

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания и варианты контрольных
заданий по теме модуля для студентов заочной
формы, обучающихся по интегрированным планам
технических специальностей



Севастополь
2011

Элементы теории функций комплексной переменной и теории вероятностей. Методические указания и варианты контрольных заданий по теме модуля для студентов заочной формы, обучающихся по интегрированным планам технических специальностей. Сост.: С.Ф. Ледяев – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2011.-60 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы, обучающимся по интегрированным планам на факультетах РЭ и АВТ два семестра. В первом семестре студенты изучают теорию функций комплексной переменной и выполняют первую контрольную работу. Теоретический материал и примеры выполнения заданий приведены в тексте в разделе «Элементы теории функций комплексной переменной».

Во втором семестре студенты изучают разделы «Операционное исчисление» и «Элементы теории вероятностей» и выполняют вторую контрольную работу. Большинство заданий снабжено ответами.

Номер варианта совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки (индивидуального рабочего плана).

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол №8 от 24 марта 2011 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: доцент кафедры высшей математики Деркач М.И.

СОДЕРЖАНИЕ

	Задания на первую контрольную работу	4
1	Элементы теории функций комплексной переменной	8
1.1	Основные понятия о комплексных числах	8
1.2	Алгебраические действия с комплексными числами	10
1.3	Комплексные корни квадратного алгебраического уравнения	11
1.4	Пример выполнения задания 1	11
1.5	Функция комплексной переменной. Области и границы	12
1.6	Дифференцируемость и аналитичность	14
1.7	Функции комплексной переменной. Формулы Эйлера	15
1.8	Пример выполнения задания 2	17
1.9	Интегрирование функций комплексной переменной	18
1.10	Теоремы Коши для односвязной и многосвязной области	19
1.11	Классификация изолированных особых точек	21
1.12	Представление аналитических функций рядами	22
1.13	Пример выполнения задания 3	25
1.14	Вычеты и их применение для вычисления интегралов	26
1.15	Пример выполнения задания 4	28
	Задания на вторую контрольную работу	30
2	Операционное исчисление	35
2.1	Функция оригинал и изображение по Лапласу. Линейные свойства изображения	35
2.2	Непосредственное преобразование Лапласа некоторых функций	37
2.3	Теоремы преобразования Лапласа	39
2.4	Пример выполнения задания 1	40
2.5	Методы определения оригинала по известному изображению. Пример выполнения задания 2	40
2.6	Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом. Примеры выполнения заданий 3, 4	43
3	Элементы теории вероятностей	47
3.1	Предмет теории вероятностей. Основные понятия. Действия над событиями	47
3.2	Классическая вероятность	49
3.3	Теоремы сложения и умножения вероятностей	50
3.4	Пример выполнения задания 5	51
3.5	Дискретные и непрерывные случайные величины	52
3.6	Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин	55
3.7	Пример выполнения задания 6	56
	Приложение А - таблица преобразований Лапласа	58
	Приложение Б – разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей в пакете MathCAD	59
	Библиографический список	60

Задания на первую контрольную работу

ЗАДАНИЕ 1. а) Заданы два комплексных числа z_1 и z_2 .

Вычислить $z_1 \cdot z_2 + \frac{z_2}{z_1}$.

Вариант	Комплексные числа z_1 и z_2	Ответ
1	$z_1 = -1 + 3i, \quad z_2 = 8 - 4i$	$2 + 26i$
2	$z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 6 + 2i$	$12,8 + 9,6i$
3	$z_1 = -2 + 3i, \quad z_2 = 7 - 4i$	$-4 + 28i$
4	$z_1 = 1 - 3i, \quad z_2 = -3 + 4i$	$7,5 + 12,5i$
5	$z_1 = -2 + i, \quad z_2 = 7 + 4i$	$-20 - 4i$
6	$z_1 = 3 - i, \quad z_2 = 6 - 4i$	$16,2 - 18,6i$
7	$z_1 = 2 - i, \quad z_2 = -5 + 4i$	$-8,8 + 13,6i$
8	$z_1 = 1 - 3i, \quad z_2 = -9 + i$	$-7,2 + 25,4i$
9	$z_1 = 1 + 4i, \quad z_2 = -8 + 2i$	$-16 - 28i$
10	$z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = -7 + 4i$	$-4 + 28i$

б) Найти корни квадратных уравнений

Вариант	Уравнения	Ответ
1	1) $x^2 - 6x + 10 = 0$; 2) $4x^2 + 1 = 0$	1) $3 \pm i$; 2) $\pm \frac{1}{2}i$
2	1) $x^2 + 6x + 18 = 0$; 2) $9x^2 + 4 = 0$	1) $-3 \pm 3i$; 2) $\pm \frac{2}{3}i$
3	1) $x^2 - 4x + 13 = 0$; 2) $x^2 + 1 = 0$	1) $2 \pm 3i$; 2) $\pm i$
4	1) $x^2 - 6x + 13 = 0$; 2) $9x^2 + 16 = 0$	1) $3 \pm 2i$; 2) $\pm \frac{4}{3}i$
5	1) $x^2 + 4x + 8 = 0$; 2) $16x^2 + 1 = 0$	1) $-2 \pm 2i$; 2) $\pm \frac{1}{4}i$
6	1) $x^2 + 2x + 2 = 0$; 2) $4x^2 + 9 = 0$	1) $-1 \pm i$; 2) $\pm \frac{3}{2}i$
7	1) $x^2 - 4x + 5 = 0$; 2) $x^2 + 36 = 0$	1) $2 \pm i$; 2) $\pm 6i$

продолжение - Найти корни квадратных уравнений

Вариант	Уравнения	Ответ
8	1) $x^2 + 4x + 13 = 0$; 2) $9x^2 + 1 = 0$	1) $-2 \pm 3i$; 2) $\pm \frac{1}{3}i$
9	1) $x^2 - 6x + 18 = 0$; 2) $x^2 + 4 = 0$	1) $3 \pm 3i$; 2) $\pm 2i$
10	1) $x^2 + 6x + 13 = 0$; 2) $x^2 + 25 = 0$	1) $-3 \pm 2i$; 2) $\pm 5i$

ЗАДАНИЕ 2. Представить заданную функцию $\varpi = f(z)$, где $z = x + iy$, в виде $\varpi = u(x, y) + iv(x, y)$. Проверить, является ли она аналитической. Если да, то найти значение её производной в заданной точке z_0 .

2.1 $\varpi = 2e^z + z + z^2$, $z_0 = 2 + i$.

2.2 $\varpi = e^{-4z} + z^2 - 3z$, $z_0 = -1 + i$.

2.3 $\varpi = e^{3z} + 2z^2$; $z_0 = 2 - i$.

2.4 $\varpi = e^{4z} - z^2$; $z_0 = 1 - 2i$.

2.5 $\varpi = e^{-2z} - 3z - z^2$; $z_0 = 1 + 2i$.

2.6 $\varpi = 3e^z + z + z^2$; $z_0 = -2 - i$.

2.7 $\varpi = e^{-z} - 3z^2 + z$; $z_0 = 2 - 2i$.

2.8 $\varpi = 3z - e^{2z} + z^2$; $z_0 = 2 + 2i$.

2.9 $\varpi = e^{-3z} - 4z^2$; $z_0 = -1 + 3i$.

2.10 $\varpi = 2z - e^z - z^2$; $z_0 = 3 - i$.

Ответы: 2.1 $2e^{2+i} + 5 + 2i$; 2.2 $-4e^{4-4i} - 5 + 2i$;

2.3 $3e^{6-3i} + 8 - 4i$; 2.4 $4e^{4-8i} - 2 + 4i$; 2.5 $-2e^{-2-4i} - 5 - 4i$;

2.6 $3e^{-2-i} - 3 - 2i$; 2.7 $-e^{-2+2i} - 11 + 12i$; 2.8 $7 - 2e^{4+4i} + 4i$;

2.9 $-3e^{3-9i} + 8 - 24i$; 2.10 $-4 - e^{3-i} + 2i$.

ЗАДАНИЕ 3. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z . Указать правильную и главную часть ряда. Определить тип особой точки.

$$3.1 \quad f(z) = z^3 \cdot \sin \frac{1}{z};$$

$$3.2 \quad f(z) = \frac{1}{z^6} \cdot e^z;$$

$$3.3 \quad f(z) = \frac{1}{z^6} + \frac{3}{z^2} + \cos z;$$

$$3.4 \quad f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z};$$

$$3.5 \quad f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z^2}};$$

$$3.6 \quad f(z) = z^3 - z + \operatorname{sh} \frac{1}{z};$$

$$3.7 \quad f(z) = \frac{1}{z^6} \cdot \operatorname{ch} z;$$

$$3.8 \quad f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \sin(z^2);$$

$$3.9 \quad f(z) = z^5 \cdot \sin \frac{1}{z^2};$$

$$3.10 \quad f(z) = \frac{1}{z^5} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} + \operatorname{sh} z.$$

ЗАДАНИЕ 4. Вычислить интегралы по замкнутому контуру с помощью вычетов

$$4.1 \quad \text{а) } \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z+i) \cdot z^3} dz; \quad \text{б) } \int_{|z+1|=1} (z+1)^2 \sin \frac{1}{z+1} dz.$$

$$4.2 \quad \text{а) } \int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-1)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=1} z^3 \cos \frac{1}{z} dz.$$

$$4.3 \quad \text{а) } \int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z-1)^3(z+2)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z-1|=1} (z-1)^2 \sin \frac{1}{z-1} dz.$$

$$4.4 \quad \text{а) } \int_{|z+3|=5} \frac{z+1}{(z-1)(z+3)^3} dz; \quad \text{б) } \int_{|z+i|=1} (z+i)^3 \operatorname{ch} \frac{1}{z+i} dz.$$

$$4.5 \text{ а) } \int_{|z-1|=1} \frac{\sin iz}{(z-1)^2(z+2)} dz; \text{ б) } \int_{|z-3|=1} (z-3)e^{\frac{1}{z-3}} dz.$$

$$4.6 \text{ а) } \int_{|z+1|=1} \frac{\operatorname{sh} z}{(z-1)(z+1)^2} dz; \text{ б) } \int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{i}{z} dz.$$

$$4.7 \text{ а) } \int_{|z+i|=0,5} \frac{\cos(iz)}{(z+i) \cdot z^3} dz; \text{ б) } \int_{|z|=1} z^4 \operatorname{sh} \frac{i}{z} dz.$$

$$4.8 \text{ а) } \int_{|z-i|=1} \frac{\sin iz}{(z+i)^2(z-i)} dz; \text{ б) } \int_{|z|=1} z \cos \frac{i}{z} dz.$$

$$4.9 \text{ а) } \int_{|z|=4} \frac{z^2 - 3z + 1}{(z+1)(z-i)^2} dz; \text{ б) } \int_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{iz}} dz.$$

$$4.10 \text{ а) } \int_{|z+1|=1} \frac{z^2 - z + 5}{(z-i)(z+1)^2} dz; \text{ б) } \int_{|z|=1} z^5 \operatorname{ch} \frac{i}{z} dz.$$

ОТВЕТЫ

$$4.1. \text{ а) } -3\pi; \text{ б) } -\frac{\pi i}{3}. \quad 4.2. \text{ а) } -i \cdot \pi \cdot e^1; \text{ б) } \frac{\pi i}{12}.$$

$$4.3. \text{ а) } \frac{5 \cdot i \cdot \pi}{27} \cdot e; \text{ б) } -\frac{\pi i}{3}. \quad 4.4. \text{ а) } 0; \text{ б) } \frac{\pi i}{12}.$$

$$4.5. \text{ а) } \frac{2}{9} \pi(-e - 2e^{-1}); \text{ б) } \pi i. \quad 4.6. \text{ а) } \frac{1}{4} i \pi(-3e^{-1} - e); \text{ б) } -\frac{\pi i}{3}.$$

$$4.7. \text{ а) } 2\pi \cos 1; \text{ б) } -\frac{\pi}{60}. \quad 4.8. \text{ а) } \frac{1}{2} i \cdot \pi \cdot \sin 1; \text{ б) } \pi i.$$

$$4.9 \text{ а) } 2i\pi; \text{ б) } \frac{\pi i}{12}. \quad 4.10. \text{ а) } \pi(-4 + 3i); \text{ б) } -\frac{\pi i}{360}.$$

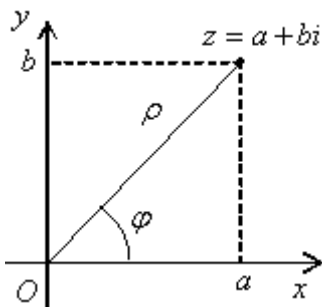
1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНУЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1 Основные понятия о комплексных числах

Комплексным числом z называется выражение вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, а символ i удовлетворяет условию $i^2 = -1$ и называется мнимой единицей.

