

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины

Севастопольский национальный технический университет

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Методические указания
для самостоятельной работы
по дисциплине «Высшая математика»
студентов инженерных специальностей
дневной формы обучения

Севастополь
2012

УДК 51

Теория поля. Методические указания для самостоятельной работы по дисциплине «Высшая математика» студентов инженерных специальностей дневной формы обучения / Сост. Е.Г.Бойко. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2012. – 32 с.

Целью настоящих методических указания является помощь студентам при изучении модуля по теме «Теория поля» дисциплин «Высшая математика» и «Тензорный анализ». При работе над этой темой рекомендуется использовать литературу, приведенную в конце методических указаний.

Данные методические указания содержат краткие теоретические сведения по «Теории поля», а также варианты индивидуальных заданий для самостоятельного решения, которые можно использовать по этой теме для проведения модульного контроля.

Методические указания предназначены для студентов дневной формы обучения инженерных специальностей.

Методические указания утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол № 3 от 30 октября 2012 г.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент – Ледяев С.Ф., канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

1	Понятие поля	4
2	Скалярное поле	4
2.1	Основные понятия	4
2.2.	Поверхности и линии уровня	5
2.3.	Производная по направлению.....	6
2.4.	Градиент скалярного поля и его свойства.....	8
3.	Векторное поле.....	9
3.1.	Векторные линии поля.....	9
3.2.	Поток векторного поля.....	11
3.3.	Формула Остроградского–Гаусса. Дивергенция поля.....	13
3.4.	Линейный интеграл и циркуляция векторного поля.....	15
3.5.	Ротор поля. Формула Стокса.....	16
4.	Пример решения варианта индивидуального задания.....	18
5.	Варианты для самостоятельного решения.....	24
	Библиографический список	32

1. ПОНЯТИЕ ПОЛЯ

В основе многих представлений современной физики, механики, электротехнике лежит понятие поля. Говорят, что в пространстве задано **поле** некоторой величины U , если в каждой точке пространства, или некоторой его области, определено значение этой величины.

В физических задачах часто приходится иметь дело со скалярными и векторными величинами. Соответственно различают и два вида полей: скалярное и векторное. В качестве примеров скалярных полей можно привести поля температур (тела, воздуха, ...), атмосферного давления, электрического потенциала и т.д. Примерами векторных полей служат: поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости (газа), магнитное поле, поле плотности электрического тока и т.д.

Поле величины u называется **стационарным** (установившимся), если U не зависит от времени t . Поле, которое меняется с течением времени, называется **нестационарным** (неустановившимся). В дальнейшем будем рассматривать только стационарные поля.

2. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть V – некоторая область плоскости или пространства. Если каждой точке M из области V соответствует определенное число $U = U(M)$, говорят, что в области V определено (задано) **скалярное поле** (или **функция точки**).

Таким образом, скалярное поле – это **скалярная функция** $U(M)$ вместе с ее областью определения.

Если в пространстве ввести декартову систему координат $Oxyz$, то скалярное поле U можно рассматривать как функцию трех переменных x, y, z (координат точки):

$$U = U(M) = U(x, y, z). \quad (1)$$

Например, функция $U = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$ определяет скалярное поле в точках пространства, ограниченного сферой с центром в начале координат и радиусом $R = 2$.

Если скалярная функция $U(M)$ является функцией двух переменных x и y , то соответствующее скалярное поле

$$U = U(M) = U(x, y) \quad (2)$$

называется **плоским**.

В дальнейшем будем предполагать, что скалярная функция $U(x, y, z)$ ($U(x, y)$) непрерывна вместе со своими частными производными.

2.2. ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ УРОВНЯ

Геометрической характеристикой скалярного поля служат **поверхности уровня** – геометрическое место точек пространства, в которых скалярная функция принимает одно и то же значение. Поверхности уровня поля (1) определяются уравнением

$$U(x, y, z) = C, \quad (3)$$

где $C = \text{const}$.

В случае, когда функция (3) непрерывна и дифференцируема в области V , через каждую точку $M \in V$, не являющуюся критической, проходит только одна поверхность уровня. Ее уравнение можно найти путем подстановки координат точки в уравнение (3).

Для скалярного поля, образованного функцией $U = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$, поверхностями уровня является множество концентрических сфер с центрами в начале координат: $\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} = C$. В частности при $C = 2$ получим $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, т.е. сфера стягивается в точку.

В случае бесконечной равномерно нагретой нити поверхностями уровня (изотермическими поверхностями) будут круговые цилиндры, ось которых совпадает с нитью.

Для плоского поля (2) уравнение $U(x, y) = C$ представляет собой уравнение *линии уровня* – линии на плоскости Oxy , в точках которой функция $U(x, y)$ сохраняет постоянное значение.

В метеорологии линии одинаковых средних давлений и одинаковых средних температур (сети изобар и изотерм) являются линиями уровня и представляют собой функции координат точек местности.

2.3. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Для характеристики скорости изменения поля $U(M)$ в заданном направлении определим понятие «производной по направлению».

Возьмем в пространстве, в котором задано поле $U = U(x, y, z)$, некоторую точку M и найдем скорость изменения функции U при движении точки M в произвольном направлении $\vec{l}$. Вектор $\vec{l}$ имеет начало в точке M и направляющие косинусы $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ (рис.1).

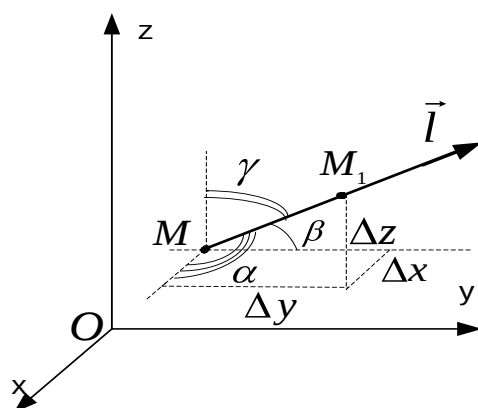


Рисунок 1 – Определение производной по направлению

Приращение функции ΔU , которое возникает при переходе от точки M к некоторой точке M_1 в направлении $\vec{l}$, определяется как

$$\Delta U = U(M_1) - U(M) = U(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - U(x; y; z).$$

Тогда,
$$\Delta l = |MM_1| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Если существует предел отношения $\frac{\Delta U}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$, то его называют *производной функции $U = U(x, y, z)$ в точке M по направлению $\vec{l}$* и обозначают $\frac{\partial U}{\partial l}$, т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta l} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{U(M_1) - U(M)}{|MM_1|}.$$

Физический смысл производной по направлению $\vec{l}$ заключается в том, что она характеризует скорость изменения функции U (поля) в точке M по этому направлению. Если $\frac{\partial U}{\partial l} > 0$, то функция U возрастает в направлении $\vec{l}$, если $\frac{\partial U}{\partial l} < 0$, то функция U убывает в направлении $\vec{l}$. Величина $\left| \frac{\partial U}{\partial l} \right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции U в направлении $\vec{l}$ в точке M .

