

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический
университет

кафедра Информационных систем



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для практических занятий по дисциплине
**« Системный анализ и проектирование
компьютерных информационных систем»**
для студентов дневной и заочной формы обучения
по специальности 6.050101
**«Информационные управляющие системы и
технологии»**
Часть II

Севастополь
2014

УДК 519.6

Системный анализ и проектирование компьютерных информационных систем. Методические указания к выполнению практических работ по дисциплине «Системный анализ и проектирование КИС»/ Сост. Первухина Е.Л., Рябовая В.О. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2014. – 50 с.

Основная цель пособия - получение практических навыков анализа информационных систем и комплексов, способов получения количественных информационных оценок для информационных расчетов систем; изучение основных закономерностей системотехники; моделирование информационных процессов.

Методические указания предназначены для студентов специальности 7.05010101 дневной и заочной форм обучения.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных систем (протокол № от 31.01. 2014 г.)

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Шушляпин Е.А., д.т.н., проф. каф. технической кибернетики СевНТУ.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Раскрытие неопределенностей в задачах системного анализа.....	4
1.1 Контрольные задания.....	13
2. Определение функциональных закономерностей по дискретной выборке.....	14
2.1 Контрольные задания.....	28
3. Информационный анализ системных задач.....	28
3.1 Показатели информированности.....	28
3.2 Формализация показателя своевременности.....	32
3.3 Формализация показателя достоверности.....	35
3.4 Задачи распознавания критических и катастрофических ситуаций при измерении характеристик информативности ЛПР.....	37
4. Определение допустимого времени на принятие решений.....	44
4.1 Контрольные задания.....	48
Библиографический список.....	49

1 РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Наиболее распространенными на практике являются неопределенности целей, ситуаций, конфликтов.

Неопределенность целей – неопределенность выбора целей в многокритериальных задачах принятия решений.

Неопределенность знаний о возможных ситуациях - неопределенность выбора целей в процессе практической деятельности (ситуационная неопределенность).

Неопределенность конфликтов - неопределенность выбора целей замыслов и планов в процессе взаимодействий партнеров и противодействий конкурентов или противников (информационная неопределенность конфликтов)

Рассмотрим задачи раскрытия неопределенности целей.

В общем случае при исследовании целостного объекта возникает необходимость в согласовании его целей. При этом для одних целей оптимальные решения соответствуют минимуму значения соответствующего критерия, а для других - максимуму. Но с помощью определенной замены переменных эти задачи легко сводятся к единому типу критериев и к единому типу задач оптимизации. Их можно рассматривать как задачу многокритериальной оптимизации

$$f_1(\bar{x}) \rightarrow \max_{x \in D}, f_2(\bar{x}) \rightarrow \max_{x \in D}, \dots, f_n(\bar{x}) \rightarrow \max_{x \in D} \quad (1.1)$$

Наилучшим решением задачи раскрытия неопределенности будет такое значение $\bar{x}$, при котором условия (1.1) выполняются одновременно для всех целевых функций. Однако на практике это не выполнимо, поскольку функции $f_k(\bar{x})$, $k=1,2,\dots,x$ являются различными по природе (в общем случае определяются критериями разной природы – различного физического, технического, экономического или другого содержания). Поэтому экстремум каждой функции достигается при своем значении $\bar{x}$ и практически невозможно найти такое

значение $\bar{x}^0$, при котором условия (1.1) выполняются одновременно для всех целевых функций. Отсюда следует вывод, что задача сводится к нахождению такого значения $\bar{x}^0$, при котором будет обеспечен рациональный компромисс заданных целей. Для нахождения рационального компромисса применяются два основных подхода.

Сущность первого подхода - исключить из анализа заведомо неприемлемые варианты решений.

Сущность второго – использовать приемы и способы приведения многоцелевой задачи к типовой задаче оптимизации с одним критерием и найти ее решение.

В основе первого подхода лежит идея, предложенная Парето: попытаться сократить множество исходных вариантов решений путем исключения из анализа таких вариантов, которые заведомо являются непригодными. Реализация этой идеи осуществляется следующим образом. Положим, что сделан некоторый выбор вектора $\bar{x}$, обозначим его значение $\bar{x}^*$. Делаем теперь некоторый другой выбор $\hat{x}$ такой, что для всех целевых функций

$$fi(\hat{x}) \geq fi(\bar{x}^*), i = \overline{1, m}, \quad (1.2)$$

причем, хотя бы одно из неравенств является строгим.

Все векторы со значением $\bar{x}^*$, для которых выполняется условие (1.2), следует исключить из данного анализа. Подвергать неформальному анализу, сопоставлять между собой следует те векторы $\bar{x}^*$, для которых не существует такого значения $\hat{x}$ (хотя бы для одной из заданных целевых функций) для которого выполняется неравенство (1.2).

Множество всех значений $\bar{x}^*$, для которых невозможно подобрать $\bar{x}$ из условия (1.2), называется множеством Парето, а вектор $\bar{x}^*$ называется не улучшаемым вектором результатов (вектор Парето). Рассмотрим более подробно подход к нахождению множества Парето.