Числа a и b называются действительной и мнимой частями комплексного числа $z = a + bi$ и обозначаются соответственно символами $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Каждому комплексному числу $z = a + bi$ соответствует точка (a, b) на плоскости прямоугольных декартовых координат Oxy , которую поэтому будем называть комплексной z -плоскостью. Комплексное числа $a + 0i$, совпадающее с действительным числом a , изображается точкой оси Ox , которая называется действительной осью, а комплексное числа $0 + bi$, называемое чисто мнимыми, изображается точкой оси Oy , которая называется мнимой осью.



Точку на плоскости, а, следовательно, и комплексное число, которое изображается этой точкой, можно задавать также при помощи полярных координат ρ и φ . При этом полярный радиус ρ называется модулем комплексного числа z и обозначается символом $|z|$, а полярный угол φ – аргументом комплексного числа z и обозначается символом $\operatorname{Arg} z$. Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определён.

Рисунок 1.1 – Изображение комплексного числа на плоскости z

Модуль комплексного числа $z = a + bi$ определяется однозначно и может быть вычислен по формуле

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (1.1)$$

В частности, если $z = 0$, то $|z| = 0$.

Комплексные числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Комплексное число $a - bi$ называется сопряжённым комплексному числу $z = a + bi$ и обозначается символом $\bar{z}$: $\bar{z} = a - bi$.

Комплексное число z может быть записано в одной из следующих трёх форм:

1) алгебраической: $z = a + bi$; (1.2)

2) тригонометрической: $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; (1.3)

3) показательной: $z = \rho e^{i\varphi}$. (1.4)

Здесь ρ – модуль z , а φ – одно из значений $\text{Arg} z$.

Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на слагаемое $2\pi k$, где k – целое число.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на величину $2\pi k$, где k – целое число. Значение $\text{Arg} z$, принадлежащее промежутку $(-\pi, \pi]$, называется главным значением, обозначается символом $\arg z$ и вычисляется по формулам:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & \text{если } a > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } a = 0, b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } a = 0, b < 0, \\ \arctg \frac{b}{a} - \pi, & \text{если } a < 0, b < 0, \\ \arctg \frac{b}{a} + \pi, & \text{если } a < 0, b \geq 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Пример 1.1 Записать комплексное числа, заданное в алгебраической форме в тригонометрической и показательной форме: $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$.

Решение. Для решения задачи нужно найти модуль комплексного числа по формуле (1.1) и аргумент числа по формуле (1.5).

$$z_1: \rho = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \varphi = \arg z = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3},$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cdot e^{i\pi/3}.$$

1.2 Алгебраические действия с комплексными числами

1. *Сложение и вычитание* двух или нескольких комплексных чисел определяется формулой (при сложении комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части; то же – при вычитании):

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) - (a_3 + b_3 i) + \dots = (a_1 + a_2 - a_3 + \dots) + (b_1 + b_2 - b_3 + \dots) i.$$

2. *Умножение* двух комплексных чисел в алгебраической форме производится по правилу умножения многочленов с заменой $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i.$$

Умножение двух комплексных чисел в показательной форме

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

Умножение двух комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] \cdot [\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned}$$

т.е. модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, аргумент произведения – сумме аргументов сомножителей.

Произведение сопряженных чисел – действительное число:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

3. *Деление* двух комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению и осуществляется по формулам:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

то есть модуль частного равен частному модулей, аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.

Чтобы разделить два числа в алгебраической форме, нужно числитель и знаменатель умножить на число, сопряжённое знаменателю, а затем представить результат в алгебраической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2) \cdot (a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

1.3 Комплексные корни квадратного алгебраического уравнения

Решение квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1.6)$$

в котором коэффициенты a , b , c – вещественные числа, определяется по формулам

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad (1.7)$$

где дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных различных корня, если $D = 0$, то уравнение имеет два одинаковых корня, если $D < 0$, то уравнение не имеет *действительных* корней. Однако, если $D < 0$, то уравнение имеет два *комплексных сопряжённых* корня.

Таким образом, квадратное уравнение (1.6) всегда имеет два корня – действительных или комплексных.

1.4 Пример выполнения задания 1

а) Заданы два комплексных числа $z_1 = 4 - 5i$ и $z_2 = -1 + 3i$.

Вычислить $z_1 \cdot z_2 + \frac{z_2}{z_1}$.

Решение

Вычисляем произведение комплексных чисел: $(4 - 5i)(-1 + 3i) = -4 + 5i + 12i - 15 \cdot i^2 = 11 + 17i$ (так как $i^2 = -1$). Теперь разделим числа, умножив делимое и делитель на число, сопряжённое делителю:

$$\frac{-1 + 3i}{4 - 5i} = \frac{(-1 + 3i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{-4 + 12i - 5i + 15i^2}{4^2 - (5i)^2} = \frac{-19 + 7i}{41} = -\frac{19}{41} + \frac{7}{41}i.$$

Сложим результаты умножения и деления, сложив по отдельности действительные и мнимые части:

$$z_1 \cdot z_2 + \frac{z_2}{z_1} = (11 + 17i) + \left(-\frac{19}{41} + \frac{7}{41}i \right) = 10\frac{22}{41} + 17\frac{7}{41}i.$$

б) Найти корни уравнения 1) $x^2 - 2x + 10 = 0$, 2) $x^2 + 16 = 0$.

Решение

1) Вычисляем дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36$. По формулам (1.7) вычисляем корни:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = 1 \pm 3i.$$

Корни уравнения комплексные и сопряжённые.

2) В неполном квадратном уравнении дискриминант вычислять не надо.

$x^2 = -16$. Отсюда $x_{1,2} = \pm \sqrt{-16} = \pm 4i$. Действительные части корней равны нулю.

1.5 Функция комплексной переменной. Области и границы

Если x и y - действительные переменные, $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, то переменная $z = x + yi$ называется *комплексной переменной в алгебраической форме*. Действительную и мнимую части комплексной переменной z обозначают $\operatorname{Re} z = x$ и $\operatorname{Im} z = y$. Сопряженная комплексная переменная $\bar{z}$ отличается от z знаком мнимой части: $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$.

Пусть на комплексной плоскости Z задано множество точек M , а на комплексной плоскости ϖ - множество точек N .

Определение. Если каждому значению z из множества M поставить в соответствие по закону f одно или несколько значений другой комплексной переменной $\varpi = u + vi$ из множества N , то комплексная переменная ϖ называется функцией z в области M , $\varpi = f(z)$.

Другими словами, *функция осуществляет отображение множества точек плоскости Z на соответствующее множество точек плоскости ϖ* .

Функция $\varpi = f(z)$ называется *однозначной*, если каждому значению $z \in M$ ставится в соответствие только одно значение ϖ , и *многозначной*, если каждому значению $z \in M$ ставится в соответствие несколько значений $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3 \dots$

Если $\operatorname{Re} \varpi = u(x, y)$ – действительная часть функции ϖ , $\operatorname{Im} \varpi = v(x, y)$ – мнимая часть функции ϖ , то функция $f(z)$ записывается в виде суммы действительной части и мнимой части, умноженной на i (запись функции $f(z)$ в алгебраической форме):

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (1.8)$$

Однозначная функция $\varpi = f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ имеет определенный предел c (z_0 и c – комплексные числа), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $0 < |z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - c| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$.

Функция $\varpi = f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0 , если она определена в этой точке z_0 и некоторой её окрестности и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области D , называется *непрерывной в этой области*.

Область D – это множество точек, обладающих свойством *открытости* (вместе с точкой области D принадлежит и достаточно малый круг с центром в этой точке) и свойством *связности* (две любые точки D можно соединить ломаной, полностью лежащей в D).

Порядком связности ограниченной области D называется число связанных частей, на которые разбивается её граница. Граница может состоять из замкнутых линий, разрезов и точек.

Границы области могут задаваться уравнениями кривых, одну из которых рассмотрим на примере.

Пример 1.2 Определить вид кривой $|z - (a + bi)| = R$, где a, b, R – действительные числа.

Решение

$$|z - (a + bi)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

– уравнение окружности с центром в точке $(a + bi)$ и радиусом R .

Пример 1.3 Определить вид и связность области, заданной неравенствами: а) $|z - 2i| \leq 3$; б) $1 < |z + 1| < 2$.

Решение. а) Поскольку уравнение $|z - 2i| = 3$ задаёт окружность с центром в точке $z = 2i$ и с радиусом 2 (см. пример 1.2), то неравенство $|z - 2i| \leq 3$ задаёт замкнутую односвязную область, показанную на рисунке 1.2а.

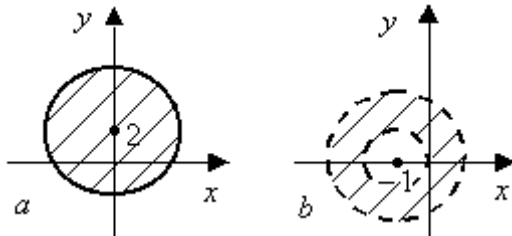


Рисунок 1.2а, б – К примеру 1.6

б) Открытая двусвязная область – кольцо, границы которого $|z + 1| = 1$ и $|z + 1| = 2$ не входят в область (см. рисунок 1.2б).

1.6 Дифференцируемость и аналитичность

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z .

Функция дифференцируема в точке z , если существует предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z). \quad (1.9)$$

Этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в точке z .

Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области D и имеющая в этой области непрерывную производную $f'(z)$, называется *аналитической в области D* .

Функция $f(z)$ называется *аналитической в точке $z_0 \in D$* , если $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности точки z_0 .

Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была аналитической в некоторой области D , необходимо и достаточно существование в этой области непрерывных частных производных от функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \quad (1.10)$$

Равенства (1.10) называются *условиями Коши – Римана*.

Для аналитических функций правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций комплексной переменной такие же, как для функций действительной переменной, см. таблицы 1.1 и 1.2.

1.7 Функции комплексной переменной. Формулы Эйлера

К элементарным функциям комплексной переменной относят следующие:

1. Степенная функция $\varpi = z^n$, где n - любое целое положительное число.
2. Показательная функция $\varpi = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$.
3. Тригонометрические синус и косинус $\varpi = \sin z$, $\varpi = \cos z$.
4. Гиперболические синус и косинус $\varpi = \operatorname{sh} z$, $\varpi = \operatorname{ch} z$.
5. Общая показательная функция $\varpi = \alpha^z$, где $\alpha \neq 0$ - комплексное число;
6. Общая степенная функция $\varpi = z^\alpha$, где α - любое комплексное число; в частном случае $\alpha = n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
7. Логарифмическая функция определяется как обратная показательной $e^{\varpi} = z$:

$$\varpi = \ln z = \ln|z| + i \cdot \operatorname{Arg} z.$$

Функции 2, 3, 4 пунктов связаны между собой *формулами Эйлера*:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \quad (1.11)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}); \quad (1.12)$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}). \quad (1.13)$$

Кроме того, между тригонометрическими и гиперболическими функциями имеют место зависимости:

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z; \quad \operatorname{ch} iz = \cos z; \quad (1.14)$$

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z; \quad \cos iz = \operatorname{ch} z. \quad (1.15)$$

Пример 1.4 Представить в алгебраической форме значение функции:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 4i\right) = \begin{pmatrix} x = \frac{\pi}{3} \\ y = 4 \end{pmatrix} = \sin \frac{\pi}{3} \cos 4i + \cos \frac{\pi}{3} \sin 4i =$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} \operatorname{ch} 4 + i \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{sh} 4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} 4 + i \frac{1}{2} \operatorname{sh} 4.$$

Здесь использованы формулы (1.15) и формула для синуса суммы $\sin(\alpha + \beta)$.