Пусть функция $U = U(x, y, z)$ дифференцируема в точке M , тогда формула для вычисления производной по направлению $\vec{l}$ имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma, \quad (4)$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

В случае плоского поля $U = U(x, y)$ имеем: $\cos \beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos \gamma = 0$. Тогда формула (4) примет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \sin \alpha.$$

2.4. ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ И ЕГО СВОЙСТВА

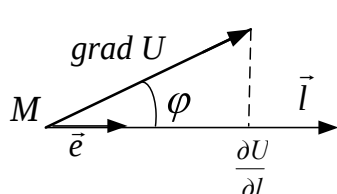
Направление, в котором производная $\frac{\partial U}{\partial l}$ имеет наибольшее значение,

указывает вектор, называемый градиентом скалярного поля.

Градиентом скалярного поля U в данной точке M называется вектор, обозначаемый символом $\text{grad } U$ и определяемый формулой:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}. \quad (5)$$

Необходимо отметить, что с учетом формулы (5), правая часть равенства (4) представляет собой скалярное произведение единичного вектора $\vec{e} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ и вектора $\text{grad } U$. Теперь равенство (4) можно



записать в виде: $\frac{\partial U}{\partial l} = \vec{e} \cdot \text{grad } U$ или

$$\frac{\partial U}{\partial l} = |\text{grad } U| \cdot \cos \varphi, \quad (6)$$

Рисунок 2 – К где φ – угол между вектором $\text{grad } U$ и направлением $\vec{l}$ (рис. 2).

Из формулы (6) очевидно, что производная по направлению достигает наибольшего значения при $\varphi = 0$, тогда $\cos \varphi = 1$. Таким образом, градиент функции указывает направление наибо́льшего возрастания функции.

Свойства градиента.

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня (линии уровня, если поле плоское), проходящей через данную точку.
2. Градиент направлен в сторону возрастания функции поля.
3. Модуль градиента равен наибольшей производной по направлению в данной точке M поля U , т.е. наибольшей скорости изменения функции U в точке M :

$$\max \frac{\partial U}{\partial l} = |\text{grad } U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}. \quad (7)$$

В последнем свойстве градиента и заключается его физический смысл.

3. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

3.1. ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ ПОЛЯ

Пусть V – некоторая область плоскости или пространства. Если каждой точке M области V пространства соответствует некоторый вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что задано **векторное поле** (*векторная функция точки*).

Если в пространстве введена декартова система координат, то задание векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ равносильно заданию трех скалярных функций точки $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$, таким образом:

$$\vec{a} = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}. \quad (8)$$

Простейшими геометрическими характеристиками векторного поля являются векторные линии.

Векторной линией векторного поля $\vec{a}$ называется кривая, касательная к которой в каждой ее точке M имеет направление соответствующего ей вектора $\vec{a}(M)$.

Для конкретных полей это понятие имеет определенный физический смысл. Так, в поле скоростей текущей жидкости векторными линиями будут линии, по которым движутся частицы жидкости (линии тока), а для магнитного поля векторными являются линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

Пусть векторное поле определено вектором $\vec{a}(M)$ (8), где $P = P(x; y; z)$; $Q = Q(x; y; z)$; $R = R(x; y; z)$ – некоторые непрерывные функции от x, y, z , имеющие непрерывные производные первого порядка. Тогда векторные линии поля (8) описываются системой дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx}{P(x; y; z)} = \frac{dy}{Q(x; y; z)} = \frac{dz}{R(x; y; z)}. \quad (9)$$

Интегрирование системы двух дифференциальных уравнений (8) дает систему двух конечных уравнений

$$\varphi_1(x; y; z) = C_1, \quad \varphi_2(x; y; z) = C_2,$$

которые, в совокупности, определяют двухпараметрическое семейство векторных линий.

Пусть в некоторой области V для системы (9) выполнены условия теоремы существования и единственности решения, тогда через каждую точку $M_0(x_0; y_0; z_0) \in V$ проходит единственная векторная линия

$$\begin{cases} \varphi_1(x; y; z) = \varphi_1(x_0; y_0; z_0), \\ \varphi_2(x; y; z) = \varphi_2(x_0; y_0; z_0). \end{cases}$$

Пример 1. Найти векторные линии векторного поля $\vec{a} = \vec{c} \times \vec{r}$, где $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ – постоянный вектор.

Решение.

Так как $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то их векторное произведение будет иметь вид:

$$\vec{a} = \vec{c} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z - 2y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (-3x)\vec{k}.$$

Тогда, с учетом (9), дифференциальные уравнения векторных линий

$$\frac{dx}{3z - 2y} = \frac{dy}{2x - z} = \frac{dz}{y - 3x}. \quad (10)$$

Умножим числитель и знаменатель первой дроби (10) на x , второй – на y , третьей – на z . Используем свойство пропорций:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}.$$

Сложим почленно дроби: $\frac{xdx}{x(3z - 2y)} = \frac{ydy}{y(2x - z)} = \frac{zdz}{z(y - 3x)}.$

Тогда:

$$\frac{dx}{3z - 2y} = \frac{dy}{2x - z} = \frac{dz}{y - 3x} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}.$$

Следовательно, $xdx + ydy + zdz = 0,$

таким образом,

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1, \quad C_1 = \text{const}, C_1 > 0.$$

Умножим теперь числитель и знаменатель второй дроби (10) на 3, третьей – на 2 и сложим почленно, получим:

$$\frac{dx}{3z-2y} = \frac{dy}{2x-z} = \frac{dz}{y-3x} = \frac{dx+3dy+2dz}{0},$$

тогда,

$$dx + 3dy + 2dz = 0,$$

а значит,

$$x + 3y + 2z = C_2, \quad C_2 = \text{const}.$$

Следовательно, искомые уравнения векторных линий

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= C_1, \\ x + 3y + 2z &= C_2. \end{aligned} \right\}$$

Полученные уравнения показывают, что векторные линии являются результатом пересечения сфер, с центром в начале координат, с плоскостями, перпендикулярными вектору $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Следовательно, векторные линии – это окружности, центры которых лежат на прямой, проходящей через начало координат в направлении вектора $\vec{c}$. Плоскости окружностей перпендикулярны указанной прямой (рис. 3).

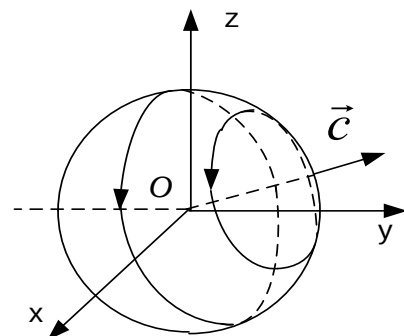


Рисунок 3 – К примеру 1

3.2. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть векторное поле образовано вектором (8), координаты которого $P = P(x; y; z)$, $Q = Q(x; y; z)$, $R = R(x; y; z)$ непрерывны в некоторой области V . Пусть S некоторая гладкая или кусочно-гладкая двухсторонняя

поверхность в этой области, у которой выбрана определенная сторона, т.е. поверхность ориентирована.