Пусть известен вектор $\bar{f}$ целевых функций $f_i(\bar{x})$, заданных на множестве D , в виде

$$\bar{f} = \{f_i(\bar{x}) | i = \overline{1, m}; \bar{x} \in D\}, \quad D = \{\bar{x} | x^- \leq x \leq x^+\}.$$

Найдем такое множество Γ граничных значений $\bar{x}^* \in D$, которое делит исходное множество D на два множества: множество Π и множество $\bar{D}$. Это множество должно удовлетворять условию

$$\Pi \cup \bar{D} = D; \Pi \cap \bar{D} = \emptyset. \quad (1.3)$$

Множество Π состоит из таких значений $\bar{x}_{k_1} \in D$, для которых для всех $i = \overline{1, m}$ выполняется условие $f_i(\bar{x}_{k_1}) \geq f_i(\bar{x}^*)$.

Множество Π определяется соотношением

$$\Pi = \left\{ \bar{x} \mid \bar{x} = \bar{x}_{k_1}; \bar{x}_{k_1} \in D; f_i(\bar{x}_{k_1}) \geq f_i(\bar{x}^*); i = \overline{1, m} \right\}. \quad (1.4)$$

Множество $\bar{D}$ состоит из таких $\bar{x}_{k_2} \in D$, для которых хотя бы для одной функции $f_j(\bar{x}_{k_2})$ выполняется условие $f_j(\bar{x}_{k_2}) < f_j(\bar{x}^*)$. Множество $\bar{D}$ описывается следующим соотношением:

$$\bar{D} = \left\{ \bar{x} \mid \bar{x} = \bar{x}_{k_2}; \bar{x}_{k_2} \in D; f_j(\bar{x}_{k_2}) < f_j(\bar{x}^*); j = \overline{1, m} \right\}.$$

Таким образом, вектор $\bar{x}^* \in D$ является вектором не улучшаемых результатов, а множество Π , удовлетворяющее условию (1.4), является множеством Парето.

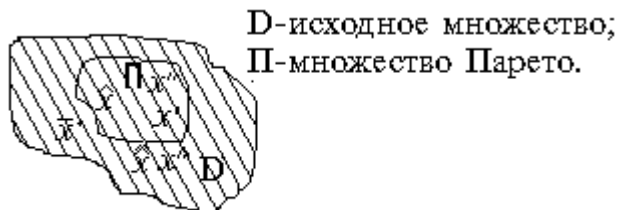


Рис. 1.1– Иллюстрация подхода к нахождению множества Парето

В силу условия (1.4) множество Γ является границей, которая выделяет множество Парето из множества D . В соответствии с (1.3) множество $\bar{D}$ является подмножеством исходного множества D , из которого выделено множество Парето Π и $\bar{D} = D \setminus \Pi$ (рис.1.1). Поэтому все варианты решений, которые принадлежат $\bar{D}$, исключаются из рассмотрения.

Пример 1

Требуется выделить множество Парето в области $D \in [0, x^+]$ (рис.1.2). Разобьем заданное множество D на три подмножества. Область D_1 - область x от 0 до x_1^0 , где x_1^0 - значение x , при котором $f_1(x)$ достигает максимума

$$f_1(x_1^0) = \max_{x \in D} f(x), \quad x \in [0, x_1^0].$$

Область D_2 - область x от x_1^0 до x_2^0 , где x_2^0 - такое значение x , при котором $f_2(x)$ достигает максимума

$$f_2(x_2^0) = \max_{x \in D} f_2(x), \quad x \in [x_1^0, x_2^0].$$

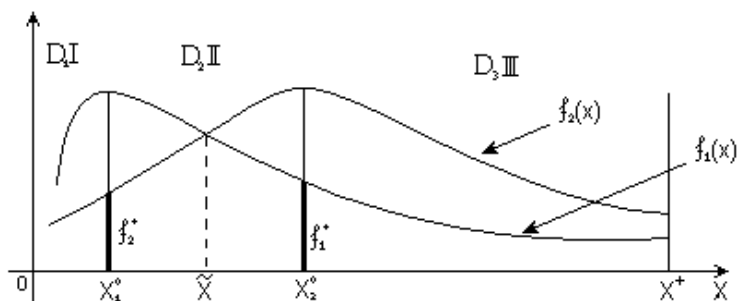


Рис. 1.2 – Выделение множества Парето

Область D_3 - область x от x_2^0 до x^+ .

Сравним области D_1 и D_2 .

Для них имеем $f_2(x)|_{x \in D_1} < f_2(x)|_{x \in D_2}$, т.е. значения функции $f_2(x)$ для любого $x \in D_1$ меньше, чем значения $f_2(x)$ для любого $x \in D_2$.

Для $f_1(x)$ имеем $f_1(x)|_{x \in D_1} \leq f_1(x)|_{x \in D_2}$, то есть в определенном интервале области D_1 значения $f_1(x)$ соизмеримы с ее значениями в определенном интервале области D_2 . Следовательно область D_1 заведомо уступает области D_2 в смысле целевой функции $f_2(x)$.

