяемая часть должна быть более простой, чем исходная функция, и реализуемой непосредственно в виде некоторой цепи;
- остаток разложения должен представлять собой также реализуемую функцию, которая проще исходной функции.

Поскольку выполнение описанной выше процедуры разложения во многом зависит от опыта и интуиции разработчика, то на этапе структурной реализации возможно получение множества эквивалентных цепей, каждая из которых обеспечивает заданные характеристики. При этом выбирают такую цепь, которая удовлетворяет некоторому критерию оптимальности.

Однако теория синтеза нелинейных цепей находится лишь в стадии развития. Еще в большей степени это относится к теории синтеза нелинейных систем. Не смотря на это, непрерывно создаются все новые и новые линейные и нелинейные устройства и системы. При этом широко используются методы и приемы, используемые в теории синтеза линейных цепей.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### Основная литература

1. Белецкий А. Ф. Теория линейных электрических цепей / А. Ф. Белецкий. — М.: Радио и связь, 1986. — 544 с.
2. Гиллемин Э. А. Синтез пассивных цепей / Э. А. Гиллемин. — М.: Связь, 1970. — 720 с.
3. Заде Л. Теория линейных систем (Метод пространства состояний) / Л. Заде, Ч. Дезоер / Под ред. Г. С. Поспелова. Перевод с англ. — М.: Наука, 1970. — 704 с.
4. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем: Пер. с англ./ В. Каннингхэм. — М.: Госэнергоиздат, 1962. — 456 с.
5. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры / Г. Лэм. — М.: Мир — 592 с.
6. Матханов П. Н. Основы синтеза линейных электрических цепей / П. Н. Матханов — М.: Высш. шк., 1976. — 208 с.
7. Мулявка Я. Схемы на операционных усилителях с переключаемыми конденсаторами: Пер. с польск. / Я. Мулявка. — М.: Мир, 1992. — 416 с.
8. Сборник задач по теории электрических цепей / Л. В. Данилов, П. Н. Матханов, Ю. Б. Мерзлютин / Под ред. П. Н. Матханова и Л. В. Данилова — М.: Высш. шк., 1976. — 224 с.
9. Теоретические основы электротехники. Т.1. Основы теории линейных цепей / Под ред. П. А. Ионкина Учебник для электротехн. вузов. — М.: Высш. шк., 1976. — 544 с.
10. Толстов Ю. Г. Теория линейных электрических цепей / Ю. Г. Толстов — М.: Высш. шк., 1978. — 279 с.

### Дополнительная литература

11. Айзинов М. М. Анализ и синтез линейных радиотехнических цепей в переходном режиме / М. М. Айзинов. — М.: Энергия, 1968. — 376 с.
12. Альтшуллер Г. С. Творчество как точная наука. Теория решения изобретательских задач / Г. С. Альтшуллер. — М.: Сов. радио, 1979. — 184 с.
13. Балабанян Н. Синтез электрических цепей / Н. Балабанян. — М.: Госэнергоиздат, 1961. — 543 с.
14. Финкельштейн М. И. Гребенчатые фильтры / М. И. Финкельштейн. — М.: Сов. Радио, 1969. — 320 с.
15. Шваб А. Электромагнитная совместимость: Пер. а нем. В. Д. Мазина и С. А. Спектора / Под ред. Кужекина / А. Шваб. — М.: Энергоатомиздат, 1995. — 480 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Особенности фильтров с переключаемыми конденсаторами

В телекоммуникационных системах с частотным уплотнением каналов широкое применение находят узкополосные канальные фильтры с высокой частотной избирательностью. Такие фильтры, находящиеся в эксплуатации до настоящего времени, были реализованы на основе  $LC$ -схем от 14-го до 40-го порядка с использованием кварцевых резонаторов. Конструирование таких фильтров требует много времени и большой тщательности при изготовлении и настройке.

Существенный прогресс в разработке фильтров наступил в 60-ые годы, когда появились интегральные операционные усилители, что привело к разработке активных  $ARC$ -фильтров (от англ. *Amplified Resistor Capacity Filter* — фильтр на усилителе, резисторах и конденсаторах). При реализации  $ARC$ -фильтров в интегральном исполнении серьезным недостатком является различие технологических процессов изготовления активных и пассивных элементов, а также ограничения в изготовлении индуктивностей.