Большое значение в приложениях ТФКП имеет дробно-рациональная функция

$$\varpi = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}, \text{ где } n, m \in \mathbb{N}.$$

Таблица 1.1 – Правила дифференцирования

Производная постоянной равна нулю $C' = 0$.	
Производная суммы функций равна сумме производных этих функций:	
$(f_1(z) + f_2(z))' = f_1'(z) + f_2'(z)$	
Производная произведения:	
$(f_1(z) \cdot f_2(z))' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z)$	
Постоянный множитель выносится за знак производной:	
$(C \cdot f(z))' = C \cdot f'(z).$	
Производная дроби:	
$\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right)' = \frac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{(f_2(z))^2}.$	
Производная сложной функции:	
$(f(g(z)))' = f'_g(g(z)) \cdot g'(z).$	

Таблица 1.2 – Производные аналитических функций

$(z^n)' = n \cdot z^{n-1}, \quad n \neq 0$	$(e^z)' = e^z$	$(a^z)' = a^z \cdot \ln a$
$(\ln z)' = 1/z$	$(\sin z)' = \cos z$	$(\cos z)' = -\sin z$
$\operatorname{sh}'(z) = \operatorname{ch}(z)$		$\operatorname{ch}'(z) = \operatorname{sh}(z)$

1.8 Пример выполнения задания 2

Представить заданную функцию $\varpi = e^{2z} - z + 3z^2$, где $z = x + iy$, в виде $\varpi = u(x, y) + iv(x, y)$. Проверить, является ли она аналитической. Если да, то найти значение её производной в заданной точке z_0 .

Решение

Заданная функция является алгебраической суммой элементарных функций комплексной переменной z . Показательная функция $e^{2z} = e^{2(x+iy)} = e^{2x+i2y} = e^{2x} \cos 2y + ie^{2x} \sin 2y$ (см. §1.7).

Так как $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xiy + i^2 y^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$, то

$$3z^2 = 3(x^2 - y^2) + i6xy.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \varpi &= e^{2z} - z + 3z^2 = e^{2x} \cos 2y + ie^{2x} \sin 2y - (x + iy) + \\ &+ 3(x^2 - y^2) + i6xy = \\ &= (e^{2x} \cos 2y - x + 3x^2 - 3y^2) + i(e^{2x} \sin 2y - y + 6xy). \end{aligned}$$

Определили действительную и мнимую части заданной функции:

$$u(x, y) = e^{2x} \cos 2y - x + 3x^2 - 3y^2, \quad v(x, y) = e^{2x} \sin 2y - y + 6xy.$$

Проверяем выполнение условий Коши-Римана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Определяем частные производные:

$$u'_x(x, y) = (e^{2x} \cos 2y - x + 3x^2 - 3y^2)'_x = 2e^{2x} \cos 2y - 1 + 6x;$$

$$v'_y(x, y) = (e^{2x} \sin 2y - y + 6xy)'_y = 2e^{2x} \cos 2y - 1 + 6x.$$

Первое условие выполняется, $u'_x(x, y) = v'_y(x, y)$. Далее,

$$u'_y(x, y) = (e^{2x} \cos 2y - x + 3x^2 - 3y^2)'_y = -2e^{2x} \sin 2y - 6y;$$

$$v'_x(x, y)' = (e^{2x} \sin 2y - y + 6xy)'_y = 2e^{2x} \sin 2y + 6y.$$

Второе условие выполняется, $u'_y(x, y) = -v'_x(x, y)$.

Заданная функция – аналитическая. Определяем её производную по z , используя правила дифференцирования (таблица 1.1) и таблицу 1.2 производных аналитических функций.

$\varpi'_z = (e^{2z} - z + 3z^2)'_z = 2e^{2z} - 1 + 6z$. Находим значение её производной в заданной точке $z_0 = \frac{\pi}{2}i$ с учетом того, что $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$.

$$\varpi'_z\left(\frac{\pi}{2}i\right) = 2e^{\pi i} - 1 + 3\pi i = 2(\cos \pi + i \sin \pi) - 1 + 3\pi i = -3 + 3\pi i.$$

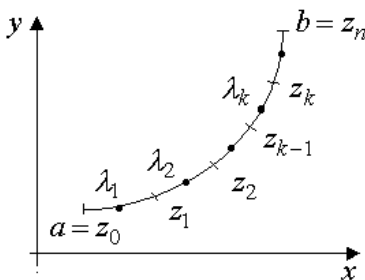
Ответ: $\varpi'_z\left(\frac{\pi}{2}i\right) = -3 + 3\pi i$.

1.9 Интегрирование функций комплексной переменной

Пусть задана ориентированная кривая C и на ней функция $\varpi = f(z)$. Пусть $z_0 = a, z_1, z_2, \dots, z_n = b$ – последовательные точки, разбивающие кривую C на n участков; a, b – концы линии C (см. рисунок 1.3). Частичные дуги заменяются отрезками $[z_{k-1}, z_k]$; длина k -го отрезка обозначается $|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}|$. Точка λ_k – произвольная точка кривой C , лежащая на дуге z_{k-1}, z_k .

Интегралом от функции $f(z)$ вдоль кривой C называют предел

$$\lim_{\substack{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) = \int_C f(z) dz. \quad (1.16)$$



Если функция $f(z)$ непрерывна на C , то интеграл существует.

Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, вычисление интеграла (1.16) сводится к вычислению криволинейных интегралов второго рода от действительных функций.

Рисунок 1.3 – К определению интеграла

В самом деле,

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_C v(x, y)dx + u(x, y)dy. \quad (1.17)$$

Кривая C может быть как незамкнутой, так и замкнутой. Формула (1.17) справедлива как для аналитических, так и для неаналитических функций.

Из определения (1.16) и из формулы (1.17) следуют *свойства интеграла*:

- 1) $\int_C (k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z))dz = k_1 \int_C f_1(z)dz + k_2 \int_C f_2(z)dz$;
- 2) $\int_{MN} f(z)dz = - \int_{NM} f(z)dz$ (знак интеграла меняется при изменении направления интегрирования);
- 3) если кривая C состоит из кривых C_1 и C_2 (пишут $C = C_1 + C_2$) то

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz;$$

1.10 Теоремы Коши для односвязной и многосвязной области

Теорема Коши для односвязной области. Если $f(z)$ является аналитической функцией на замкнутом контуре C и в односвязной области, ограниченной этим контуром, то

$$\oint_C f(z)dz = 0. \quad (1.18)$$

(Область, ограниченная контуром C , называют односвязной, если внутри контура нет точек в которых функция не определена и не аналитическая).

Теорема Коши для многосвязной области.

Интеграл от аналитической функции $f(z)$ по внешнему контуру равен сумме интегралов по всем внутренним контурам:

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz.$$

Из теоремы Коши для односвязной области следует: если $f(z)$ – аналитическая функция, C – незамкнутая линия с началом в точке A и концом в точке B ($A, B, C \subset D$), то интеграл $\int_C f(z)dz$ не зависит от вида C

кривой, соединяющей точки A и B , и вычисляется по формуле Ньютона-

Лейбница:
$$\int_C^B f(z)dz = \int_A^B f(z)dz = F(B) - F(A), \quad (1.19)$$

где $F(z)$ первообразная для $f(z)$ ($F'(z) = f(z)$).

Первообразные аналитических функций определяются по таким же формулам, как и первообразные функций действительной переменной. См. таблицу 1.3.

Пример 1.5 Вычислить интегралы:

а) $\oint_{|z|=6} z^5 \cdot \sin 3z dz$; б) $\int_{MN} (z^3 + \operatorname{ch} 2z) dz$, где линия MN задана

уравнением $y = 2x - 1$, $M(0; -1)$, $N(1; 1)$.

Решение. а) Подынтегральная функция $z^5 \sin 3z$ – произведение двух аналитических функций, поэтому также аналитическая функция во всех точках комплексной плоскости z . Замкнутый контур интегрирования $|z| = 6$ – окружность радиуса 6 с центром в начале координат. Поэтому,

$$\oint_{|z|=6} z^5 \cdot \sin 3z dz = 0.$$

б) Подынтегральная функция $z^3 + \operatorname{ch} 2z$ – сумма двух аналитических на всей комплексной плоскости функций, следовательно, аналитическая. Вычисляем интеграл по разомкнутой кривой по формуле (1.17).

$$\begin{aligned} \int_{MN} (z^3 + \operatorname{ch} 2z) dz &= \int_M^N (z^3 + \operatorname{ch} 2z) dz = \left(\frac{z^4}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2z \right) \Big|_{-i}^{1+i} = \\ &= \frac{(1+i)^4}{4} - \frac{(-i)^4}{4} + \frac{1}{2} (\operatorname{sh}(2+2i) - \operatorname{sh}(-i)) = -\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2+2i) + \operatorname{sh} i = \\ &= -1,25 + 0,5(\operatorname{sh} 2 \cdot \operatorname{ch} 2i + \operatorname{ch} 2 \cdot \operatorname{sh} 2i) + \operatorname{sh} i = -1,25 + 0,5(\operatorname{sh} 2 \cdot \cos 2 + \\ &+ i \operatorname{ch} 2 \cdot \sin 2) + i \sin 1 = (0,5 \cdot \operatorname{sh} 2 \cdot \cos 2 - 1,25) + i(0,5 \cdot \operatorname{ch} 2 \cdot \sin 2 + \sin 1). \end{aligned}$$

Выводы:

1. Интеграл от любой функции комплексной переменной можно вычислить по формуле (1.17), переходя к криволинейным интегралам от функций действительных переменных.
2. Интеграл от аналитической функции по незамкнутой линии не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от координат начальной и конечной точки интегрирования и вычисляется по формуле (1.19).

3. Интеграл от аналитической функции *на замкнутом контуре* C и в односвязной области, ограниченной этим контуром равен нулю.

Интегрирование функций на замкнутом контуре, внутри которого существуют точки, в которых функция не определена, описано ниже, в §§1.14, 1.15.

Таблица 1.3 – Первообразные аналитических функций

Функция $f(z)$ и её первообразная $F(z)$		Функция $f(z)$ и её первообразная $F(z)$	
$f(z)$	$F(z)$	$f(z)$	$F(z)$
$z^n, n \neq -1$	$\frac{z^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{z}$	$\ln(z)$
e^z	e^z	a^z	$a^z \cdot \ln a$
$\sin(z)$	$\cos(z)$	$\cos(z)$	$-\sin(z)$
$\operatorname{sh}(z)$	$\operatorname{ch}(z)$	$\operatorname{ch}(z)$	$\operatorname{sh}(z)$

1.11 Классификация изолированных особых точек

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $w = f(z)$, если $f(z)$ – однозначная и аналитическая функция в круговом кольце $0 < |z - z_0| < \delta$ (т.е. кроме самой точки z_0).

Различают три типа изолированных особых точек: точка называется *устранимой*, если существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$; точка

называется *полюсом*, если предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$; точка называется

существенно особой, если предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует.

То, что точка z_0 является полюсом для функции $f(z)$, можно определить и по виду функции.

- 1) Функция $f(z)$ может быть представлена в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$, где

$\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке $z = z_0$ и $\varphi(z_0) \neq 0$; в этом случае функция имеет полюс порядка m . Если $m = 1$ полюс называется простым.

2) Если для аналитической функции $\varphi(z)$ справедливы равенства $\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = \dots = \varphi^{(k-1)}(z_0) = 0$, но $\varphi^{(k)}(z_0) \neq 0$, то число z_0 есть нуль порядка m функции $\varphi(z)$. Тогда для функции $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ это число z_0 является *полюсом порядка m* .

3) Пусть $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены, не имеющие общих корней. Нули многочлена $Q(z)$ являются полюсами $f(z)$, причем порядок полюсов совпадает с порядком соответствующих нулей многочлена $Q(z)$.

Пример 1.6 Найти особые точки данных функций и определить их тип.

a) $\frac{e^{z^2} - 1}{e^{2z} - \cos z + z^2 - 2z}$; б) $\frac{4z + 1}{z^2(z - 1)}$.

Решение

a) Особая точка $z = 0$. Вычисляем предел, раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{e^{2z} - \cos z + z^2 - 2z} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2ze^{z^2}}{2e^{2z} + \sin z + 2z - 2} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2e^{z^2} + 4z^2e^{z^2}}{4e^{2z} + \cos z + 2} = \frac{2}{7}. \text{ Точка } z = 0 \text{ является устранимой особой точкой.}$$

б) Точка $z = 0$ является полюсом второго порядка, так как для многочлена $z^2(z - 1)$ она является нулем кратности 2. При этом числитель $(4z + 1) \neq 0$ для $z = 0$. Точка $z = 1$ – простой полюс.