Аналогично, для области D_3 имеем значение функции $f_1(x)$ для любого $x \in D_3$ меньше, чем значение $f_1(x)$ для любого $x \in D_2$ $f_1(x)|_{x \in D_3} < f_1(x)|_{x \in D_2}$. Но для $f_2(x)$ имеем $f_2(x)|_{x \in D_3} \leq f_2(x)|_{x \in D_2}$, то есть значения $f_2(x)$ соизмеримы в определенном интервале области D_3 с ее значениями в определенном интервале области D_2 , следовательно область

D_3 заведомо уступает области D_2 в смысле целевой функции $f_1(x)$. Таким образом, из области D необходимо исключить области D_1 и D_3 , поскольку в них не выполняется условие (1.2). Область D_2 в соответствии с (1.2) является множеством Парето. Для данной области выполняются ограничения:

$$f_1(x)|_{x \in D_2} \geq f_1^+, \quad f_2(x)|_{x \in D_2} \geq f_2^+.$$

Однако Парето не позволяет выделить единственное решение. Он позволяет только сузить множество возможных альтернативных решений. В рассматриваемом примере рациональное решение необходимо искать в области D_2 .

Построение множества Парето позволяет получить дополнительную информацию, которая дает качественную оценку при сопоставлении различных вариантов.

Лицо принимающее решение (ЛПР) на основе анализа множества Парето может оценить, как увеличение одной целевой функции сказывается на изменении остальных.

Из рассмотренного примера следует, что в точке x_1^0 имеет максимум $f_1(x)$, но минимум $f_2(x)$, в точке x_2^0 достигается максимум $f_2(x)$ и минимум $f_1(x)$, в точке $\tilde{x}$ выполняется равенство $f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x})$.

Какой из этих вариантов является предпочтительным определяет ЛПР. Если ЛПР полагает, что критерии равнопредпочтительны, то рациональным является вариант $\tilde{x}$, когда $f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x})$. Если более важной является цель $f_1(x)$, то, очевидно, что рациональное решение лежит в интервале $[x_1^0, \tilde{x}]$. Если более важной является цель $f_2(x)$, то рациональное решение находится в интервале $(\tilde{x}, x_2^0]$. Однако, в двух последних случаях конкретная степень предпочтения одной цели над другой остается субъективной мерой ЛПР.

Количественно меру предпочтения целей принято характеризовать коэффициентом важности каждой из рассматриваемых целей.

Введение таких коэффициентов позволяет осуществить второй подход раскрытия неопределенности целей – **линейной свёртки**, основанный на сведении многоцелевой задачи к обычным задачам с одним критерием. В этом случае рациональный компромисс целей определяется выбором ЛПР коэффициентов важности.

Суть данного способа состоит в том, что вместо m заданных целей, описываемых функциями

$$f_i(x), i = \overline{1, m},$$

вводится одна обобщенная цель, которая описывается функцией вида

$$F(x) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot f_i(x). \quad (1.5)$$

Здесь $c_i, i = \overline{1, m}$ - коэффициенты важности исходных целей, отражающие меру предпочтения ЛПР. Обычно полагалось, что коэффициенты c_i нормированы тем или иным способом.

Как правило, применяется нормирование в форме

$$\sum_{i=1}^m c_i = 1 \quad (1.6)$$

Заметим, что для положительно определенных функций $f_i(x) > 0, i = \overline{1, m}$, что соответствует практическим задачам. Вместо аддитивной функции $F(x)$ можно использовать мультипликативную функцию $F_M(x)$ вида

$$F_M(x) = \prod_{i=1}^m (f_i(x))^{c_i}. \quad (1.7)$$

Прологарифмировав левую и правую части равенства (1.7) и введя обозначение

$$\lg F_M(x) = \hat{f}(x), \quad \lg f_i(x) = \hat{f}_i(x),$$

приходим к выражению аддитивного вида $\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^m c_i \hat{f}_i(x)$.

В результате свертки (1.5), (1.7) задача раскрытия неопределенности целей, представленная в виде многоцелевой задачи оптимизации $f_i(x) \rightarrow \max$, $i = \overline{1, m}$ и сводится к одноцелевой стандартной задаче математического программирования $F(x) \rightarrow \max$ при наличии ограничений, определяемых исходными данными или техническим заданием.

Для решения реальных задач необходимо учитывать следующие принципиальные недостатки: выбор коэффициентов важности C_i является в значительной степени субъективным и, следовательно, не исключены принципиальные ошибки и просчеты при их выборе; решение оптимизационной задачи для $F(x)$ не означает, что достигнуты рациональные значения для всех заданных целей. В свертках (1.5) и (1.7) недостаточное значение одной целевой функции может компенсироваться за счет увеличения значений другой целевой функции.

Изменяя значения коэффициентов важности, можно получить серию различных значений X , для которых функция $F(x)$ имеет одно и то же значение.