Потоком Π векторного поля $\vec{a}(M)$ через ориентированную поверхность S называется поверхностный интеграл первого рода по поверхности S от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности S :

$$\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds. \quad (11)$$

Так как $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, то формулу (10) можно записать в виде:

$$\Pi = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds.$$

С учетом взаимосвязи поверхностных интегралов I и II рода [см. 2, часть 2], поток векторного поля можно вычислить по формуле:

$$\Pi = \iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy. \quad (12)$$

Если поверхность S задана уравнением

$$F(M) = F(x, y, z) = 0, \quad (13)$$

то единичный вектор нормали

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad } F(M)}{|\text{grad } F(M)|} = \pm \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}, \quad (14)$$

знак в правой части берется так, чтобы получить нормальный вектор $\vec{n}$ к выбранной стороне поверхности S .

Если поверхность S взаимно однозначно проектируется на плоскость xOy в область D_{xy} , то поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность S можно вычислить по формуле:

$$\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \right|_{z=z(x,y)} dx dy, \quad (15)$$

где $\cos \gamma$ – коэффициент при $\vec{k}$ в формуле (14), а $z = z(x, y)$ получается разрешением уравнения (13) относительно z .

Физический смысл потока заключается в том, что скалярная величина Π равна количеству жидкости (силовых линий) проходящей в единицу времени через поверхность S в направлении вектора $\vec{n}$.

В случае замкнутой поверхности S , ограничивающей некоторую область V , в качестве вектора $\vec{n}$ берется направление внешней нормали к этой поверхности. Тогда поток вектора $\vec{a}(M)$ записывается в виде:

$$\Pi = \oint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds. \quad (16)$$

Если $\Pi = 0$, в область V входит столько же линий, сколько и выходит. Если $\Pi > 0$, из области V выходит линий больше, чем входит. Это значит, что

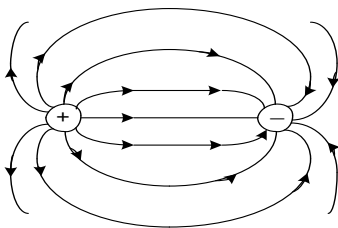


Рисунок 4 –
Электростатическое поле

в области V имеются *источники*. Если же $\Pi < 0$, то в области V находятся *стоки* – места, где векторные линии поглощаются. Например, в электростатическом поле источником поля является положительный заряд, а стоком – отрицательный заряд магнита (рис. 4).

3.3. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО – ГАУССА. ДИВЕРГЕНЦИЯ ПОЛЯ

Если в некоторой области V пространства координаты вектора

$$\vec{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$$

непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial y}; \frac{\partial R}{\partial z}$, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую гладкую или кусочно-гладкую поверхность S , расположенную в области V , равен:

$$\begin{aligned} \Pi &= \oiint_S Pdydz + Qdx dz + Rdx dy = \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \end{aligned} \quad (17)$$

где S – положительно ориентированная поверхность.

Формула (17) является формулой Остроградского–Гаусса.

Важной количественной характеристикой векторного поля (8) является дивергенция поля, которая характеризует распределение и интенсивность его источников и стоков.

Если существует предел отношения потока поля через замкнутую поверхность S , окружающую точку M , к объему V области (V) , ограниченной поверхностью S , когда область (V) стягивается к точке M , то этот предел называется **дивергенцией векторного поля** в точке M и обозначается символом $\operatorname{div} \vec{a}(M)$:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\oiint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds}{V}.$$

Знак дивергенции дает возможность судить о наличии источника или стока векторного поля в точке M . Если $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$, то в точке M находится источник, если $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$ – сток, если $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$, то в точке M нет ни стоков, ни источников. Абсолютная величина $|\operatorname{div} \vec{a}(M)|$ характеризует *мощность источника* или *стока* в точке M .

Если в некоторой области V пространства координаты вектора

$$\vec{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$$

дифференцируемы в области V , то в любой точке $M \in V$ существует $\operatorname{div} \vec{a}(M)$, причем

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (18)$$

где частные производные вычислены в точке M .

С учетом формул (16) и (18) формулу Остроградского–Гаусса (17) можно записать в векторной форме:

$$\oint_S \vec{a} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dv. \quad (19)$$

Если дивергенция равна нулю в каждой точке области V , то векторное поле называется *соленоидальным (трубчатым) в области V* .

3.4. ЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть в области V заданы непрерывное векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ и кусочно-гладкая кривая L , на которой выбрано положительное направление (ориентированная кривая). Обозначим через $\vec{\tau}^0$ единичный вектор касательной к линии L , направление которого совпадает с выбранным направлением на линии.

Линейным интегралом W векторного поля $\vec{a}$ вдоль линии L называется криволинейный интеграл первого рода от скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{\tau}^0$:

$$W = \int_L \vec{a} \cdot \vec{\tau}^0 \, dl, \quad (20)$$

где dl – дифференциал дуги линии L .

Если рассмотреть вектор $d\vec{r} = \vec{\tau}^0 \, dl$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, описывающей линию L , и обозначить его проекции на координатные оси dx , dy , dz , то формулу (20) можно записать:

$$W = \int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_L P \, dx + Q \, dy + R \, dz.$$

Если заданы векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и замкнутая линия L , то линейный интеграл называется **циркуляцией векторного поля $\vec{a}$** вдоль замкнутой линии L и обозначается C :

$$C = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \quad (21)$$

За положительное направление обхода замкнутой линии L будем считать направление, при котором область, ограниченная этой кривой, остается слева.

Если кривая L расположена в силовом поле, то циркуляция C – это работа силы $\vec{a}(M)$ поля при перемещении материальной точки вдоль линии L .

3.5. РОТОР ПОЛЯ. ФОРМУЛА СТОКСА

Пусть задано векторное поле

$$\vec{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}.$$

Пусть координаты $\vec{a}(M)$ непрерывны и имеют непрерывные производные по всем своим аргументам.

Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{a}(M)$ называется вектор, обозначаемый $\text{rot } \vec{a}(M)$ и определяемый формулой:

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (22)$$

Направление ротора – это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшее значение по сравнению с циркуляцией вокруг любого направления, не совпадающего с нормалью к площадке S (рис. 5).

Формулу (22) можно записать в

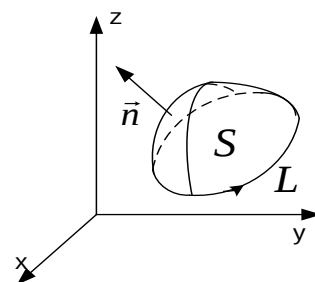


Рисунок 5 – К

символической форме, удобной для определению ротора запоминания:

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Этот определитель (23) обычно раскрывается по элементам первой строки, операция умножения элементов второй строки на элементы третьей строки понимается как операция дифференцирования, т.е. $\frac{\partial}{\partial y} \cdot R = \frac{\partial R}{\partial y}$.

Если в области V $\operatorname{rot} \vec{a}(M) = 0$, то векторное поле $\vec{a}(M)$ в области V называется **потенциальным (безвихревым)**.