1.12 Представление аналитических функций рядами

1.12.1 Ряды Тейлора

Теорема. Функция $f(z)$ представима рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (1.20)$$

в любом открытом круге с центром в точке z_0 , в котором она аналитическая. Во всякой замкнутой области, принадлежащей этому кругу, ряд Тейлора сходится равномерно.

Если $z_0 = 0$, ряд (1.20) называют также рядом *Маклорена*.

Ряды Тейлора основных элементарных функций комплексной переменной сходятся во всей комплексной плоскости:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad (1.21)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad (1.22)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \quad (1.23)$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad (1.24)$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (1.25)$$

Радиус сходимости ряда Тейлора определяется расстоянием от точки z_0 до ближайшей точки z , в которой $f(z)$ не аналитическая.

Обозначим коэффициенты ряда (1.20) $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = C_n$, тогда ряд Тейлора

можно записать в виде $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$.

Если точка z_0 является нулем функции кратности (порядка) k , то ряд Тейлора в её окрестности имеет вид:

$$f(z) = C_k (z - z_0)^k + C_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \dots, \quad \text{то есть}$$

$C_0 = C_1 = \dots = C_{k-1} = 0$. Из формул для коэффициентов ряда Тейлора следует, что если точка z_0 является нулем функции кратности (порядка) k , то $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, но $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Если $k = 1$, точка z_0 называется *простым нулём* функции $f(z)$.

1.12.2 Ряды Лорана

Для функций, аналитических в кольцевых областях (см. рисунок 1.4) $r < |z - z_0| < R$, где $r \geq 0$, $R \leq \infty$, можно построить разложения по положительным и отрицательным степеням $(z - z_0)$ вида

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (1.26)$$

являющиеся обобщением тейлоровских разложений.

Ряд (1.26) называется рядом Лорана. Ряд Лорана состоит из двх частей:

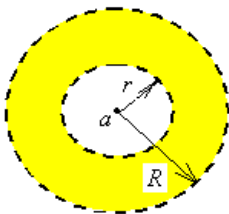
ряд $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ называется правильной частью ряда Лорана, а

ряд $f_2(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$ называется главной частью.

При этом $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана (1.26), коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (r < \rho < R, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.27)$$



Разложение функций в ряды Лорана, так же, как в ряды Тейлора, можно осуществить различными способами. В том числе используя разложения основных элементарных функций (1.21) – (1.25).

Рисунок 1.4 – Кольцевая область

Характер изолированной особой точки $z = z_0$ функции $f(z)$ может быть установлен по количеству членов главной части ряда Лорана этой функции в окрестности особой точки z_0 (количество членов правильной части во внимание не принимается).

Точка $z = z_0$ будет устранимой, если ряд Лорана в окрестности z_0 не содержит членов главной части:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n .$$

Действительно, в этом случае

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 .$$

Точка $z = z_0$ является *полюсом* функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности z_0 содержит конечное число членов. Порядок полюса определяется показателем степени старшего члена главной части (полюс 1-го порядка называется простым).

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^m \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} . \quad \text{В этом случае предел}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=1}^m \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} = C_0 + \infty = \infty .$$

Точка $z = z_0$ является *существенно особой*, если ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности z_0 содержит бесконечное число членов главной части:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} .$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} .$$

1.13 Пример выполнения задания 3

Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z^5} \cos(2z)$ в ряд Лорана по степеням z .

Указать правильную и главную часть ряда. Определить тип особой точки $z = 0$.

Решение

Воспользуемся формулой (1.23) для разложения в ряд функции $\cos(2z)$.

Для этого в формуле (1.23) вместо z подставим $2z$:

$$\cos(2z) = 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} \dots + (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f(z) &= \frac{1}{z^5} \cos(2z) = \frac{1}{z^5} \left(1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z^5} - \frac{4}{2!z^3} + \frac{16}{4!z} - \frac{2^6 z}{6!} + \frac{2^8 z^3}{8!} - \dots \end{aligned}$$

Полученный ряд Лорана имеет бесконечное число членов правильной части $-\frac{2^6 z}{6!} + \frac{2^8 z^3}{8!} - \dots$ и три члена главной части $\frac{1}{z^5} - \frac{4}{2!z^3} + \frac{16}{4!z}$.

Показатель степени старшего члена главной части равен 5, следовательно, $z = 0$ - полюс 5 - го порядка.

Ответ: тип особой точки $z = 0$ - полюс 5 - го порядка.

1.14 Вычеты и их применение для вычисления интегралов

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке a (обозначается $\text{res } f(a)$) называется число

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (1.28)$$

где γ - окружность малого радиуса $|z - a| = \rho$. Величина вычета не зависит от радиуса ρ для достаточно малых значений ρ .

Из формул (1.27) для коэффициентов ряда Лорана при $n = -1$ вытекает, что

$$\text{res } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = C_{-1},$$

т. е. *вычет функции $f(z)$ в особой точке a равен коэффициенту номера минус один лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки a .*

Отсюда следует, что в *устранимой* особой точке вычет функции всегда равен нулю, так как ряд Лорана в окрестности *устранимой* особой точки не имеет членов главной части.

Вычет в *полюсе* порядка m можно определить по формуле

$$C_{-1} = \text{res } f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]. \quad (1.29)$$

Если $m = 1$, формула для вычета в простом полюсе принимает вид

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)]. \quad (1.30)$$

В полюсе второго порядка, $m = 2$, вычет вычисляется по формуле

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} [(z-a)^2 f(z)]. \quad (1.31)$$

Вычет в *существенно* особой точке определяется только по коэффициенту C_{-1} в лорановском разложении.

Пример 1.7 Вычислить вычеты в изолированных особых точках следующих функций: а) $\frac{z+2}{z^2(z-3)}$; б) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$.

Решение

а) Особыми точками функции $(z+2)/(z^2(z-3))$ является простой полюс $z_1 = 3$ и полюс второго порядка $z_2 = 0$. Вычет в простом полюсе $z_1 = 3$ вычисляем по формуле (1.30):

$$\operatorname{res}_{z=3} \frac{z+2}{z^2(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \frac{z+2}{z^2(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z+2}{z^2} = \frac{5}{9}.$$

Вычет в полюсе второго полядка $z_2 = 0$ вычисляем по формуле (1.31):

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{z+2}{z^2(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{z+2}{z^2(z-3)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-3-z-2}{(z-3)^2} = -\frac{5}{9}.$$

б) Данная функция имеет существенно особую точку $z = 0$, поэтому вычет в ней определяем по коэффициенту C_{-1} разложения в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$. Функцию $e^{\frac{1}{z}}$ разложим в ряд Лорана, по формуле (1.21), подставив в ней $1/z$ вместо z .

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \dots \right) = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{z 3!} + \frac{1}{z^2 4!} + \dots$$

$$C_{-1} = \operatorname{res}_{z=0} z^2 e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Применение теории вычетов основывается на следующей теореме Коши о вычетах.

Основная теорема Коши о вычетах. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\bar{D}$, ограниченной контуром C , за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n; (a_k \in D)$. Тогда интеграл по замкнутому контуру C равен умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов подынтегральной функции во всех особых точках, расположенных внутри контура:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k). \quad (1.32)$$

1.15 Пример выполнения задания 4

Вычислить интегралы по замкнутому контуру с помощью вычетов

$$\text{a) } \int_{|z|=3} \frac{z^2 + 1}{z(z+2)^2} dz; \quad \text{b) } \int_{|z|=1} z^4 \sin \frac{i}{z} dz.$$

Решение

а) Особые точки подынтегральной функции $z = 0$ - простой полюс, $z = -2$ - полюс второго порядка. Оба полюса расположены внутри контура интегрирования, окружности радиуса 3 с центром в начале координат (см рисунок 1.5).

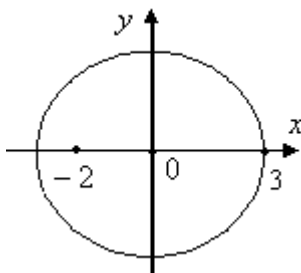


Рисунок 1.5 – Замкнутый контур к заданию 4а.

Согласно основной теореме Коши о вычетах и формуле (1.32) интеграл

$$\int_{|z|=3} \frac{z^2 + 1}{z(z+2)^2} dz = 2\pi i (\operatorname{res}(f(0)) + \operatorname{res} f(-2)), \text{ где } f(z) -$$

подынтегральная функция.

Вычет в простом полюсе $z = 0$ вычисляем по формуле (1.30):

$$\operatorname{res} f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z^2 + 1}{z(z+2)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 1}{(z+2)^2} = \frac{1}{4}.$$

Вычет в полюсе второго порядка $z = -2$ вычисляем по формуле (1.31):

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-2} \frac{z^2+1}{z(z+2)^2} &= \lim_{z \rightarrow -2} \frac{d}{dz} \left((z+2)^2 \frac{z^2+1}{z(z+2)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2+1}{z} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -2} \frac{2z^2 - z^2 - 1}{z^2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \int_{|z|=3} \frac{z^2+1}{z(z+2)^2} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = 2\pi i.$$

б) Точка $z=0$ - существенно особая точка подынтегральной функции расположена внутри контура интегрирования, окружности радиуса 1 с центром

в начале координат. Подынтегральную функцию $z^4 \sin \frac{i}{z}$ разложим в ряд

Лорана. Для этого в формуле (1.22) вместо z вставим i/z :

$$\begin{aligned} z^4 \cdot \sin \frac{i}{z} &= z^4 \left(\frac{i}{z} - \frac{i^3}{z^3 \cdot 3!} + \frac{i^5}{z^5 \cdot 5!} - \frac{i^7}{z^7 \cdot 7!} + \dots \right) = \\ &= iz^3 - \frac{z \cdot i^3}{3!} + \frac{i^5}{z \cdot 5!} - \frac{i^7}{z^3 \cdot 7!} + \dots \quad \text{Коэффициент при } \frac{1}{z} \text{ равен } \frac{i^5}{5!}. \end{aligned}$$

С учетом того, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, вычет подынтегральной функции в существенно особой точке $z=0$ равен $\frac{i}{5!}$.

Согласно основной теореме Коши о вычетах и формуле (1.32) интеграл

$$\int_{|z|=1} z^4 \sin \frac{i}{z} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=0} \left(z^4 \sin \frac{i}{z} \right) = 2\pi i \cdot \frac{i}{5!} = -\frac{\pi}{60}.$$

Ответ: а) $2\pi i$; б) $-\frac{\pi}{60}$.