Например, на частотах от 1 до 400 МГц находят применение плоские катушки индуктивности в виде спирали. Чтобы получить приемлемое значение добротности, ширину проводников такой катушки выбирают в пределах (0,4...1) мм. При этом на площади 1 см<sup>2</sup> размещается катушка с индуктивностью до 10 мкГн. Пленочная технология позволяет уменьшить размеры спиральных катушек, но при этом уменьшается их индуктивность. Однако даже в этом случае площадь, занимаемая индуктивностью на поверхности кристалла (чипа) оказывается недопустимо большой. Кроме того, при интегральном исполнении фильтра наименьший объем занимают транзисторы и диоды по сравнению с конденсаторами и резисторами. Причем при увеличении сопротивления интегрального резистора его объем может в 100 раз превышать объем интегрального конденсатора. Таким образом, наименее технологичным элементом современной микроэлектроники является катушка индуктивности, а также резисторы с большим сопротивлением.

В этой связи чрезвычайно перспективной оказалась идея создания безиндуктивных интегральных фильтров на основе операционных усилителей, в которых резисторы, используемые в цепях, определяющих частотные характеристики фильтра, заменены переключаемыми конденсаторами, которые по своим электрическим свойствам эквивалентны резисторам. Фильтры с переключаемыми конденсаторами получили название  $SC$ -фильтры (от англ. *switched capacitor filter* — фильтр с переключаемыми конденсаторами).

Исключение резисторов из интегральной схемы фильтра позволило не только снизить потребляемую активную мощность и уменьшить температуру нагрева схемы, но и управлять частотными характеристиками фильтра, изменяя частоту переключения конденсаторов и тем самым изменяя сопротивление, эквивалентное переключаемому конденсатору. Точность реализации АЧХ  $SC$ -фильтров зависит от точности, с которой выдерживается отношение емкостей переключаемых конденсаторов, а также от стабильности частоты переключения. Современная интегральная технология обеспечивает погрешность отношения емкостей интегральных конденсаторов порядка 0,06%, а нестабильность частоты переключения порядка  $10^{-6}$ .

В отличие от выше рассмотренных аналоговых фильтров  $SC$ -фильтры — это устройства, которые осуществляют дискретно-аналоговую обработку сигнала. Входное напряжение такого фильтра дискретизируется по времени. Выборки сигнала, полученные в результате дискретизации, обрабатываются затем электрической цепью с переключаемыми конденсаторами. Следует отметить, что к этому же классу устройств, кроме  $SC$ -фильтров, относятся линии задержки, умножители напряжения и другие устройства с переключаемыми конденсаторами.

Основным достоинством  $SC$ -фильтров является простота регулировки их частоты среза (полосы пропускания) с помощью цифровой схемы управления. Поскольку частота среза  $SC$ -фильтров линейно зависит от частоты переключения конденсаторов, то иногда такие филь-

ры называют синхронными. Второе важное преимущество *SC*-фильтров — это отсутствие резисторов и индуктивностей в их схемах. Кроме того, *SC*-фильтр занимает в 9 раз меньшую площадь на кристалле, чем его цифровой 8-разрядный эквивалент, и при этом имеет лучшие параметры. Поэтому за последние время *SC*-фильтры стали интенсивно вытеснять *ARC*-фильтр во многих радиотехнических устройствах.

Поскольку основными элементами *SC*-фильтров являются: электронные ключи, парные конденсаторы небольшой емкости и операционные усилители, реализация таких фильтров в интегральном исполнении достаточно проста. При этом функции каждого резистора в схеме *SC*-фильтра реализуются схемой, состоящей из двух ключей на МОП-транзисторах и одной емкости.

Несмотря на то, что сейчас очень широко распространены методы цифровой обработки, эти методы в некоторых случаях являются избыточными по своим функциональным возможностям, что является платой за универсальность цифровых методов обработки. Кроме того, цифровые сигнальные процессоры по субъективным оценкам специалистов не способны обеспечить такое же высокое качество обработки звуковых сигналов, как при использовании аналоговых устройств. В свете всего вышесказанного, дискретно-аналоговая обработка сигналов, объединяющая основные достоинства аналоговых и цифровых методов, представляется весьма перспективной.

Рассмотрим схему переключаемого конденсатора, показанную на рис. А.1. Пусть на входе схемы действует напряжение  $U_1$ , которое вызывает на ее выходе напряжение  $U_2$ .

Если ключи  $S_1$  и  $S_2$  переключать так, что когда замкнут ключ  $S_1$ , ключ  $S_2$  разомкнут и наоборот, то за один такт переключения с входа фильтра на его выход передается электрический заряд

$$\Delta q = C_1(U_1 - U_2),$$

где  $C_1$  — емкость переключаемого конденсатора.