Используя понятия циркуляции и ротора векторного поля, формулу Стокса [см. 2, часть 2] можно записать:

$$\oint_L \vec{a}_r dl = \iint_S \operatorname{rot}_n \vec{a} ds. \quad (24)$$

Формулу (24) называют векторной формой формулы Стокса. Она показывает, что циркуляция вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого вектора через поверхность S , натянутую на контур L .

Если к поверхностному интегралу в формуле (24) применить теорему о среднем, то получим формулу плотности μ_M циркуляции векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M в направлении вектора $\vec{n}^0$:

$$\mu_M = \operatorname{rot} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0. \quad (25)$$

Формула (25) показывает, что плотность циркуляции в точке M будет наибольшей тогда, когда направление вектора $\vec{n}^0$ совпадет с направлением $\operatorname{rot} \vec{a}(M)$. Следовательно, направление ротора – это направление, по которому плотность циркуляции в точке M максимальна, а длина ротора равна максимальной плотности циркуляции, то есть:

$$\max \mu_M = |\operatorname{rot} \vec{a}(M)|. \quad (26)$$

4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ВАРИАНТА ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

ЗАДАНИЕ 1. Пусть заданы: скалярное поле $U = \operatorname{tg}(xz) + e^{z \ln y} + z$, точки $M(0, 1, -2)$ и $M_1(-2, 1, 3)$, направление $\vec{l} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и угол $\varphi = 60^\circ$. Определите в точке M : производную поля по направлению $\vec{l}$; производную поля по направлению, идущему от точки M к точке M_1 ; градиент; наибольшую скорость возрастания поля в точке M ; производную поля по направлению вектора $\vec{l}_1$, который образует с градиентом в точке M угол φ .

Решение. Заданное поле U определено и дифференцируемо во всех точках (x, y, z) пространства, для которых $y > 0$. Точка $M(0, 1, -2)$ принадлежит области определения поля, поэтому производная поля в этой точке существует по любому направлению. Найдем частные производные функции U :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{z}{\cos^2(xz)}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{z}{y} e^{z \ln y}; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{x}{\cos^2(xz)} + e^{z \ln y} \ln y + 1.$$

Найдем значения частных производных функции U в точке $M(0, 1, -2)$:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_M = -2; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_M = -2; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_M = 1.$$

Для определения производной поля по направлению $\vec{l}$ воспользуемся формулой (4). Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{l} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

$$|\vec{l}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \text{тогда:}$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_M = \frac{1}{\sqrt{14}} \left((-2) \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \right) = -\frac{2}{\sqrt{14}} \approx -0,53.$$

Найдем производную поля по направлению, идущему от точки $M(0, 1, -2)$ к точке $M_1(-2, 1, 3)$.

$$\vec{l} = \overrightarrow{MM_1} = -2\vec{i} + 5\vec{k}; \quad |\overrightarrow{MM_1}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}, \quad \text{тогда} \quad \cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{29}}, \quad \cos \beta = 0,$$

$$\cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{29}}, \quad \text{следовательно:}$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_M = \frac{1}{\sqrt{29}} \langle -2 \rangle \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 5 \rceil = \frac{9}{\sqrt{29}} \approx 1,68.$$

Градиент поля в точке $M(0, 1, -2)$ определим по формуле (5):

$$\text{grad } U(M) = \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_M \vec{i} + \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_M \vec{j} + \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_M \vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Наибольшую скорость возрастания поля в точке M найдем по формуле (7):

$$\max \left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_M = |\text{grad } U(M)| = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

Производную поля по направлению вектора $\vec{l}_1$, который образует с градиентом в точке M угол φ , найдем по формуле (6):

$$\left. \frac{\partial U}{\partial l_1} \right|_M = |\text{grad } U(M)| \cos \varphi = 3 \cdot \cos 60^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5.$$

$$\text{Ответ:} \quad \left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_M = -\frac{2}{\sqrt{14}} \approx -0,53; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_M = \frac{9}{\sqrt{29}} \approx 1,68;$$

$$\text{grad } U(M) = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}; \quad \max \left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_M = 3; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial l_1} \right|_M = 1,5.$$

ЗАДАНИЕ 2. Найти поток векторного поля

$\vec{a} = (x-z)\vec{i} + (2z-x)\vec{j} + (2x+y)\vec{k}$ через верхнюю сторону треугольника, полученного при пересечении плоскости $3x-2y+6z-6=0$ с координатными плоскостями.

Решение. Треугольник, полученный при пересечении плоскости $3x-2y+6z-6=0$ с координатными плоскостями, взаимно однозначно

проектируется на плоскость xOy , поэтому для вычисления потока векторного поля воспользуемся формулой (15). Так как поверхность S , задана в виде (13):

$$F(x, y, z) = 3x - 2y + 6z - 6,$$

то для определения единичного вектора нормали $\vec{n}$ к верхней стороне треугольника воспользуемся формулой (14).

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad } F(M)}{|\text{grad } F(M)|} = \frac{3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}}{7}, \quad (27)$$

здесь знак в правой части берется так, чтобы получить нормальный вектор $\vec{n}$ к выбранной стороне поверхности S (рис.6).

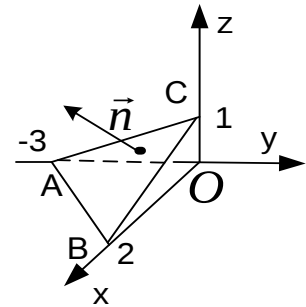


Рисунок 6 –
К заданию 2

$\cos \gamma = \frac{6}{7}$ – коэффициент при $\vec{k}$ в выражении (27).

Следовательно,

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} = \frac{1}{7} \llbracket (x-z) \cdot 3 + (2z-x) \cdot (-2) + (2x+y) \cdot 6 \rrbracket \frac{1}{\frac{6}{7}} = \frac{1}{6} \llbracket 7x + 6y - 7z \rrbracket.$$

Из уравнения плоскости треугольника ABC выразим $z = z(x, y)$:

$$z = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + 1.$$

Тогда,

$$\left. \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \right|_{z=z(x,y)} = \frac{1}{6} \left(17x + 6y - 7 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + 1 \right) \right) = \frac{1}{36} \llbracket 23x + 22y - 42 \rrbracket.$$

Проекция треугольника ABC на плоскость xOy есть треугольник AOB , тогда:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\Delta ABC} \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\Delta AOB} \left. \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \right|_{z=z(x,y)} dx dy = \iint_{\Delta AOB} \frac{1}{36} \llbracket 23x + 22y - 42 \rrbracket dx dy = \\ &= \frac{1}{36} \int_0^2 dx \int_{\frac{3}{2}x-3}^0 (123x + 22y - 42) dy = -\frac{1}{12} \int_0^2 \left(\frac{279}{4} x^2 - 177x + 75 \right) dx = \frac{3}{2} = 1,5. \end{aligned}$$

Ответ: $\Pi = 1,5$.