Задания на вторую контрольную работу

ЗАДАНИЕ 1. Найти изображение по Лапласу заданной функции.

$$1.1 \quad f(t) = 7e^{2t} \operatorname{ch} 7t - t \cdot \sin 2t + 4t^3 + 6e^{-3t} + 7.$$

$$1.2 \quad f(t) = 2e^t \sin 5t + 4t \cdot \cos 2t + t^2 + 3e^{5t} - 8.$$

$$1.3 \quad f(t) = e^{-2t} + e^{6t} \cos t + t^5 \cdot e^{-t} - 7t \cdot \sin 2t + 3.$$

$$1.4 \quad f(t) = 3e^{-4t} + 3e^{-6t} \cos t + t^4 \cdot e^{-7t} - t \cdot \operatorname{sh} 2t - 5.$$

$$1.5 \quad f(t) = 4e^{-7t} - 6e^{2t} \sin 3t + t^7 \cdot e^{-t} - t \cdot \operatorname{ch} 4t + 2.$$

$$1.6 \quad f(t) = e^{6t} \cos t + t^8 \cdot e^{-2t} - 7t \cdot \sin 2t - 8e^{5t} - 4.$$

$$1.7 \quad f(t) = e^{6t} \operatorname{ch} 5t + t^5 \cdot e^{-6t} - 7t \cdot \sin 2t + 5e^{3t} - 3.$$

$$1.8 \quad f(t) = 3 + 7e^{-t} \sin 2t + t^6 \cdot e^{-t} - 7t \cdot \operatorname{ch} 5t + e^{7t}.$$

$$1.9 \quad f(t) = 5e^{2t} + 2e^{6t} \operatorname{sh} t + t^7 \cdot e^{-2t} - t \cdot \cos 3t + 5.$$

$$1.10 \quad f(t) = e^{-2t} \sin 7t + t \cdot \cos 3t + 2t - 5e^{-3t} - 9.$$

ЗАДАНИЕ 2. По известному изображению Лапласа найти функцию – оригинал.

$$2.1 \quad f(z) = \frac{p+1}{p \cdot (p-1)(p+4)}.$$

$$2.2 \quad f(z) = \frac{p^2-1}{p \cdot (p+2)(p-3)}.$$

$$2.3 \quad f(z) = \frac{p^2+3}{(p^2+4) \cdot (p-2)}.$$

$$2.4 \quad f(z) = \frac{p^2+3p+7}{p \cdot (p-2)(p+1)}.$$

$$2.5 \quad f(z) = \frac{3p-1}{(p+2)(p^2+4p+5)}.$$

$$2.6 \quad f(z) = \frac{p^2+1}{(p-1) \cdot (p+5)^2}.$$

$$2.7 \quad f(z) = \frac{p+9}{p \cdot (p^2+1)}.$$

$$2.8 \quad f(z) = \frac{p+8}{(p-2)(p+4)(p+7)}.$$

$$2.9 \quad f(z) = \frac{p^2-p-1}{(p+1) \cdot (p-3)^2}.$$

$$3.10 \quad f(z) = \frac{p-3}{(p+3)(p^2+4p+13)}.$$

Ответы

2.1 $f(t) = \frac{2}{5}e^t - \frac{3}{20}e^{-4t} - \frac{1}{4}$. 2.2 $f(t) = \frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{1}{6}$. 2.3 $f(t) = \frac{7}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}(\cos 2t + \sin 2t)$.
 2.4 $f(t) = \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{17}{6}e^{2t} - \frac{7}{2}$. 2.5 $f(t) = e^{-2t}(7\cos t + 3\sin t) - 7e^{-2t}$.
 2.6 $f(t) = \frac{1}{18}e^t + \frac{17}{18}e^{-5t} - \frac{13}{3}t \cdot e^{-5t}$. 2.7 $f(t) = 9 - 9\cos t + \sin t$. 2.8 $f(t) = \frac{5}{27}e^{2t} - \frac{2}{9}e^{-4t} + \frac{1}{27}e^{-7t}$.
 2.9 $f(t) = \frac{1}{16}e^{-t} + \frac{15}{16}e^{3t} + \frac{5}{4}t \cdot e^{3t}$. 3.10 $f(t) = e^{-2t}\left(\frac{3}{5}\cos 3t + \frac{2}{15}\sin 3t\right) - \frac{3}{5}e^{-3t}$.

ЗАДАНИЕ 3. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

3.1 $x'' + 6x' + 13x = 1$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
 3.2 $x'' + 4x = 1 - t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
 3.3 $x'' + 2x' - 3x = \sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
 3.4 $x'' + 2x' = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
 3.5 $x'' + x = t + 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
 3.6 $x'' + 9x = e^{-2t}$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 1$.
 3.7 $x'' + 2x' + 5x = 3$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.
 3.8 $x'' + x = \cos 2t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.
 3.9 $x'' - 2x' + 2x = t \cdot e^{-2t}$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.
 3.10 $x'' + 16x = e^{-3t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.

Ответы

3.1 $x(t) = \frac{1}{13} + \frac{75}{26}e^{-3t}\sin 2t + \frac{25}{13}e^{-3t}\cos 2t$. 3.2 $x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t + \frac{7}{4}\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t$.
 3.3 $x(t) = \frac{5}{8}e^t + \frac{19}{40}e^{-3t} - \frac{1}{5}\sin t - \frac{1}{10}\cos t$. 3.4 $x(t) = \frac{1}{5}e^{-2t} - 1 - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t$.
 3.5 $x(t) = t + 1 - \cos t$. 3.6 $x(t) = \frac{1}{13}e^{-2t} + \frac{5}{13}\sin 3t - \frac{27}{13}\cos 3t$.
 3.7 $x(t) = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}e^{-t}\sin 2t + \frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t$. 3.8 $x(t) = -\frac{1}{3}\cos 2t + \sin t + \frac{4}{3}\cos t$.
 3.9 $x(t) = \frac{1}{10}t \cdot e^{-2t} + \frac{3}{50}e^{-2t} + \frac{104}{50}e^t \sin t - \frac{53}{50}e^t \cos t$. 3.10 $x(t) = \frac{1}{25}e^{-3t} + \frac{53}{100}\sin 4t - \frac{1}{25}\cos 4t$.

ЗАДАНИЕ 4. Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям (независимая переменная - t).

$$4.1 \quad \begin{cases} x' = -8y, \\ y' = \frac{1}{2}x, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1$$

$$4.2 \quad \begin{cases} x' = -2x - 2y, \\ y' = x - 4y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2.$$

$$4.3 \quad \begin{cases} x' = -x + 9y, \\ y' = -x - y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

$$4.4 \quad \begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1.$$

$$4.5 \quad \begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -x + 5y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

$$4.6 \quad \begin{cases} x' = 18y, \\ y' = -2x, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = -1.$$

$$4.7 \quad \begin{cases} x' = -3x + y, \\ y' = -20x + 6y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1.$$

$$4.8 \quad \begin{cases} x' = -x + 5y, \\ y' = x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1.$$

$$4.9 \quad \begin{cases} x' = 18y, \\ y' = -2x, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$$

$$4.10 \quad \begin{cases} x' = -4y, \\ y' = 16x, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$$

Ответы

$$4.1 \quad x(t) = 2\cos 2t + 4\sin 2t, \quad y(t) = -\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t. \quad 4.2 \quad x(t) = e^{-3t}(\cos t + 5\sin t),$$

$$y(t) = e^{-3t}(-2\cos t + 3\sin t). \quad 4.3 \quad x(t) = e^{-t}(\cos 3t - 3\sin 3t), \quad y(t) = e^{-t}\left(-\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t\right).$$

$$4.4 \quad x(t) = 2\operatorname{ch}3t - \frac{10}{3}\operatorname{sh}3t, \quad y(t) = -\operatorname{ch}3t + \frac{1}{3}\operatorname{sh}3t. \quad 4.5 \quad x(t) = \frac{5}{2}e^{4t} - \frac{3}{2}e^{2t}, \quad y(t) = \frac{5}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t}.$$

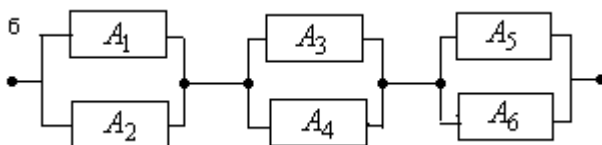
$$4.6 \quad x(t) = -\cos 6t - 3\sin 6t, \quad y(t) = -\cos 6t + \frac{1}{3}\sin 6t. \quad 4.7 \quad x(t) = 11e^t - 9e^{2t}, \quad y(t) = 44e^t - 45e^{2t}.$$

$$4.8 \quad x(t) = -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{5}{2}e^{-2t}, \quad y(t) = -\frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{-2t}. \quad 4.9 \quad x(t) = 2\cos 6t + 3\sin 6t,$$

$$y(t) = \cos 6t - \frac{2}{3}\sin 6t. \quad 4.10 \quad x(t) = -\cos 8t - \sin 8t, \quad y(t) = 2\cos 8t - 2\sin 8t.$$

ЗАДАНИЕ 5. Найти вероятность прохождения электрического сигнала через систему параллельно и последовательно соединенных узлов $A_1, A_2, \dots, A_6$ (см. рисунок), если вероятности безотказной работы узлов соответственно равны

$$P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_6) = p_6.$$



Задания по вариантам

Вариант	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
5.1	0,9	0,7	1,0	0,9	0,7	0,6
5.2	0,8	0,7	1,0	0,8	0,7	0,5
5.3	0,7	0,8	1,0	0,7	0,8	0,4
5.4	0,9	0,8	1,0	0,9	0,8	0,6
5.5	0,8	1,0	0,7	0,8	0,7	0,7
5.6	0,7	0,8	1,0	0,7	0,8	0,9
5.7	0,9	0,9	1,0	0,9	0,9	0,6
5.8	0,8	0,7	0,9	0,8	0,7	0,5
5.9	0,7	0,8	1,0	0,7	0,8	0,7
5.10	0,6	0,9	1,0	0,6	0,9	0,5

Ответы. 5.1) 0,854. 5.2) 0,799. 5.3) 0,827. 5.4) 0,902. 5.5) 0,855.
5.6) 0,921. 5.7) 0,950. 5.8) 0,783. 5.9) 0,884. 5.10) 0,912.

ЗАДАНИЕ 6. Задан закон распределения дискретной случайной величины X . Построить многоугольник распределения вероятностей. Найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$. Обозначено: x_i - возможные значения случайной величины X ; p_i - вероятности значений x_i случайной величины X .

6.1	x_i	1	2	3	4	5
	p_i	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3
6.2	x_i	1	3	5	7	9
	p_i	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4
6.3	x_i	2	4	6	8	10
	p_i	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2
6.4	x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	p_i	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1
6.5	x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
	p_i	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1
6.6	x_i	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
	p_i	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1
6.7	x_i	1	5	10	15	20
	p_i	0,5	0,2	0,1	0,1	0,1
6.8	x_i	1	3	4	6	10
	p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
6.9	x_i	0	5	6	8	10
	p_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1
6.10	x_i	0	9	10	11	20
	p_i	0,2	0,2	0,1	0,1	0,4

Ответы

- 6.1 $M[X]=3,6$; $D[X]=1,64$; $\sigma[X]=1,281$. 6.2 $M[X]=5,8$; $D[X]=9,76$; $\sigma[X]=3,124$.
 6.3 $M[X]=5,2$; $D[X]=8,96$; $\sigma[X]=2,993$ 6.4 $M[X]=0,22$; $D[X]=0,018$; $\sigma[X]=0,13$.
 6.5 $M[X]=0,58$; $D[X]=0,068$; $\sigma[X]=0,26$. 6.6 $M[X]=0,46$; $D[X]=0,062$; $\sigma[X]=0,25$.
 6.7 $M[X]=6$; $D[X]=42$; $\sigma[X]=6,481$. 6.8 $M[X]=4,7$; $D[X]=5,41$; $\sigma[X]=2,326$.
 6.9 $M[X]=6,4$; $D[X]=6,84$; $\sigma[X]=2,615$. 6.10 $M[X]=11,9$; $D[X]=56,6$; $\sigma[X]=7,52$

2. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное исчисление, основанное на интегральном преобразовании Лапласа, – основной метод исследования динамики электрических систем и систем управления.

2.1 Функция - оригинал и изображение функции по Лапласу. Линейные свойства изображения

Функцией - *оригиналом* называют функцию $f(t)$ действительного аргумента t , удовлетворяющую условиям:

- 1) для всех отрицательных значений аргумента функция тождественно равна нулю, т.е. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
- 2) функция $f(t)$ при $t > 0$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие постоянные $M > 0$, $S_0 \geq 0$, что

$$|f(t)| \leq Me^{S_0 t} \text{ при } t > 0;$$

- 3) на любом конечном отрезке положительной полуоси Ot функция $f(t)$ и ее производные достаточно высокого порядка непрерывны или имеют конечное число разрывов 1-го рода.

Простейшей функцией - оригиналом является единичная функция Хевисайда

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Если функция $f(t) = \cos \omega t$ не удовлетворяет условию 1, то произведение $f(t)\Phi(t) = \Phi(t) \cos \omega t$ уже ему удовлетворят.

Для простоты записи множитель $\Phi(t)$ чаще всего опускается, например, пишут 1 вместо $\Phi(t)$, $\sin \omega t$ вместо $\Phi(t) \sin \omega t$ и т.д.

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу (преобразованием Лапласа) называют функцию комплексной переменной $p = s + i\sigma$, определяемую соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (2.2)$$

Интеграл (2.2) называют *интегралом Лапласа*.

То, что функция комплексной переменной $F(p)$ является изображением по Лапласу функции действительного аргумента $f(t)$, обозначается $F(p) = L\{f(t)\}$. Применяется также обозначении $f(t) \doteq F(p)$ (оригиналу $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$).

Преобразование, основанное на интеграле Лапласа (2.2), обладает свойством линейности.