Следовательно, неопределенность целей в такой постановке задачи не разрешается в необходимой для практики степени, т.к. свертка не дает однозначного рационального варианта значений X .

Неоднородность целей сводится к неоднородности коэффициентов важности, т.к. решение получаемой одноцелевой задачи является многозначным, определяемым, в лучшем случае, множеством Парето.

Пример 2

Найти область Парето и определить условия рационального компромисса для заданных целевых функций

$$f_1(x) = 10 + 5x + 7x^2,$$

$$f_2(x) = 35 - 10x, \quad x \in [0; 2]$$

при следующих ограничениях

$$f_1(x) \geq f_1^*, \quad f_2(x) \geq f_2^*; \quad f_1^* = 22, \quad f_2^* = 20.$$

Решение.

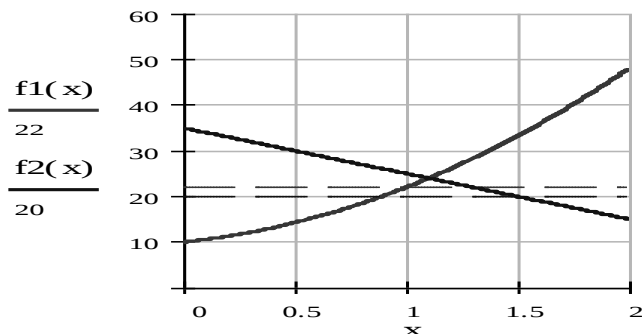


Рис.1.3 – Определение множества Парето

Вначале определим множество Парето на интервале $[x^-, x^+]$ (рис.1.3), где выполняются неравенства

$$\frac{f_1(x)}{22} \geq 1; \quad \frac{f_2(x)}{20} \geq 1, \quad \text{или} \quad 7x^2 + 5x + 10 \geq 22; \quad 35 - 10x \geq 20. \quad (1.8)$$

Аналитическое решение системы неравенств (1.8) показывает, что искомое множество Парето находится в интервале $x \in [1; 1.5]$ (рис.1.3).

Для сужения области Парето и сведения исходной двухкритериальной задачи к однокритериальной воспользуемся техническими ограничениями, основанными на принципах

$$\begin{array}{ll} \min_x \max_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} & \max_x \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} \\ \text{минимакса} & \text{и максимина} \end{array}.$$

Значения отношений $\frac{f_1(x)}{f_1^*}$ и $\frac{f_2(x)}{f_2^*}$ на интервале $x \in [1; 1.5]$ с шагом сетки 0.1 приведены в табл. 1

Таблица 5.1 – Значения отношений $\frac{f_1(x)}{f_1^*}$ и $\frac{f_2(x)}{f_2^*}$

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\frac{f_1(x)}{f_1^*}$	1	1.089	1.185	1.288	1.396	1.511
$\frac{f_2(x)}{f_2^*}$	1.25	1.2	1.15	1.1	1.05	1

Из таблицы видно, что в точке $x=1,2$ выполняются условия

$$\max_x \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} = \min_x \max_i \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

Таким образом, в качестве рационального компромисса для двух исследуемых функций следует выбирать стратегию $x=1,2$.

1.1 Контрольные задания

1. Найти область Парето и определить условия рационального компромисса для заданных целевых функций

$$f_1(x) = 18 + x + 4x^2,$$

$$f_2(x) = 39 - 5x,$$

при следующих ограничениях

$$f_1(x) \geq f_1^*, \quad f_2(x) \geq f_2^*; \quad f_1^* = 22, \quad f_2^* = 20.$$

(Шаг сетки брать равным 0.5)

2. Найти область Парето и определить условия рационального компромисса для заданных целевых функций

$$f_1(x) = 1 + 5x + 14x^2,$$

$$f_2(x) = 40x,$$

при следующих ограничениях

$$f_1(x) \geq f_1^*, \quad f_2(x) \geq f_2^*; \quad f_1^* = 20, \quad f_2^* = 22. \quad (\text{Шаг сетки} - 0.5)$$

3. Найти область Парето и определить условия рационального компромисса для заданных целевых функций

$$f_1(x) = 24 + x + 3x^2,$$

$$f_2(x) = 30 - 2x,$$

при следующих ограничениях

$$f_1(x) \geq f_1^*, \quad f_2(x) \geq f_2^*; \quad f_1^* = 26, \quad f_2^* = 28. \text{ (Шаг сетки} - 0.5)$$

4. Найти область Парето и определить условия рационального компромисса для заданных целевых функций

$$f_1(x) = 2 + 7x + 15x^2,$$

$$f_2(x) = 32x,$$

при следующих ограничениях

$$f_1(x) \geq f_1^*, \quad f_2(x) \geq f_2^*; \quad f_1^* = 22, \quad f_2^* = 30. \text{ (Шаг сетки} - 0.3)$$

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ПО ДИСКРЕТНОЙ ВЫБОРКЕ

Выборка – часть объектов из генеральной совокупности, отобранных для изучения, с тем чтобы сделать заключение обо всей генеральной совокупности.