ЗАДАНИЕ 3. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{a} = (x+z)\vec{i} - (y-2x)\vec{j} + z^2\vec{k}$ в точке $M(1, -1, 3)$ и поток векторного поля через замкнутую поверхность $S: x^2 + y^2 = 3z, x^2 + y^2 + z^2 = 4$ по формуле Остроградского–Гаусса.

Решение. Данное векторное поле определено и дифференцируемо во всех точках пространства. Следовательно, для вычисления дивергенцию векторного поля воспользуемся формулой (18):

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 - 1 + 2z = 2z.$$

В точке $M(1, -1, 3)$ дивергенция векторного поля будет равна:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = 2z|_{z=3} = 6.$$

Полученный результат показывает, что в точке $M(1, -1, 3)$ имеется источник с мощностью равной 6.

Замкнутая поверхность S , через которую требуется найти поток векторного поля, состоит из части параболоида $x^2 + y^2 = 3z$ и части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, накрывающей параболоид (рис.7). Для определения потока заданного поля воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса (19) в векторной форме:

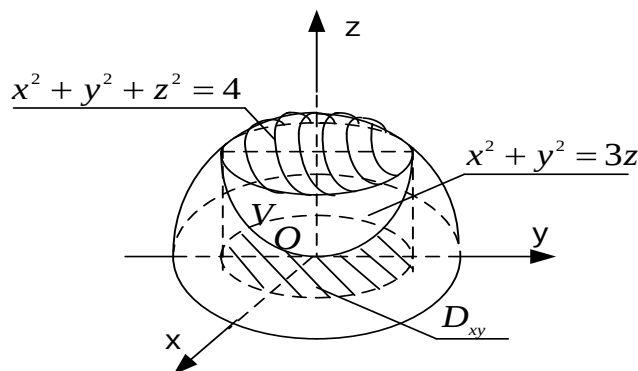


Рисунок 7 – Иллюстрация к заданию 3

$$\Pi = \oiint_S \vec{a} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dv = \iiint_V 2z \, dv. \quad (28)$$

Для вычисления тройного интеграла в выражении (28) перейдем к цилиндрическим координатам ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$). Тогда уравнение параболоида в цилиндрических координатах примет вид $r^2 = 3z$, а уравнение сферы – $z = \sqrt{4 - r^2}$. Исключая z из уравнений данных поверхностей, получим, что параболоид и сфера пересекаются по окружности сферы $r = \sqrt{3}$. С учетом, что $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а $0 \leq r \leq \sqrt{3}$, найдем тройной интеграл в выражении (26):

$$\Pi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} z dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} (4 - r^2 - \frac{r^4}{9}) r dr = \int_0^{2\pi} \frac{13}{4} d\varphi = 6,5\pi.$$

Ответ: $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 6$; $\Pi = 6,5\pi$.

ЗАДАНИЕ 4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y^2 \vec{i} + z^2 \vec{j} + (x^2 - 2y) \vec{k}$ вдоль линии L : $x^2 + y^2 = 5x$, $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

Решение.

Линия L является результатом сечения полусферы $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ цилиндром $x^2 + y^2 = 5x$ (рис.8), она проектируется на плоскость xOy в окружность $x^2 + y^2 = 5x$, параметрические уравнения которой имеют вид:

$$x = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \cos t, \quad y = \frac{5}{2} \sin t, \quad \text{где } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Найдем аппликату точек линии L , которая лежит на полусфере $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$:

$$z = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} \cos t\right)^2 - \left(\frac{5}{2} \sin t\right)^2} = 5 \sin \frac{t}{2}.$$

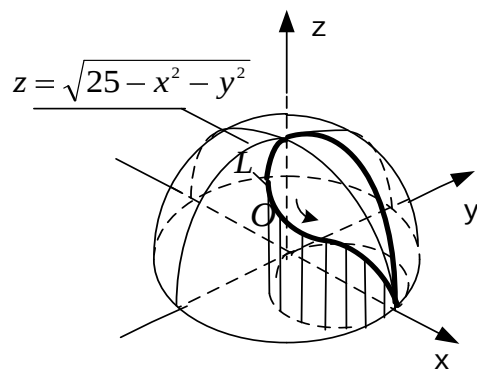


Рисунок 8 – Линия L

Для вычисления циркуляции векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ вдоль линии L воспользуемся формулой (21).

$$\begin{aligned}
C &= \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint_L y^2 dx + z^2 dy + (x^2 - 2y)dz = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{25}{4} \sin^2 t \cdot \left(-\frac{5}{2} \sin t \right) + 25 \sin^2 t \cdot \frac{5}{2} \cos t + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{25}{4} (1 + \cos t) - 2 \cdot \frac{5}{2} \sin t \right) \cdot \frac{5}{2} \cos \frac{t}{2} \right) dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{125}{8} \sin^3 t + \frac{125}{4} (1 - \cos t) \cos t + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{25}{4} (1 + 2 \cos t + \cos^2 t) - 5 \sin t \right) \cdot \frac{5}{2} \cos \frac{t}{2} \right) dt = -\frac{25}{12} (5\pi + 16).
\end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{25}{12} (5\pi + 16).$

ЗАДАНИЕ 5. Для векторного поля $\vec{a} = (2y^3 - yz - 3z)\vec{i} + (yz - 2x^3 + x)\vec{j} + (2x^3y - z^3)\vec{k}$ найти: ротор; плотность циркуляции в точке $M(1, -1, -1)$ по направлению единичного вектора $\vec{n}^0 = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$; наибольшую плотность циркуляции в точке M .

Решение. Координаты данного векторного поля $\vec{a}$ непрерывны и имеют непрерывные производные по всем своим аргументам. Следовательно, в каждой точке пространства существует ротор векторного поля. Для его нахождения воспользуемся формулой (23):

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y^3 - yz - 3z & yz - 2x^3 + x & 2x^3y - z^3 \end{vmatrix} = \\
&= (2x^3 - y)\vec{i} - (6x^2y + y + 3)\vec{j} + (-6x^2 + 1 - 6y^2 + z)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Найдем значение ротора векторного поля в точке $M(1, -1, -1)$:

$$\text{rot } \vec{a}(M) = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}.$$

Плотность циркуляции заданного векторного поля в точке $M(1, -1, -1)$ по направлению единичного вектора $\vec{n}^0 = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$ найдем по формуле (25):

$$\mu_M = \text{rot } \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = \frac{1}{3}(3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + (-12) \cdot (-2)) = \frac{26}{3} \approx 8,67.$$

Наибольшую плотность циркуляции в точке M найдем по формуле (26):

$$\max \mu_M = |\text{rot } \vec{a}(M)| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13.$$

Ответ: $\text{rot } \vec{a}(M) = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$; $\mu_M \approx 8,67$; $\max \mu_M = 13$.

5. ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАНИЕ 1. Пусть заданы: скалярное поле $U = U(x, y, z)$, точки M и M_1 , направление $\vec{l}$ и угол φ . Определите в точке M : производную поля по направлению $\vec{l}$; производную поля по направлению, идущему от точки M к точке M_1 ; градиент; наибольшую скорость возрастания поля в точке M ; производную поля по направлению вектора $\vec{l}_1$, который образует с градиентом в точке M угол φ , если:

1. $U = xy^2z + yz^2 - 3z$, $M(0, 1, 2)$, $M_1(-2, 3, -1)$, $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\varphi = 30^\circ$.
2. $U = x^2y + xz^2 - 2z$, $M(1, 1, -1)$, $M_1(2, -1, 2)$, $\vec{l} = -3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $\varphi = 180^\circ$.
3. $U = \frac{y}{xz} + \frac{x}{yz} + \frac{z}{xy}$, $M(1, 2, 3)$, $M_1(-2, 1, -1)$, $\vec{l} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\varphi = 225^\circ$.
4. $U = x^2z + y^2 - 3xz$, $M(1, 1, -1)$, $M_1(2, -1, 2)$, $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $\varphi = 60^\circ$.
5. $U = xyz$, $M(1, 1, -1)$, $M_1(-1, -1, 2)$, $\vec{l} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $\varphi = 45^\circ$.
6. $U = xz^2 + 2yz$, $M(1, 0, 2)$, $M_1(1, -1, 3)$, $\vec{l} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\varphi = 180^\circ$.
7. $U = x^2y + xz^2 - 3$, $M(1, 1, -1)$, $M_1(2, -1, 3)$, $\vec{l} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$, $\varphi = 135^\circ$.
8. $U = xe^y + ye^x - z^2$, $M(3, 0, 2)$, $M_1(4, 1, 3)$, $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\varphi = 30^\circ$.
9. $U = x^2y + y^2z + z^2x$, $M(1, 0, 0)$, $M_1(2, -1, 2)$, $\vec{l} = -3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $\varphi = 60^\circ$.

10. $U = \operatorname{tg}(yz) + e^{z \ln x} + z$, $M(1, 0, -2)$, $M_1(2, -1, 2)$, $\vec{l} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\varphi = 30^\circ$.
11. $U = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$, $M(1, 2, -1)$, $M_1(0, -1, 2)$, $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\varphi = 180^\circ$.
12. $U = x^2 y^2 - 3xyz^2 - 2xy^2 z$, $M(1, 1, 1)$, $M_1(1, -1, 3)$, $\vec{l} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\varphi = 45^\circ$.
13. $U = y^2 z + z^2 - 2xyz$, $M(3, 1, -1)$, $M_1(2, -1, 2)$, $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\varphi = 225^\circ$.
14. $U = x^2 y + xz^2 - 2z$, $M(1, 1, -1)$, $M_1(2, -1, 2)$, $\vec{l} = -3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $\varphi = 180^\circ$.
15. $U = 5x^2 yz - 7xy^2 z + 5xyz^2$, $M(1, 1, 1)$, $M_1(0, -1, 1)$, $\vec{l} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $\varphi = 60^\circ$.
16. $U = 2x^2 - 3xz + z^2 + yz$, $M(1, 1, 1)$, $M_1(3, 0, -1)$, $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\varphi = 30^\circ$.
17. $U = x^2 z + xy^2 - 2y$, $M(1, -1, 1)$, $M_1(-2, 1, 0)$, $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\varphi = 120^\circ$.
18. $U = xy^z + ze^x - y^2$, $M(1, 2, 0)$, $M_1(3, -1, 2)$, $\vec{l} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\varphi = 135^\circ$.
19. $U = \operatorname{tg}(xy) + e^{y \ln z} - y$, $M(0, 2, 1)$, $M_1(-1, 1, 2)$, $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\varphi = 60^\circ$.
20. $U = xy^2 + yz^2 - 3xz$, $M(1, -1, 1)$, $M_1(2, -2, 0)$, $\vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\varphi = 180^\circ$.
21. $U = xe^z + ze^x - y^2$, $M(1, 2, 0)$, $M_1(-2, 1, 3)$, $\vec{l} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\varphi = 30^\circ$.
22. $U = xy^2 - 3x^2 z - 2y^2 z$, $M(-1, 1, -1)$, $M_1(1, -1, 3)$, $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\varphi = 45^\circ$.
23. $U = x^2 z + y^2 - 5xz$, $M(-1, 1, -1)$, $M_1(3, -1, 1)$, $\vec{l} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\varphi = 60^\circ$.
24. $U = x^2 z + z^2 - 3xyz$, $M(2, -1, 1)$, $M_1(0, -1, 3)$, $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\varphi = 225^\circ$.
25. $U = x^2 yz + xz^2 + 2z$, $M(-1, 1, 2)$, $M_1(0, -3, 1)$, $\vec{l} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\varphi = 30^\circ$.

ЗАДАНИЕ 2. Найти поток векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ через верхнюю сторону треугольника, полученного при пересечении плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ с координатными плоскостями.

1. $\vec{a} = (3x + z)\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$, $x - 2y - z + 4 = 0$.
2. $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} + (x - 5y)\vec{k}$, $3x - 2y + z + 5 = 0$.
3. $\vec{a} = (y + 2z)\vec{i} + (x - 4z)\vec{j} + (3x - y)\vec{k}$, $x + 3y - z + 1 = 0$.
4. $\vec{a} = (4x + 3z)\vec{i} + (y + 3z)\vec{j} + (2x - y)\vec{k}$, $6x - 2y - 3z + 4 = 0$.
5. $\vec{a} = (2x + y)\vec{i} + (4x - z)\vec{j} - (2x - y)\vec{k}$, $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

$$6. \vec{a} = (3y + z)\vec{i} - (2x - z)\vec{j} + (x + 2y)\vec{k}, \quad -x + 2y + 3z + 2 = 0.$$

$$7. \vec{a} = (-2x + z)\vec{i} - (y - z)\vec{j} + (x + 3y)\vec{k}, \quad x + 2y - 3z + 4 = 0.$$

$$8. \vec{a} = (x + 4y)\vec{i} - (3x + z)\vec{j} - (x + 3y)\vec{k}, \quad 2x - y + 3z + 2 = 0.$$

$$9. \vec{a} = (-y - z)\vec{i} + (2x + z)\vec{j} - (x - 2y)\vec{k}, \quad x - 3y - z - 1 = 0.$$

$$10. \vec{a} = (x - 3z)\vec{i} + (2y - z)\vec{j} - (x + 3y)\vec{k}, \quad 2x - 3y - 6z + 1 = 0.$$

$$11. \vec{a} = (5x + y)\vec{i} - (3x + 2z)\vec{j} - (x - 2y)\vec{k}, \quad 3x - y + z - 1 = 0.$$

$$12. \vec{a} = (2y - 3z)\vec{i} - (x + 3z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}, \quad x + y - z + 1 = 0.$$

$$13. \vec{a} = (x - 2z)\vec{i} + (y - 4z)\vec{j} - (x + y)\vec{k}, \quad x - y - 3z + 4 = 0.$$

$$14. \vec{a} = -(2x + 3y)\vec{i} - (x + z)\vec{j} + (x + 3y)\vec{k}, \quad x + 2y + 3z - 5 = 0.$$

$$15. \vec{a} = (y + 2z)\vec{i} - (x - 4z)\vec{j} + (3x + y)\vec{k}, \quad x - y - z + 1 = 0.$$