1. Преобразование суммы функций равно сумме преобразований этих функций $L\{f_1(t) + f_2(t)\} = L\{f_1(t)\} + L\{f_2(t)\}$;

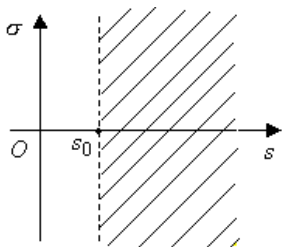
2. Постоянный множитель можно выносить за знак преобразования:

$$L\{cf(t)\} = cL\{f(t)\}, \text{ где } c = \text{const.}$$

Из этих двух свойств следует, что линейной комбинации оригиналов соответствует линейная комбинация их преобразований:

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_m f_m(t)\} = c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\} + \dots + c_m L\{f_m(t)\}. \quad (2.3)$$

Теорема о аналитичности изображения. Для всякого оригинала $f(t)$



изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\text{Re } p = s > s_0$, где s_0 - показатель роста $f(t)$, и является в этой области аналитической функцией.

Рисунок 2.1 – К теореме об аналитичности изображения

Из теоремы о аналитичности изображения следует, что для преобразования Лапласа справедливы все свойства аналитических функций, изученные в первой части методических указаний.

2.2 Непосредственное преобразование Лапласа некоторых функций

2.2.1 Изображения по Лапласу функций $\Phi(t)$, e^{at}

Изображения указанных функций определяем, вычисляя для них интеграл Лапласа. Изображение функции Хевисайда:

$$\begin{aligned} L\{\Phi(t)\} &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-pb} + \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p}, \quad \Phi(t) \doteq \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Изображение показательной функции:

$$\begin{aligned} L\{e^{at}\} &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(a-p)t} dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{a-p} e^{(a-p)t} \Big|_0^b = \frac{1}{p-a}, \text{ так как } \operatorname{Re}(a-p) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$.

2.2.2 Изображения по Лапласу функций $\sin bt$, $\cos bt$, $\operatorname{sh} bt$, $\operatorname{ch} bt$

При определении изображений указанных функций используем полученное соотношение $e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$, формулы (1.13), (1.14), (1.15), (1.16) из §1.7 и свойство линейности преобразования Лапласа.

Из формулы $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ следует:

$$\sin bt = \frac{1}{2i}(e^{ibt} - e^{-ibt}). \text{ Тогда } L\{\sin bt\} = \frac{1}{2i}(L\{e^{ibt}\} - L\{e^{-ibt}\}) = \\ = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{p - ib} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{p + ib} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{p + ib - p + ib}{p^2 + b^2} = \frac{b}{p^2 + b^2}$$

Аналогичным образом определяются изображения:

$$\cos bt \doteq \frac{p}{p^2 + b^2}, \quad \text{sh}bt \doteq \frac{b}{p^2 - b^2}, \quad \text{ch}bt \doteq \frac{p}{p^2 - b^2}.$$

Пример 2.1 Определить изображение по Лапласу линейной комбинации функций: $f(t) = 4e^{-2t} + 3\cos 5t - 7\text{sh}t + 0,5\sin 3t + 12$.

Решение

Используем свойство линейности преобразования Лапласа

$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_m f_m(t)\} = c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\} + \dots + c_m L\{f_m\}$ и полученные формулы изображений.

$$L\{f(t)\} = 4 \cdot L\{e^{-2t}\} + 3 \cdot L\{\cos 5t\} - 7 \cdot L\{\text{sh}t\} + 0,5 \cdot L\{\sin 3t\} + 12 \cdot L\{1\}$$

$$L\{f(t)\} = 4 \cdot \frac{1}{p + 2} + 3 \cdot \frac{p}{p^2 + 5^2} - 7 \cdot \frac{1}{p^2 - 1} + 0,5 \cdot \frac{3}{p^2 + 3^2} + 12 \cdot \frac{1}{p}.$$

2.3 Теоремы преобразования Лапласа

1. **Теорема дифференцирования оригинала.** Допустим, что производная оригинала $f'(t)$ также является оригиналом. Тогда, если $L\{f(t)\} = F(p)$, то

$$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0). \quad (2.4)$$

Методом математической индукции на основании формулы (2.4) получены формулы изображения высших производных:

$$L\{f''(t)\} = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0); \quad (2.5)$$

$$L\{f'''(t)\} = p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0); \quad (2.6)$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - (p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)). \quad (2.7)$$

2. Теорема дифференцирования изображения. Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\{-tf(t)\} = F'(p)$, т.е. производной изображения соответствует умножение на $(-t)$ оригинала. В общем случае,

$$F^{(n)}(p) = L\{(-t)^n f(t)\}. \quad (2.8)$$

Пример 2.2 Определить изображения функций: $t, t^2, \dots, t^n$.

Решение

Так как $1 \doteq \frac{1}{p}$, то $L\{-t\} = \left(\frac{1}{p}\right)' = -\frac{1}{p^2}$, $t \doteq \frac{1}{p^2}$;

$$L\{t^2\} = \left(\frac{1}{p}\right)'' = \frac{2}{p^3}, \quad L\{-t^3\} = -\frac{2 \cdot 3}{p^4}, \quad t^3 \doteq \frac{3!}{p^4};$$

в общем случае $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$.

3. Теорема смещения. При умножении оригинала $f(t)$ на e^{at} , где a - любое вещественное или комплексное число, изображение получает смещение аргумента на a :

$$e^{at} f(t) \doteq F(p - a). \quad (2.9)$$

Пример 2.3 Ранее, в §2.2.2 и в настоящем параграфе найдены изображения функций $\sin bt$, $\cos bt$, t^n . По формуле (2.9) находим:

$$e^{at} \cdot \sin bt \doteq \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}; \quad e^{at} \cdot \cos bt \doteq \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2};$$

$$e^{at} \cdot t^n \doteq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

2.4 Пример выполнения задания 1

Найти изображение по Лапласу заданной функции

$$f(t) = 2e^{-2t} \operatorname{ch} 5t - t \cdot \sin 6t + 4t^7 + 3e^{-4t} + 23.$$

Решение

Так как оригинал – алгебраическая сумма функций, используем линейные свойства преобразования Лапласа: изображение суммы функций равно сумме изображений этих функций; постоянный множитель выносится за знак изображения. Изображения отдельных функций определяем по таблице приложения А.

$$L\{f(t)\} = 2L\{e^{-2t} \operatorname{ch} 5t\} - L\{t \cdot \sin 6t\} + 4L\{t^7\} + 3L\{e^{-4t}\} + 23L\{1\}$$

$$L\{f(t)\} = 2 \cdot \frac{p+2}{(p+2)^2 - 5^2} - \frac{2 \cdot 6 \cdot p}{(p^2 + 6^2)^2} + 4 \cdot \frac{7!}{p^8} + 3 \cdot \frac{1}{p+4} + \frac{23}{p}.$$

$$\text{Ответ: } F(p) = \frac{2p+4}{(p+2)^2 - 5^2} - \frac{12p}{(p^2 + 6^2)^2} + \frac{4 \cdot 7!}{p^8} + \frac{3}{p+4} + \frac{23}{p}.$$

2.5 Методы определения оригинала по известному изображению. Пример выполнения задания 2

Если известно изображение, то соответствующий ему оригинал можно найти, используя следующие приёмы.

1. Если изображение – правильная рациональная дробь $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$,

то эту дробь разлагают на сумму простейших дробей.

Предположим, что её знаменатель $R(p)$ можно разложить на множители

$$R(p) = (p - p_1) \dots (p - p_2)^k \dots (p^2 + bp + c)$$

Здесь p_1 - простой корень многочлена $R(p)$, p_2 - корень кратности k .

Квадратный трёхчлен $p^2 + bp + c$ не имеет действительных корней. Тогда изображение, правильную рациональную дробь, можно представить суммой простейших дробей.

Зависимость типа простейшей дроби от характера корней знаменателя

1. Каждому линейному множителю $(p - p_1)$ соответствует простейшая

дробь $\frac{A}{(p - p_1)}$, где A - неизвестный коэффициент.

2. Каждому множителю $(p - p_2)^k$ соответствует k дробей, показатель степени знаменателя которых возрастает от 1-й до k -й:

$$\frac{B_1}{p - p_2} + \frac{B_2}{(p - p_2)^2} + \dots + \frac{B_k}{(p - p_2)^k}. \quad B_1, \dots, B_k - \text{коэффициенты.}$$

3. Каждому трёхчлену $p^2 + bp + c$ (простой паре комплексных сопряженных корней) соответствует простейшая дробь $\frac{Cp + D}{p^2 + bp + c}$.

Таким образом, разложив знаменатель $R(p)$ на множители, изображение

$$F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$$

представим суммой простейших дробей:

$$\frac{Q(p)}{R(p)} = \frac{A}{(p - p_1)} + \dots + \frac{B_1}{p - p_2} + \frac{B_2}{(p - p_2)^2} + \dots + \frac{B_k}{(p - p_2)^k} + \dots + \frac{Cp + D}{p^2 + bp + c}. \quad (2.10)$$

Неизвестные коэффициенты $A_1, B_1, \dots, B_k, C, D$ определяются путём приведения правой части (2.10) к общему знаменателю.

Затем используя равенство числителей полученной и исходной дроби, приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях p .

Другой прием заключается в том, что переменной p в равенстве числителей задают ряд числовых значений, причем «удобными» значениями являются действительные корни знаменателя.

И в том и в другом случае образуется система алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов, которую решают известными методами.

Разложение изображения на сумму простейших дробей можно выполнить также в пакете MathCAD (см. Приложение Б). Используя свойство линейности, теоремы преобразования Лапласа и таблицу преобразований Лапласа (см. Приложение А), находят оригиналы для каждой простейшей дроби.

Пример 2.4 По известному изображению найти оригинал:

$$\text{а) } F(p) = \frac{1}{p^2(p + 3)}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{8p^2 + 15p + 35}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

Решение

а) Представим изображение в виде суммы простейших дробей.

$$\frac{1}{p^2(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+3} = \frac{Ap(p+3) + B(p+3) + Cp^2}{p^2(p+3)}.$$

Из равенства числителей полученной и исходной дроби $Ap(p+3) + B(p+3) + Cp^2 = 1$ найдем неизвестные коэффициенты A, B, C , задавая переменной p ряд целых действительных значений: $p = 0, -3, 1$. Получим систему:

$$\begin{cases} 3B = 1, \\ 9C = 1, \\ 4A + 4B + C = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1/3, \\ C = 1/9, \\ A = -1/9. \end{cases} \quad \text{Таким образом,}$$

$$\frac{1}{p^2(p+3)} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{p+3} \doteq -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}e^{-3t}.$$

Для перехода к оригиналу использована таблица преобразований Лапласа, пункты 1, 2, 4.

б) Представим изображение в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{8p^2 + 15p + 35}{p(p^2 + 2p + 5)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2p + 5} = \frac{A(p^2 + 2p + 5) + p(Bp + C)}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

$$(A + B)p^2 + (2A + C)p + 5A = 8p^2 + 15p + 35.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях p в числителе полученной и исходной дроби, составим систему уравнений относительно неизвестных A, B, C :

$$\begin{cases} A + B = 8, \\ 2A + C = 15, \\ 5A = 35, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 7, \\ B = 1, \\ C = 1. \end{cases}$$

$$\frac{7}{p} + \frac{p+1}{p^2 + 2p + 5} = \frac{7}{p} + \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} \doteq 7 + e^{-t} \cos 2t.$$

В знаменателе изображения выделен полный квадрат. Для перехода к оригиналу использованы 1-й и 15-й пункты таблицы преобразований Лапласа.

2. Оригинал можно найти с помощью теоремы разложения, которая утверждает, что для изображения $F(p)$ оригиналом служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \text{res}[F(p_k) \cdot e^{p_k t}], \quad (2.11)$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

Пример 2.5 Для изображения $F(p) = \frac{1}{p^2(p+3)}$ найти оригинал с помощью теоремы разложения.