Генеральная совокупность – это всё множество объектов, обладающих определенным набором признаков (пол, возраст, доход, численность, оборот и т.д.), входящих в предмет изучения в соответствии с программой исследования.

Репрезентативность – свойство выборки воспроизводить характеристики генеральной совокупности.

Характеристики выборки:

- *Качественная характеристика выборки* – кого именно выбирают и как способы построения выборки для этого используют.
- *Количественная характеристика выборки* – сколько человек выбирается, другими словами объём выборки.

Объем выборки определяется четырьмя факторами:

- 1) Число групп и подгрупп, анализ которых следует провести.
- 2) Ценность информации, которую должно предоставить исследование, и требуемая точность результатов.
- 3) Стоимость выборки: следует провести анализ затрат и выгод. Если стоимость выборки низка, оправдано формирование большей по объему выборки.
- 4) Разброс значений совокупности. Если все члены совокупности придерживаются единого мнения, вполне достаточно выборки из одного человека. По мере возрастания разброса мнения должен увеличиваться и объем выборки.

Ошибка выборки - отклонение результатов, полученных с помощью выборочного наблюдения от истинных данных генеральной совокупности. Ошибка выборки бывает двух видов – статистическая и систематическая.

Статистическая ошибка зависит от размера выборки. Чем больше размер выборки, тем она ниже. Например: Для простой случайной выборки размером 400 единиц максимальная статистическая ошибка (с 95% доверительной вероятностью) составляет 5%, для выборки в 600 единиц – 4%, для выборки в 1100 единиц – 3%. Обычно, когда говорят об ошибке выборки, подразумевают именно статистическую ошибку.

Систематическая ошибка зависит от организации выборочного обследования. Например: использование любых вероятностных выборок занижает долю людей с высоким доходом, ведущих активный образ жизни. Происходит это в силу того, что таких людей гораздо сложнее застать в каком-либо определенном месте (например, дома).

Способы построения выборки

1. Рандомизация, или случайный отбор, используется для создания простых случайных выборок (каждый член популяции с равной вероятностью может попасть в выборку).

2. Парный отбор — стратегия построения групп выборки, при котором группы испытуемых состоят из субъектов, эквивалентных по значимым для эксперимента побочным параметрам.
3. Многоступенчатый способ построения выборки. Выборка строится в несколько этапов, причём на каждой стадии меняется единица отбора.
4. Многофазный способ построения выборки — из сформированной выборки большего объёма производится новая выборка меньшего объёма, при этом, единица отбора остаётся одной и той же.
5. Комбинированный способ построения выборки — соединение в многоступенчатой выборке различных приёмов отбора.

При систематизации данных выборочных исследований используются статистические дискретные и интервальные ряды распределения.

Статистическое дискретное распределение. Полигон.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 — n_2 раз, ..., x_k — n_k раз. Объём выборки

$$\sum_{i=0}^k n_i = n \quad (2.1)$$

Наблюдаемые значения x_i называют *вариантами*, а последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке — *вариационным рядом*. Число наблюдений варианты называют *частотой*, а ее отношение к объёму выборки — *относительной частотой*

$$\omega_i = \frac{n_i}{n} \quad (2.2)$$

Статистическим (эмпирическим) законом распределения выборки (статистическим распределением выборки) называют

последовательность вариант x_i и соответствующих им частот n_i или относительных частот ω_i .

Статистическое распределение выборки удобно представлять в форме таблицы распределения частот, называемой статистическим дискретным рядом распределения (таблица 2.1). При этом, сумма всех частот равна объему

$$\sum_{i=0}^m n_i = n$$

выборки

Таблица 2.1 – Статистический дискретный ряд распределения

x_1	x_2	$\dots$	x_m
n_1	n_2	$\dots$	n_m

Также статистическое распределение выборки можно представить в виде таблицы распределения относительных частот (таблица 2.2). При этом, сумма всех относительных

$$\sum_{i=0}^m \omega_i = 1$$

частот равна единице .

Таблица 2.2 – Статистический дискретный ряд распределения (относительные частоты)

x_1	x_2	$\dots$	x_m
ω_1	ω_2	$\dots$	ω_m

Пример 1

При измерениях в однородных группах обследуемых получены следующие выборки: 71, 72, 74, 70, 70, 72, 71, 74, 71, 72, 71, 73, 72, 72, 72, 74, 72, 73, 72, 74 (частота пульса). Составить по этим результатам статистический дискретный ряд распределения частот и относительных частот.

Решение.

1) Расположив приведенные выше данные в порядке возрастания и сгруппировав их так, что в каждой

отдельной группе значения случайной величины будут одинаковы, получают **ранжированный ряд** данных наблюдения:

x_i	70	71	72	73	74
n_i	2	4	8	2	4

Рассчитываются частоты для каждого варианта.

2) Объем выборки: $n = 2 + 4 + 8 + 2 + 4 = 20$.