$$16. \vec{a} = (x - 2z)\vec{i} + (3y + z)\vec{j} - (x + 4y)\vec{k}, \quad 6x + 3y - 2z + 6 = 0.$$

$$17. \vec{a} = (x + 4y)\vec{i} - (3x + 2z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}, \quad x - 2y + z + 3 = 0.$$

$$18. \vec{a} = (y + z)\vec{i} - (x - z)\vec{j} + (3x - 2y)\vec{k}, \quad x + 3y - 6z + 1 = 0.$$

$$19. \vec{a} = (x + z)\vec{i} - (2y - z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}, \quad 2x - 2y - z + 4 = 0.$$

$$20. \vec{a} = (x - y)\vec{i} - (x + z)\vec{j} - (x + y)\vec{k}, \quad x - 2y + 3z + 1 = 0.$$

$$21. \vec{a} = (y + 2z)\vec{i} - (x + 3z)\vec{j} - (x - 2y)\vec{k}, \quad x + 3y - z + 1 = 0.$$

$$22. \vec{a} = (4x - z)\vec{i} + (y - z)\vec{j} - (x - 2y)\vec{k}, \quad 2x - 6y + 3z + 1 = 0.$$

$$23. \vec{a} = (x + y)\vec{i} - (x - z)\vec{j} + (2x - 5y)\vec{k}, \quad 3x - y + z + 3 = 0.$$

$$24. \vec{a} = (3y + 2z)\vec{i} - (2x - z)\vec{j} + (x - 4y)\vec{k}, \quad 2x + 3y - z + 1 = 0.$$

$$25. \vec{a} = (2x - 3z)\vec{i} - (y - 2z)\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad 6x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

ЗАДАНИЕ 3. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ в точке M и поток векторного поля через указанные замкнутые поверхности S по формуле Остроградского–Гаусса.

$$1. \vec{a} = (x - z)\vec{i} + (2y - x)\vec{j} + z^2\vec{k}; \quad M(1, -1, 3); \quad S: x^2 + y^2 = 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

2. $\vec{a} = (3x+z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + 2z^2\vec{k}$; $M(-2, -1, 3)$; $S: x^2 + y^2 = z, x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
3. $\vec{a} = x\vec{i} + z^2\vec{k}$; $M(1, 2, 1)$; $S: x^2 + y^2 = z, z = 4$.
4. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$; $M(-2, 0, 1)$; $S: x^2 + y^2 = z^2, z = H, H > 0$.
5. $\vec{a} = x\vec{i} - z\vec{k}$; $M(0, -1, 2)$; $S: x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0, z = 6 - x^2 - y^2$.
6. $\vec{a} = yz\vec{i} - x\vec{j} - y\vec{k}$; $M(1, 1, 2)$; $S: x^2 + z^2 = y^2, y = 1 (0 \leq y \leq 1)$.
7. $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$; $M(-1, -1, 2)$; $S: x^2 + y^2 = z^2, z = x^2 + y^2$.
8. $\vec{a} = 2x\vec{i} - (z-1)\vec{k}$; $M(2, -1, 1)$; $S: x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 1$.
9. $\vec{a} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$; $M(0, -1, -1)$; $S: x^2 + y^2 = 3z, x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
10. $\vec{a} = xy\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$; $M(3, -1, -1)$; $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
11. $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (y+x)\vec{j} + (z+y)\vec{k}$; $M(1, 1, 2)$; $S: x^2 + y^2 = R^2, z = y, z \geq 0$.
12. $\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$; $M(-1, -1, 2)$; $S: x = 0, y = 0, z = 0, 9 - z = x^2 + y^2$.
13. $\vec{a} = (y-x)\vec{i} + (z-y)\vec{j} + (x-z)\vec{k}$; $S: x + y + z = 1, x - y + z = 1, z = 0, x = 0$;
 $M(1, 1, -1)$.
14. $\vec{a} = x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k}$; $M(-1, 3, 2)$; $S: x = 0, 1 - z = x^2 + y^2$.
15. $\vec{a} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$; $M(-1, 2, 2)$; $S: x = x^2 + z^2, z = 0, x = 0, y = 1, x \geq 0$.
16. $\vec{a} = x^2\vec{i} + z^2\vec{j}$; $M(-1, -2, 1)$; $S: x = 1 - x - y, z = 0, x = 0, y = 0, z \geq 0$.
17. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xz\vec{k}$; $M(-1, 0, 2)$; S – поверхность пирамиды с
вершинами в точках $O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 2)$.
18. $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$; $M(1, 1, 1)$;
 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
19. $\vec{a} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$; $M(1, -1, 4)$; $S: 9 - z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 9$.
20. $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{j}$; $M(-3, 0, 1)$; $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
21. $\vec{a} = x\vec{i} - 2y\vec{j} + z\vec{k}$; $M(-1, -1, -1)$; $S: x^2 + y^2 = 3z, x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
22. $\vec{a} = 2xy\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$; $M(4, 1, -1)$; $S: x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

$$23. \vec{a} = 3x\vec{i} - 2z\vec{j} + y\vec{k}; M(2, 1, 1); S: x + y + z = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$24. \vec{a} = (x+z)\vec{i} + (y+x)\vec{j} + (z+y)\vec{k}; M(0, 1, -2); S: x^2 + y^2 = 4, z = x, z \geq 0.$$

$$25. \vec{a} = yz\vec{i} - x\vec{j} - y\vec{k}; M(-2, 0, 2); S: x^2 + z^2 = y^2, y = 1, y = 0.$$

ЗАДАНИЕ 4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ вдоль замкнутой линии L .

$$1. \vec{a} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + (x^2 - 2y)\vec{k}; L: x^2 + y^2 = 2x, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

$$2. \vec{a} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}; L: x^2 + z^2 = 1 - y, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$3. \vec{a} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}; L: x + y + z = 3, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$4. \vec{a} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + (x^2 - 2y)\vec{k}; L: x^2 + y^2 = 3x, z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

$$5. \vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}; L: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$6. \vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}; L: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z > 0.$$

$$7. \vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}; L: x + y + z = 1, x^2 + y^2 = 1.$$

$$8. \vec{a} = y^2\vec{i} + (x^2 + 1)\vec{j} + z\vec{k}; L: x^2 + 2y + z = 1, x^2 + y^2 = 1.$$

$$9. \vec{a} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + (x^2 - 2y)\vec{k}; L: x^2 + y^2 = 2x, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

$$10. \vec{a} = y\vec{i} - z\vec{j} + x\vec{k}; L: x^2 + y^2 + z^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$11. \vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}; L: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z > 0.$$

$$12. \vec{a} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}; L: x^2 + y^2 = 3x, z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

$$13. \vec{a} = (xz + y)\vec{i} + (yz - x)\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}; L: x^2 + y^2 = 3, x^2 + y^2 = 1.$$

$$14. \vec{a} = (2x + z)\vec{i} + (2y - z)\vec{j} + xyz\vec{k}; L: x^2 + y^2 = 1 - z, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$15. \vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + 3\vec{k}; L: x^2 + y^2 = 1, z = 0.$$

$$16. \vec{a} = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}; L: x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$17. \vec{a} = y\vec{i} - z\vec{j} + x\vec{k}; L: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$18. \vec{a} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}; L: x^2 + y^2 = 2x, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