Решение

Функция $F(p) = \frac{1}{p^2(p+3)}$ имеет две изолированные особые точки:

простой полюс $p_1 = -3$ и полюс $p_2 = 0$ второго порядка. Находим вычет

функции $\frac{e^{pt}}{p^2(p+3)}$ в простом полюсе по формуле (1.30):

$$\text{res}_{p=-3} \left(\frac{e^{pt}}{p^2(p+3)} \right) = \lim_{p \rightarrow -3} \left((p+3) \frac{e^{pt}}{p^2(p+3)} \right) = \frac{1}{9} e^{-3t}.$$

Вычет функции $F(p)e^{pt}$ в полюсе 2-го порядка находим по формуле (1.31):

$$\begin{aligned} \text{res}_{p=0} \left(\frac{e^{pt}}{p^2(p+3)} \right) &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(p^2 \frac{e^{pt}}{p^2(p+3)} \right)' = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{e^{pt}}{p+3} \right)' = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{te^{pt}(p+3) - e^{pt}}{(p+3)^2} = \frac{3t-1}{9} = \frac{t}{3} - \frac{1}{9}. \quad \frac{1}{p^2(p+3)} \div -\frac{1}{9} + \frac{t}{3} + \frac{1}{9} e^{-3t}. \end{aligned}$$

Примечание – определение оригинала с помощью вычетов обычно применяют, если полюсы преобразования являются действительными числами. В случае, когда полюсы являются комплексными числами (дискриминант квадратного трехчлена отрицательный) при применении данного метода приходится проводить дополнительные преобразования полученного оригинала с целью исключения мнимых единиц.

2.6 Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом. Примеры выполнения заданий 3, 4

Решение дифференциальных уравнений – основное приложение операционного метода, основанного на преобразовании Лапласа.

Операционный метод включает следующие этапы:

- 1) преобразование дифференциального уравнения с заданными начальными условиями по Лапласу; при этом образуется комплексное алгебраическое уравнение относительно изображения неизвестной функции;
- 2) решение комплексного алгебраического уравнения;
- 3) отыскание оригинала, искомого частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Последовательность решения задачи Коши для дифференциального уравнения операторным методом представлена схемой на рисунке 2.4.

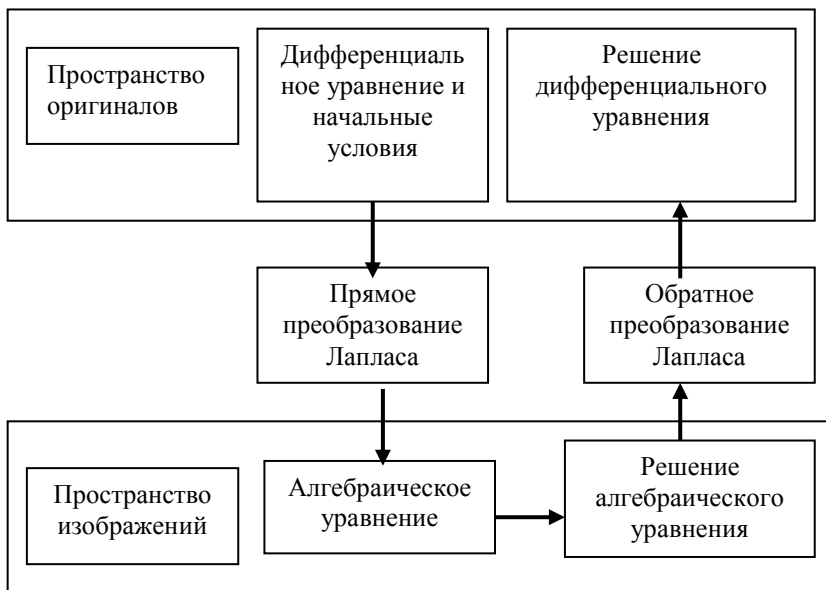


Рисунок 2.4 – Схема решения дифференциального уравнения

Операционный метод решения системы линейных дифференциальных уравнений включает следующие этапы:

- 1) преобразование системы дифференциальных уравнений по Лапласу; при этом образуется система линейных алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций;
- 2) решение системы алгебраических уравнений, например, методом Крамера;
- 3) отыскание оригиналов методами обратного преобразования Лапласа.

Пример выполнения задания 3. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$x'' + 3x' - 4x = e^{-t} + 2; \quad x(0) = 1; \quad x'(0) = 0.$$

Решение

Обозначим преобразование неизвестного решения $L\{x(t)\} = X(p)$. Преобразования производных неизвестной определяем по формулам (2.4), (2.5):

$$L\{x'(t)\} = pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$

$$L\{x''(t)\} = p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 1 \cdot p - 0.$$

Преобразуем обе части дифференциального уравнения по Лапласу. С учетом линейных свойств преобразования, записанных формул для преобразования производных и таблицы преобразований Лапласа, получим:

$$p^2X(p) - p + 3(pX(p) - 1) - 4X(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{p},$$

$$X(p)(p^2 + 3p - 4) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{p} + p + 3.$$

Решим уравнение относительно $X(p)$:

$$X(p) = \left(\frac{1}{p+1} + \frac{2}{p} + p + 3 \right) / (p^2 + 3p - 4), \quad X(p) = \frac{p^3 + 4p^2 + 6p + 2}{p(p+1)(p-1)(p+4)}.$$

Для нахождения оригинала используем теорему разложения (2.11); особые точки функции $X(p)$ – простые полюсы $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = 1$, $p_4 = -4$. Вычисляем вычеты функции $X(p)e^{pt}$ в полюсах по формуле (1.30), а затем полученные результаты складываем:

$$\operatorname{res}_{p=0} X(p)e^{pt} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^3 + 4p^2 + 6p + 2}{p(p+1)(p-1)(p+4)} e^{pt} = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{res}_{p=-1} X(p)e^{pt} = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1) \frac{p^3 + 4p^2 + 6p + 2}{p(p+1)(p-1)(p+4)} e^{pt} = -\frac{1}{6}e^{-t};$$

$$\operatorname{res}_{p=1} X(p)e^{pt} = \lim_{p \rightarrow 1} (p-1) \frac{p^3 + 4p^2 + 6p + 2}{p(p+1)(p-1)(p+4)} e^{pt} = \frac{13}{10}e^t;$$

$$\operatorname{res}_{p=-4} X(p)e^{pt} = \lim_{p \rightarrow -4} (p+4) \frac{p^3 + 4p^2 + 6p + 2}{p(p+1)(p-1)(p+4)} e^{pt} = \frac{11}{30}e^{-4t}.$$

Ответ: $x(t) = \frac{13}{10}e^t - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{11}{30}e^{-4t}$.

Пример выполнения задания 4. Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям (независимая переменная - t).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y, \end{cases} \quad x(0)=1, \quad y(0)=2.$$

Решение

Введём обозначения: $L\{x(t)\} = X(p)$, $L\{y(t)\} = Y(p)$. Преобразуем систему уравнений по Лапласу:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = 2X(p) + Y(p), \\ pY(p) - 2 = X(p) + 2Y(p), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-2)X(p) - Y(p) = 1, \\ -X(p) + (p-2)Y(p) = 2. \end{cases}$$

Полученную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $X(p)$, $Y(p)$ решаем методом Крамера. Выписываем определитель системы Δ и вспомогательные определители Δ_X , Δ_Y :

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -1 \\ -1 & p-2 \end{vmatrix} = p^2 - 4p + 3; \quad \Delta_X = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & p-2 \end{vmatrix} = p;$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p-2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2p-3; \quad X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{p}{p^2 - 4p + 3} = \frac{p}{(p-1)(p-3)};$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{2p-3}{p^2 - 4p + 3} = \frac{2p-3}{(p-1)(p-3)}.$$

Теперь по изображениям $X(p)$, $Y(p)$ определяем оригиналы $x(t)$ и $y(t)$.

$$x(t) = \operatorname{res}_{p=1} \frac{p \cdot e^{pt}}{(p-1)(p-3)} + \operatorname{res}_{p=3} \frac{p \cdot e^{pt}}{(p-1)(p-3)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{p \rightarrow 1} (p-1) \frac{p \cdot e^{pt}}{(p-1)(p-3)} + \lim_{p \rightarrow 3} (p-3) \frac{p \cdot e^{pt}}{(p-1)(p-3)} = \\
&= -\frac{1}{2} e^t + \frac{3}{2} e^{3t}; \text{ аналогично,} \\
y(t) &= \operatorname{res}_{p=1} \frac{(2p-3) \cdot e^{pt}}{(p-1)(p-3)} + \operatorname{res}_{p=3} \frac{(2p-3) \cdot e^{pt}}{(p-1)(p-3)} = \frac{1}{2} e^t + \frac{3}{2} e^{3t}.
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } x(t) = -\frac{1}{2} e^t + \frac{3}{2} e^{3t}; \quad y(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{3}{2} e^{3t}.$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1 Предмет теории вероятностей. Основные понятия. Действия над событиями

Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей – наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Случайным называется такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз неодинаково.

Теория вероятностей изучает те случайные явления, которые могут наблюдаться практически неограниченно.

Оказывается, что независимо от конкретной природы многократно повторяющихся случайных явлений, их количественные характеристики подчиняются определенным *вероятностным закономерностям*.

Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Итак, предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных явлений.

Основные понятия теории вероятностей

Событие. Понятие *события* является основным, первичным понятием в теории вероятностей. Оно не может быть определено «строго», а только разъяснено. Под «событием» в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти.

Испытание – совокупность условий, при которых событие произойдет или не произойдет. Событие – результат испытания. В результате испытания может произойти как простое, неразложимое на отдельные исходы, событие, так и сложное событие, состоящее из нескольких составляющих результатов.

Классификация случайных событий

1. Событие называют *достоверным*, если при испытании оно обязательно произойдет.
2. Событие называют *невозможным*, если при испытании оно заведомо не произойдет.
3. Событие называют *случайным*, если при испытании оно может произойти, а может и не произойти. Случайные события обозначают $A, B, C...$
4. События называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.
5. Несколько событий образуют *полную группу событий*, если в результате испытания наступает хотя бы одно из этих событий.
6. Группу событий, составную часть полной группы событий, называют *случаями (исходами, шансами)*. Случаи, при которых события происходят, называют *благоприятствующими* появлению этих событий.
7. Два единственно возможных события, образующие полную группу событий, называются *противоположными*. Два противоположных события обозначают A и $\bar{A}$. Например, если A - событие (попадание в мишень при стрельбе), то ему противоположное $\bar{A}$ (промах при стрельбе по мишени).

Действия над событиями

Определение. Суммой двух событий A и B называется событие C , состоящее в появлении (наступлении) события A или события B , или обоих событий вместе.

Обозначается сумма событий $C = A + B$.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении *хотя бы одного из этих событий*. Сумма противоположных событий – достоверное событие.

Определение. Произведением двух событий A и B называется событие C состоящее в совместном наступлении события A и события B .

Обозначается произведение событий $C = A \cdot B$

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

3.2 Классическая вероятность

Так же, как понятие события, понятие *вероятности события* является основным, первичным понятием в теории вероятностей.

Определение. Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события.

Если принять *вероятность достоверного события за единицу*, то все другие события, возможные, но не достоверные, будут иметь вероятность в долях единицы.

Противоположное достоверному событию – невозможное событие. Естественно принять *вероятность невозможного события равной нулю*.

Вероятность события A обозначается $P(A)$. Величина вероятности:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Классическое определение вероятности: вероятность события A равна отношению числа m благоприятствующих событию исходов при одном испытании к числу всех равновозможных исходов n :

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (3.1)$$

Пример 3.1 В урне находится 15 шаров одинакового диаметра: 4 красных, 5 синих, 6 белых. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет синим.

Решение

Анализ условия задачи. Появление шаров из урны, это: полная группа событий, так как при одном испытании (выемке шара) обязательно появится шар; появления шаров – равновозможные события (шары одинакового размера и их цвет не виден при выемке). Вывод – применима формула (3.1).

Обозначим событие A - появление синего шара. По условию задачи

$$n = 15, \quad m = 5, \quad \text{следовательно,} \quad P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

3.3 Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей для несовместных событий

Если события A и B несовместны, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (3.2)$$

Теорема умножения вероятностей

Если два события A и B независимы (вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло другое или нет), то, вероятность произведения событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (3.3)$$

Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B \cdot C \cdot D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D). \quad (3.4)$$

Если события зависимы (вероятность появления одного из них зависит от того, произошло другое или нет), то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B). \quad (3.5)$$

Здесь вероятности $P(A|B)$, $P(B|A)$ называют условными. Читается:

$P(A|B)$ - вероятность появления события A , при условии, что событие B произошло.