Находят относительные частоты. Для этого разделяют частоты на объем выборки

$$\omega_i = \frac{n_i}{n} ; \quad \omega_5 = \frac{4}{20} = 0.2$$

Распределение относительных частот:

x_i	70	71	72	73	74
ω_i	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2

Проверка: $0.1+0.2+0.4+0.1+0.2 = 1$.

Полигон частот - ломаная, отрезки, которой соединяют точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$. Для построения полигона частот на оси X откладывают варианты x_i , а на оси Y – соответствующие им частоты n_i . Точки (x_i, n_i) соединяют отрезками и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот строится таким же образом, а вместо частот n_i откладывают относительные частоты ω_i .

Пример 2

Используя дискретный статистический ряд распределения, составленный в примере 1, построить полигон частот и полигон относительных частот. Решение – рисунок 2.1.

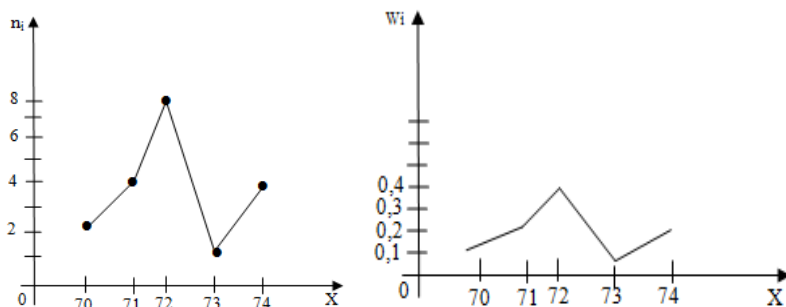


Рисунок 2.1 – Полигон частот и полигон относительных частот

Восстановление функциональных закономерностей по дискретной выборке

Пусть необходимо решить задачу восстановления функций $y_i(x_1, x_2, x_3), i = \overline{1,4}$ по заданным дискретным значениям $X_s, s = \overline{1,3}$ и $Y_i, i = \overline{1,4}$ выборки, приведенной в табл. 2.3. Размерности векторов X_1, X_2, X_3 соответственно $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3$; объем выборки $q_0 = \overline{1,45}$; количество функций $m = 4$.

Таблица 2.3 – Выборка исходных данных $X_1[X_{11}, X_{12}], X_2[X_{21}, X_{22}], X_3[X_{31}, X_{32}, X_{33}]$ и $Y[X_1, X_2, X_3], i = \overline{1,4}$

q_0	X_{11}	X_{12}	X_{21}	X_{22}	X_{31}	X_{32}	X_{33}	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
1	5,05 0	2,01 5	7,05 0	8,01 5	10,00 0	1,000	5,100	254,62 1	98,145	119,40 6	117,68 3
2	5,15 0	2,10 0	7,15 0	9,10 9	15,80 0	2,100	4,200	198,16 3	73,368	92,651	90,123
3	5,20 0	2,12 0	7,19 2	9,12 5	22,50 0	2,500	3,500	187,41 1	71,084	87,691	83,576
4	5,25 0	2,17 0	7,25 0	9,17 5	25,00 0	3,510	2,720	167,19 7	63,567	78,793	74,789
5	5,32 5	2,20 0	7,32 5	9,19 8	32,50 0	4,200	2,530	166,54 7	63,813	79,497	74,316
6	5,35 0	2,25 0	7,35 0	9,25 1	35,00 0	5,020	2,100	153,78 9	61,378	77,082	72,817
7	5,40 0	2,40 0	7,41 1	9,39 5	40,70 0	8,200	1,150	110,92 6	55,579	67,758	77,425
8	5,50 0	2,50 0	7,50 5	9,49 8	51,80 0	10,10 0	0,720	151,38 1	60,432	71,956	89,519
9	5,60 0	2,60 0	7,61 0	9,59 8	65,00 0	12,80 0	0,540	187,36 4	76,283	91,123	121,37 4