19. $\vec{a} = z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$; $L: x^2 + y^2 - 10, z = -1$.
20. $\vec{a} = y\vec{i} - z\vec{j} + x\vec{k}$; $L: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
21. $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$; $L: x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 = z^2, z > 0$.
22. $\vec{a} = (xz + y)\vec{i} + (yz - x)\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}$; $L: x^2 + y^2 = 2, x^2 + y^2 = 1$.
23. $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + 4\vec{k}$; $L: x^2 + y^2 = 1, z = 0$.
24. $\vec{a} = y^2\vec{i} + (x^2 + 1)\vec{j} + z\vec{k}$; $L: x + y + z = 1, x^2 + y^2 = 1$.
25. $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$; $L: x^2 + y^2 + z^2 = 25, x^2 + y^2 = z^2, z > 0$.

ЗАДАНИЕ 5. Для векторного поля $\vec{a}$ найти: ротор; плотность циркуляции в точке M по направлению единичного вектора $\vec{n}^0$; наибольшую плотность циркуляции в точке M .

1. $\vec{a} = (3x + z)\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (x^2 + y)\vec{k}$, $M(0, 1, 2)$, $\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{18}}(-\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k})$.
2. $\vec{a} = (3x^2 + yz)\vec{i} + (y + xz^3)\vec{j} + (3x + y)\vec{k}$, $M(1, 1, -1)$, $\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{26}}(-3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k})$.
3. $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} + (x^2 + z^2)\vec{k}$, $M(1, 2, 3)$, $\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{29}}(2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k})$.
4. $\vec{a} = (x - 3z)\vec{i} + (3y - z^2)\vec{j} + (x^3 + y)\vec{k}$, $M(1, 1, -1)$, $\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{21}}(-\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k})$.
5. $\vec{a} = 3z^3\vec{i} + y^3\vec{j} + x^3\vec{k}$, $M(1, 2, -1)$, $\vec{n}^0 = \frac{1}{7}(-3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k})$.
6. $\vec{a} = (y^3 - 8yz - z)\vec{i} + (yz - x^3 + 2x)\vec{j} + (yx^3 - 2z^3)\vec{k}$, $M(1, 0, 2)$,
 $\vec{n}^0 = \frac{1}{3}(-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$.
7. $\vec{a} = (3x^2yz + 2z)\vec{i} + (y^3 - 2xz)\vec{j} + (zx^3 + y)\vec{k}$, $M(1, -1, -1)$, $\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{11}}(\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k})$.
8. $\vec{a} = (xy^3 + yz)\vec{i} + (3y^2 - 2xz + y)\vec{j} + (4xz + xyz + 2y^3)\vec{k}$, $M(3, 0, 2)$,
 $\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$.

$$9. \vec{a} = (4xyz + z^2)\vec{i} + (3xz^3 - y - 2z)\vec{j} + (x^2z + y)\vec{k}, M(1, 0, 0),$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{7}(-3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}).$$

$$10. \vec{a} = (x^3y + 2yz - y^2)\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (x^3yz - 5y)\vec{k}, M(1, 0, -2),$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{3}(\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}).$$

$$11. \vec{a} = (2y - 3xz^2)\vec{i} - (2xz - 3y^3)\vec{j} + (y^2 - 3x^2)\vec{k}, M(1, 2, -1),$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}).$$

$$12. \vec{a} = (1 + 2xyz)\vec{i} - y^2z\vec{j} + (yz^2 - 2yz + 1)\vec{k}, M(1, 1, 1), \vec{n}^0 = \frac{1}{7}(-6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}).$$

$$13. \vec{a} = (3x^2y + z)\vec{i} - (x^2yz + 3y - 2z)\vec{j} + (x + y^2)\vec{k}, M(3, 1, -1),$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{3}(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}).$$

$$14. \vec{a} = (5xy^3 - 3y + z)\vec{i} + (2x^2y - 2z)\vec{j} + (xz^3 + y)\vec{k}, M(1, 1, -1),$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{3}(-\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}).$$

$$15. \vec{a} = (y - x)\vec{i} + (2xy - y)\vec{j} + (xyz + 5y)\vec{k}, M(1, -1, -1), \vec{n}^0 = \frac{1}{7}(3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}).$$

$$16. \vec{a} = (xy^3 + 4z)\vec{i} + (z^2y - 2z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}, M(-1, 1, 1), \vec{n}^0 = \frac{1}{5}(3\vec{j} - 4\vec{k}).$$

$$17. \vec{a} = (5xyz - 7z)\vec{i} + (x^2y - 2z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}, M(1, -1, 1), \vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{30}}(5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}).$$

$$18. \vec{a} = (5xy - y^2z)\vec{i} + (y - 2x^3z)\vec{j} + (3x^2z + y)\vec{k}, M(1, 2, 0), \vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{11}}(\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}).$$

$$19. \vec{a} = (4x - 3xz)\vec{i} + (7y - 2yz)\vec{j} + (x - 3y)\vec{k}, M(0, 2, 1), \vec{n}^0 = \frac{1}{7}(6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}).$$

$$20. \vec{a} = (xyz - 3z)\vec{i} + (x^3 + yz^2 - 2z)\vec{j} + (4xz + y)\vec{k}, M(1, -1, 1),$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}).$$

$$21. \vec{a} = (2xz - 3yz)\vec{i} + (y^3 - 2xz)\vec{j} - (3x + y)\vec{k}, M(1, 2, 0), \quad \vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}(\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}).$$

$$22. \vec{a} = (3xy^2 - 4z)\vec{i} + (2xy - 3yz)\vec{j} + (x - zy)\vec{k}, M(-1, 1, -1),$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{7}(-6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}).$$

$$23. \vec{a} = (3x + 5y - z)\vec{i} + (2y^2 - 5xz)\vec{j} + (3x^3 + y)\vec{k}, M(-1, 1, -1),$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{3}(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}).$$

$$24. \vec{a} = (6xyz - z)\vec{i} + (2xy + 3y - 2z)\vec{j} + (5xy + yz)\vec{k}, M(2, -1, 1),$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}).$$

$$25. \vec{a} = (x + 4yz - 3xz)\vec{i} + (y^3 - x + 2yz)\vec{j} + (4x^3 - zy)\vec{k}, M(-1, 1, 2),$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{3}(-2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}).$$

Библиографический список

1. Краснов М.Л. Векторный анализ / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1978. – 160 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2ч.]. Ч.2 / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 256 с.
3. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа / П.И. Романовский. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
4. Кручкович Г.И. Сборник задач по курсу высшей математики./ под ред. Г.И. Кручковича. – М.: Высшая школа, 1973. – 576 с.
5. Гурский Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: [в 2ч.]. Ч.2 / Е.И. Гурский, В.П. Домашов, В.К.Кравцов, А.П. Сильванович. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 400 с.