Теорема сложения вероятностей для совместных событий

Если два события A и B совместны (могут произойти одновременно), то вероятность суммы событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (3.6)$$

3.4 Пример выполнения задания 5

Найти вероятность прохождения электрического сигнала через систему параллельно и последовательно соединенных узлов A_1 , A_2 , ..., A_6 (см. рисунок 3.1), если вероятности безотказной работы узлов соответственно равны

$$P(A_1) = 0,95, \quad P(A_2) = 0,85, \quad P(A_3) = 0,6,$$

$$P(A_4) = 0,7, \quad P(A_5) = 0,75, \quad P(A_6) = 1.$$

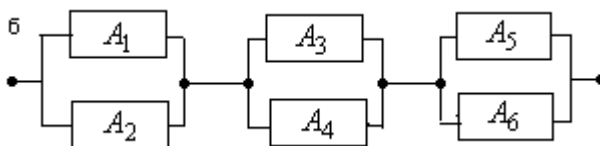


Рисунок 3.1 – К заданию 5

Решение

Обозначим событиями $A_1, A_2, \dots, A_6$ безотказную работу соответственно узлов $A_1, A_2, \dots, A_6$. (Мы и далее будем одинаково обозначать узлы и событие «безотказная работа» этих узлов). Вероятности этих событий заданы.

Обозначим событием B_1 безотказную работу параллельно соединённых звеньев A_1, A_2 . Чтобы электрический сигнал прошёл через параллельно соединённые звенья A_1, A_2 , достаточно, чтобы он прошёл хотя бы через одно из этих звеньев (через одно или через другое, или через оба вместе), поэтому $B_1 = A_1 + A_2$. События A_1 и A_2 - совместные, поэтому определяем вероятность суммы совместных событий по формуле (3.6):

$$P(B_1) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2),$$

$$P(B_1) = 0,95 + 0,85 - 0,95 \cdot 0,85 = 0,992.$$

Обозначим событием B_2 безотказную работу параллельно соединённых звеньев A_3, A_4 ; обозначим событием B_3 безотказную работу параллельно соединённых звеньев A_5, A_6 . Применяя формулу (3.6), определяем вероятности событий B_2 и B_3 .

$$P(B_2) = P(A_3) + P(A_4) - P(A_3 A_4) = 0,6 + 0,7 - 0,6 \cdot 0,7 = 0,880;$$

$$P(B_3) = P(A_5) + P(A_6) - P(A_5 A_6) = 0,75 + 1 - 1 \cdot 0,75 = 1.$$

Считая каждую пару параллельно соединённых звеньев одним звеном B_1 , B_2 и B_3 , рассчитаем вероятность прохождения электрического сигнала через последовательно соединённые звенья.

Обозначим событием C прохождение электрического сигнала через последовательно соединённые звенья B_1 , B_2 и B_3 . Событие C произойдет лишь в том случае, если произойдут одновременно события B_1 , B_2 и B_3 , поэтому $C = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$. События B_1 , B_2 и B_3 независимые друг от друга, применяем формулу умножения вероятностей независимых событий (3.4):

$$P(C) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) = 0,992 \cdot 0,880 \cdot 1 = 0,873.$$

Ответ: вероятность прохождения электрического сигнала 0,873.

3.5 Дискретные и непрерывные случайные величины

Переменная величина X , принимающая отдельные изолированные числовые значения x_k с вероятностью p_k , называется дискретной случайной величиной.

Функциональная зависимость вероятности p_k от x_k называется **законом распределения вероятностей** дискретной случайной величины X . Закон распределения задается в виде таблицы 3.1.

Таблица 3.1– Закон распределения дискретной случайной величины

Возможные значения x_i случайной величины X	x_1	x_2	...	x_k	...
Вероятности p_i значений случайной величины X	p_1	p_2	...	p_k	...

То, что случайная величина X в результате опыта примет одно из значений x_k , есть событие достоверное и потому должно выполняться условие $\sum p_k = 1$. Последовательность значений x_k, p_k может быть как конечная, так и бесконечная.

Функция распределения, её свойства

Вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее переменной величины x , есть функция от этой переменной величины, которая называется функцией распределения (интегральной функцией распределения вероятностей). Обозначается $F(x) = P(X < x)$.

Свойства функции распределения:

- 1) область изменения функции распределения $0 \leq F(x) \leq 1$;
- 2) вероятность попадания случайной величины в интервал $(\alpha; \beta)$ равна приращению функции распределения на этом интервале,
 $P(\alpha \leq x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$;
- 3) функция распределения не убывающая, $F(\beta) \geq F(\alpha)$, если $\beta > \alpha$;
- 4) предельные значения функции распределения $F(-\infty) = 0$; $F(\infty) = 1$.

График функции распределения дискретной случайной величины (рисунок 3.2) имеет разрывы с конечным скачком в точках, где случайная величина принимает свои значения. Величина скачка в точке x_k равна вероятности p_k .

Если некоторая случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$, то такая случайная величина называется непрерывной.

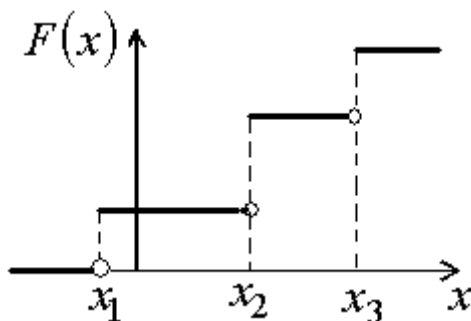


Рисунок 3.2 – Функция распределения дискретной случайной величины

Плотность распределения, её свойства

Наглядное представление о характере распределения *непрерывной случайной величины* дает функция, которая называется плотностью распределения вероятности или дифференциальным законом распределения случайной величины.

Плотностью распределения $f(x)$ называется производная функции распределения $F(x)$, $f(x) = F'(x)$.

Смысл $f(x)$ состоит в том, что она указывает на то, как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки x при повторении опытов.

График плотности распределения называют кривой распределения.

Свойства плотности распределения $f(x)$:

- 1) плотность распределения – величина неотрицательная, $f(x) \geq 0$;
- 2) функция распределения выражается через плотность распределения

формулой $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$;

- 3) площадь между кривой распределения и осью абсцисс равна единице,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

3.6 Числовыи характеристики дискретных и непрерывных случайных величин

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение – основные числовые характеристики случайных величин.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число, равное сумме произведений значений этих величин на их вероятности:

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k. \quad (3.7)$$

Математическое ожидание – среднее значение случайной величины, число, указывающее на числовой оси точку, являющуюся центром рассеивания значений случайной величины.

Свойства математического ожидания:

- 1) математическое ожидание постоянной равно этой постоянной
 $M(C) = C$;
- 2) математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
- 3) математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий
 $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$;
- 4) $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$, если $C = \text{const}$.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величин.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсия вычисляется по одной из формул:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i \quad (3.8)$$

$$\text{или } D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - M^2(X). \quad (3.9)$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется значение корня квадратного из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (3.10)$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение характеризуют степень рассеивания значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Свойства дисперсии:

- 1) дисперсия случайной величины положительна $D(X) > 0$;
- 2) дисперсия постоянной величины равна нулю $D(C) = 0$;
- 3) дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$;
- 4) $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$, если $C = \text{const}$.

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины

Для непрерывной случайной величины математическое ожидание определяется по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \text{ где } f(x) - \text{плотность распределения.}$$

Если случайная величина X распределена на конечном интервале, то интеграл в правой части формулы имеет конечные пределы.

Дисперсия непрерывной случайной величины определяется по одной из формул:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx, \quad D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Все свойства числовых характеристик непрерывных случайных величин такие же, как для дискретных.

3.7 Пример выполнения задания 6

Задан закон распределения дискретной случайной величины X . Построить многоугольник распределения вероятностей. Найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

Возможные значения x_i случайной величины X	1	2	3	4	5
Вероятности p_i значений случайной величины X	0,1	0,3	0,4	0,15	0,05

Решение

1. Построение многоугольника распределения вероятностей показано на рисунке 3.3. Многоугольником распределения вероятностей называют ломаную линию, соединяющую точки с координатами (x_i, p_i) .

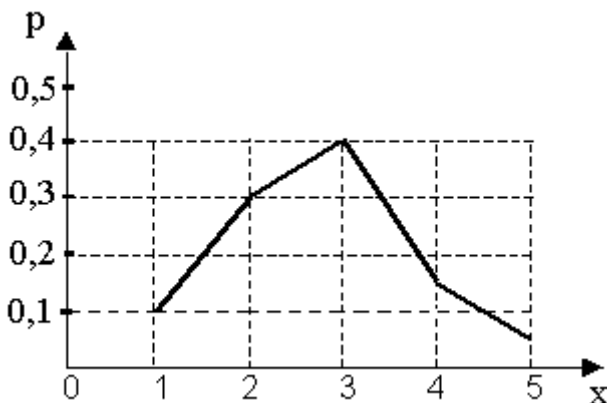


Рисунок 3.3 – Многоугольник распределения вероятностей

2. Математическое ожидание дискретной случайной величины определяем по формуле (3.7):

$$M[X] = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5.$$

$$M[X] = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,05 = 2,75$$

3. Дисперсию определяем по формуле (3.9):

$$D[X] = \sum_{i=1}^5 x_i^2 \cdot p_i - (M[X])^2$$

$$D[X] = 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,4 + 4^2 \cdot 0,15 + 5^2 \cdot 0,05 - 2,75^2 = 0,1 + 1,2 + 3,6 + 2,4 + 1,25 - 7,56 = 0,99.$$

4. Среднее квадратическое отклонение $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$.

$$\sigma[X] = \sqrt{0,99} = 0,99.$$

Приложение А - таблица преобразований Лапласа

	$F(p)$	$f(t)(t > 0)$
	1	2
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{1}{p^2}$	t
3	$\frac{(n-1)!}{p^n} (n=1,2,...)$	t^{n-1}
4	$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
5	$\frac{(n-1)!}{(p-a)^n} (n=1,2,3,...)$	$t^{n-1} \cdot e^{at}$
6	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin at$
7	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$
8	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\text{sh } at$
9	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\text{ch } at$
10	$\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
11	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
12	$\frac{2ap}{(p^2 - a^2)^2}$	$t \text{ sh } at$

Окончание таблицы преобразований Лапласа

1	2
13 $\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$	$t \operatorname{ch} at$
14 $\frac{a}{(p-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \sin at$
15 $\frac{p-b}{(p-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
16 $\frac{a}{(p-b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \operatorname{sh} at$
17 $\frac{p-b}{(p-b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \operatorname{ch} at$

Приложение Б – разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей в пакете MathCAD

Преобразование Лапласа всех рассмотренных выше функций – всегда правильная рациональная дробь комплексного аргумента p , которую можно разложить на сумму простейших дробей. Для этого нужно знаменатель разложить на произведение линейных множителей, соответствующих действительным его корням, и на квадратные трёхчлены, соответствующие комплексным сопряженным корням знаменателя. Разложение на простейшие дроби удобно выполнять в пакете MathCAD [7].

Набираем изображение, не забывая вводить знак умножения (*), затем выделяем переменную p и щелкаем по строке **Convert to Partial Fraction** в пункте **Variable** меню **Symbolics**. Получим:

$$\frac{p^2 - 3 \cdot p + 5}{(p-2) \cdot (p^2 + 4) \cdot (p^2 - 4p + 13)}$$

$$\frac{1}{[24 \cdot (p-2)]} - \frac{1}{1160} \cdot \frac{(206 + 11 \cdot p)}{(p^2 + 4)} - \frac{1}{435} \cdot \frac{(-97 + 14 \cdot p)}{(p^2 - 4 \cdot p + 13)}$$

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие для студентов вузов/Н.С. Пискунов-12-е изд. - М.: Наука, 1985. – Т.1.-456 с. Т.2. -576 с.
2. Ледяев С.Ф. Основы высшей математики: Учеб. пособие/С.Ф. Ледяев, Ю.М. Рудов – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – 278 с.
3. Лунц Г.Л. Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления/ Г.Л. Лунц, П.Э. Эльсгольц – М.: Физматгиз, 1958 г.- 296 с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей/ Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике/ В.Е. Гмурман – М.: Высш. шк., 1979. – 400 с.
6. Теория вероятностей. События и их вероятности. Методические указания/ Сост. М.И. Деркач, Н.А. Деркач, Т.Ю. Кротова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010. – 60 с.
7. Плис А.И. MATHCAD 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие/ А.И. Плис, Н.А. Сливина - М.: Финансы и статистика, 2000.- 656 с.

Заказ № _____ от « ____ » _____ 2011 г. Тираж _____ экз.

Изд-во СевНТУ