10	5,700	2,700	7,695	9,699	72,000	14,400	0,120	236,123	93,657	112,859	149,173
11	5,750	2,750	7,750	9,748	75,400	14,700	1,250	292,341	118,624	153,717	184,136
12	5,800	2,775	7,804	9,775	82,800	15,500	1,760	288,324	114,324	117,965	179,152
13	5,850	2,800	7,850	9,798	85,000	16,300	2,230	326,939	128,926	155,912	201,239
14	5,907	2,850	8,050	9,850	90,780	16,700	2,610	377,128	148,675	169,359	225,482
15	5,910	2,855	7,910	9,855	91,000	16,900	4,160	405,327	159,367	192,924	240,976
16	5,925	2,865	7,925	9,865	92,500	17,500	5,250	458,386	180,567	218,549	275,846
17	5,929	2,885	8,011	9,875	92,900	17,700	6,370	518,859	183,932	247,354	316,124
18	5,933	2,915	7,933	9,899	93,500	18,200	7,260	595,737	235,124	316,375	363,928
19	5,935	2,950	7,935	9,951	94,580	19,100	7,510	506,168	261,946	341,326	403,153
20	5,950	2,975	7,950	9,975	95,400	19,500	7,740	685,761	281,387	341,326	431,195
21	5,010	1,995	6,950	9,015	11,500	21,000	8,140	790,639	310,519	375,651	471,588
22	5,050	2,975	7,108	9,975	10,500	19,560	8,350	723,784	285,142	344,856	436,847
23	5,150	2,950	7,151	9,950	15,800	19,300	8,580	731,438	288,125	348,314	441,842
24	5,200	2,900	7,204	9,915	21,500	18,700	8,740	721,321	283,435	344,716	439,425
25	5,250	2,875	7,248	9,875	26,400	17,560	8,850	691,845	272,834	329,942	422,147
26	5,325	2,865	7,325	9,865	32,500	17,100	9,210	708,614	280,562	349,316	435,954
27	5,350	2,855	7,351	9,855	35,300	16,700	9,520	729,956	287,987	348,231	450,492
28	5,400	2,850	7,408	9,850	41,700	16,200	9,750	730,129	288,951	347,987	454,897
29	5,500	2,775	7,495	9,775	50,200	15,700	10,100	717,152	285,494	342,967	458,289
30	5,600	2,750	7,607	9,750	62,700	15,360	0,100	278,654	111,209	132,856	172,164
31	5,700	2,710	7,697	9,697	69,800	14,700	1,150	242,145	96,197	115,632	153,356
32	5,750	2,603	7,750	9,605	75,100	13,340	1,360	186,243	77,325	93,135	127,168
33	5,800	2,495	7,798	9,495	80,520	11,720	1,750	162,345	64,615	77,824	106,123
34	5,850	2,394	7,850	9,415	85,200	8,900	2,130	132,879	52,534	63,453	82,659
35	5,907	2,245	7,913	9,255	90,760	7,740	2,570	167,156	65,178	79,167	93,834
36	5,910	2,192	7,910	9,205	91,100	6,360	2,750	170,531	66,176	80,836	91,345

3 7	5,92 5	2,17 5	7,92 5	9,17 5	92,50 0	5,700	3,260	184,24 3	70,364	87,192	96,841
3 8	5,92 9	2,12 5	7,92 9	9,12 5	92,90 0	3,750	3,790	181,95 6	70,428	85,834	93,952
3 9	6,01 0	2,10 5	7,93 3	9,09 1	93,30 0	3,650	4,120	216,82 9	83,475	101,98 5	109,46 3
4 0	5,93 5	2,01 0	7,93 5	8,98 5	94,50 0	3,520	4,360	273,32 9	104,92 4	128,59 1	133,41 5
4 1	5,95 0	2,11 0	7,95 0	9,11 5	98,60 0	2,720	3,850	219,42 1	84,183	102,86 1	108,61 3
4 2	5,02 0	2,11 5	6,99 5	9,11 5	110,0 0	2,340	2,340	225,35 6	86,324	105,81 7	107,31 9
4 3	6,05 0	2,12 8	7,95 0	9,12 9	95,26 0	2,560	1,680	176,57 8	66,457	78,473	82,263
4 4	5,93 5	2,13 1	7,93 5	9,13 0	93,52 0	2,760	1,320	170,94 8	65,814	81,417	84,132
4 5	5,92 5	2,13 5	7,92 5	9,13 5	92,80 0	2,980	1,160	168,33 4	64,549	78,653	81,953

Функции приближения $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1, m}$, которые с практически приемлемой погрешностью в смысле чебышевского приближения характеризуют реальные функциональные зависимости $y_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1, m}$, находят на основе последовательности моделей:

$$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 \rightarrow \Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \Phi_{i3} \rightarrow \Phi_i.$$

Приведем результаты формирования этих моделей.

Формирование функций Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 сводится к чебышевской задаче приближения для системы уравнений $F_{il}(\hat{X}[q_0]) - b_{q0} = 0$, $q = \overline{1, k}$.

$$F_{il}(\hat{X}[q_0]) = \sum_{j1=1}^{n1} \sum_{p1=0}^{Pj1} X_{j1p1} T_{p1}^*(\hat{X}_{1j1}[q_1]) + \sum_{j2=1}^{n2} \sum_{p2=0}^{Pj2} X_{j2p2} T_{p2}^*(\hat{X}_{2j2}[q_2]) + \sum_{j3=1}^{n3} \sum_{p3=0}^{Pj3} X_{j3p3} T_{p3}^*(\hat{X}_{3j3}[q_3])$$

T_{pi}^* - смещенные полиномы Чебышева.

$$b_{q0} = \frac{\{\max \dots + \min\}}{2}; q_0 = \overline{1, k_0}$$

$\hat{X}_{1j1}[q_1], \hat{X}_{2j2}[q_2], \hat{X}_{3j3}[q_3]$ - значения величин $X_{1j1}[q_1]$,

$X_{2j2}[q_2], X_{3j3}[q_3]$, нормированных по отрезку $[0; 1]$.