Для управления ключами  $S_1$  и  $S_2$  необходимы два противофазных сигнала, которые могут быть получены с помощью задающего импульсного генератора и достаточно простой логической схемы.

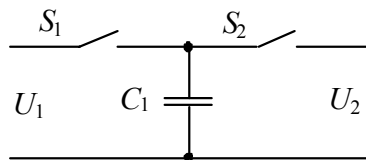


Рис. А.1 — Схема переключаемого конденсатора

При периодическом переключении ключей с частотой  $f_{\Pi}$  заряд, передаваемый с входа цепи на ее выход за единицу времени будет равен

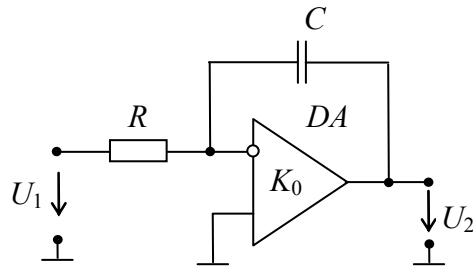
$$\Delta q f_{\Pi} = C_1(U_1 - U_2)f_{\Pi} \quad (\text{А.1})$$

Если левую часть уравнения (А.1) рассматривать как ток  $i = \Delta q / T_{\Pi}$ , где  $T_{\Pi} = 1/f_{\Pi}$  — период повторения импульсов переключения, то его можно преобразовать к виду эквивалентного сопротивления

$$R_{\text{э}} = \frac{U_1 - U_2}{i} = \frac{1}{C_1 f_{\Pi}}. \quad (\text{А.2})$$

Из (А.2) следует, что переключаемый конденсатор (рис. А.1) эквивалентен сопротивлению, величина которого обратно пропорциональна переключаемой емкости  $C_1$  и частоте переключения  $f_{\Pi}$  и не зависит от величины заряда, передаваемого с входа схемы на ее выход.

В качестве примера рассмотрим ФНЧ первого порядка в виде *ARC*-цепи, изображенной на рис. А.2.

Рис. А.2 — Электрическая схема активного  $RC$ -ФНЧ первого порядка

Если пренебречь начальными условиями и положить  $u_{\text{вх}}(0) = 0$ , то выходное напряжение  $u_{\text{вых}}(t)$  цепи связано с ее входным напряжением  $u_{\text{вх}}(t)$  следующим соотношением

$$u_{\text{вых}}(t) = -\frac{1}{RC_2} \int_0^t u_{\text{вх}}(t) dt = -\omega_0 \int_0^t u_{\text{вх}}(t) dt, \quad (\text{A.3})$$

где

$$\omega_0 = 1/RC_2 \quad (\text{A.4})$$

— граничная частота полосы пропускания интегрирующей  $RC$ -цепи.

Из (А.4) следует, что для изменения граничной частоты фильтра (рис. 8.2) необходимо использовать переменный резистор или конденсатор переменной емкости. Однако изменить сопротивление резистора или конденсатора, выполненных в интегральном исполнении, сложно и дорого, особенно, если это необходимо выполнять электронным способом.

Если сопротивление  $R$  в схеме рис. А.2 заменить эквивалентным ему переключаемым конденсатором, то, подставляя (А.2) в (А.4), находим  $\omega_0 = f_{\text{п}} C_1 / C_2$ . Поскольку граничная частота пропорциональна частоте переключения  $f_{\text{п}}$ , то обеспечивается возможность линейного управления этой частотой.

В результате получаем  $SC$ -фильтр, электрическая схема которого изображена на рис. А.3.

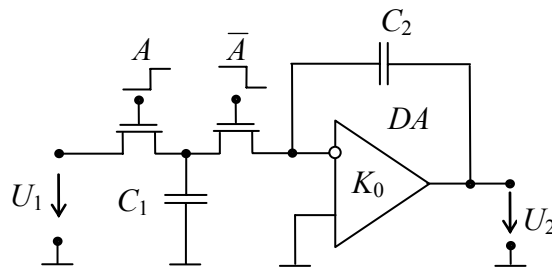


Рис. А.3 — Электрическая схема ФНЧ с переключаемым конденсатором

Обычно в качестве ключей применяют полевые МОП-транзисторы, управляемые противофазными импульсными сигналами  $A$  и  $\bar{A}$ , неперекрывающимися во времени, так как в случае, если оба ключа замкнуты одновременно, схема теряет работоспособность.

Заказ № \_\_\_\_\_ от “ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2013 г. Тираж \_\_\_\_\_ экз.  
Изд-во СевНТУ