Решение системы состоит в определении матриц $\|\lambda_{j^1 p^1}^0\|$, $\|\lambda_{j^2 p^2}^0\|$, $\|\lambda_{j^3 p^3}^0\|$, которые с учетом максимальной невязки $\Delta_\lambda = \max_{q_0 \in [1, k_0]} \left| F_1(\hat{X}[q_0]) - b_{q_0} \right|$, принятой за меру чебышевского приближения системы, обеспечивают наилучшее приближение $\Delta_\lambda^0 = \min_{\|\lambda\|} \Delta_\lambda$.

Значение наилучшего приближения исходных матриц характеризуется значениями:

$$\Delta_\lambda^0 = \min_{\|\lambda\|} \max_{q_0 \in [1, k_0]} \left| F_1(\hat{X}[q_0]) - b_{q_0} \right|$$

$$\lambda_0 = \arg \min_{\|\lambda\|} \max_{q_0 \in [1, k_0]} \left| F_1(\hat{X}[q_0]) - b_{q_0} \right|.$$

Где $\|\lambda^0\| = \langle \|\lambda_{j^1 p^1}^0\|, \|\lambda_{j^2 p^2}^0\|, \|\lambda_{j^3 p^3}^0\| \rangle$. Для λ точно также.

На основании формулы: $\Psi_{s j[s]}(x_{j[s]}) = \sum_{p[s]=0}^{p[s]} \lambda_{j[s] p[s]}^0 T_{p[s]}^*(x_s)$
 $j[s]), \quad s = \overline{1,3}$ для $\Psi_{s j_x}(x_{j_x}), s = \overline{1,3}, j_1 = 1; 2, j_2 = 1; 2,$
 $j_3 = \overline{1,3}$ получим такие соотношения.

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(x_{11}) &= 0,171 T_0^*(x_{11}) - 0,108 T_1^*(x_{11}) - 0,089 T_2^*(x_{11}); \\ \Psi_{12}(x_{12}) &= 0,171 T_0^*(x_{12}) - 0,278 T_1^*(x_{12}) - 0,379 T_2^*(x_{12}); \\ \Psi_{21}(x_{21}) &= 0,123 T_0^*(x_{21}) - 0,257 T_1^*(x_{21}) + 0,204 T_2^*(x_{21}); \\ \Psi_{22}(x_{22}) &= 0,123 T_0^*(x_{22}) + 0,434 T_1^*(x_{22}) + 0,175 T_2^*(x_{22}); \\ \Psi_{31}(x_{31}) &= 0,150 T_0^*(x_{31}) + 0,025 T_1^*(x_{31}) + 0,018 T_2^*(x_{31}); \\ \Psi_{32}(x_{32}) &= 0,150 T_0^*(x_{32}) + 0,238 T_1^*(x_{32}) + 0,113 T_2^*(x_{32}); \\ \Psi_{33}(x_{33}) &= 0,150 T_0^*(x_{33}) + 0,355 T_1^*(x_{33}) + 0,117 T_2^*(x_{33}). \end{aligned}$$

Далее определим матрицы $\|a_{ij1}^{(1)}\|$, $\|a_{ij2}^{(2)}\|$, $\|a_{ij3}^{(3)}\| \forall i \in [1, m]$.

Имеем систему уравнений:

$$F_{i21}(\hat{X}_1[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0] = 0; F_{i22}(\hat{X}_2[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0] = 0;$$

$$F_{i23}(\hat{X}_3[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0] = 0.$$

$$F_{i21}(\hat{X}_1[q_0]) = \sum_{j1=1}^{n1} a_{ij1}^{(1)} \Psi_{1j1}(\hat{X}_{1j1}[q_1])$$

$$F_{i22}(\hat{X}_2[q_0]) = \sum_{j2=1}^{n1} a_{ij2}^{(2)} \Psi_{2j2}(\hat{X}_{2j2}[q_2])$$

$$F_{i23}(\hat{X}_3[q_0]) = \sum_{j3=1}^{n3} a_{ij3}^{(3)} \Psi_{3j3}(\hat{X}_{3j3}[q_3])$$

Решение систем уравнений состоит в нахождении матриц

$$\|a_s^0\| = \left\| a_{ijs}^{(s)} \right\|, \quad s = \overline{1,3}, \quad \text{которые для максимальной невязки}$$

$$\Delta_{a_s} = \max_{q0 \in [1, k0]} \left| F_{i2s}(\hat{X}_s[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0] \right|, \quad \text{принятой за меру}$$

Чебышевского приближения системы уравнений, обеспечивают

$$\text{наилучшее приближение} \quad \Delta_s^0 = \min_{|a_s|} \Delta_{a_s}.$$

Значения наилучшего приближения матриц характеризуются отношениями:

$$\Delta_1^0 = \min_{|a_1|} \max_{q0 \in [1, k0]} \left| F_{i21}(\hat{X}_1[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0] \right|$$

$$\|a_1^0\| = \arg \min_{|a_1|} \max_{q0 \in [1, k0]} \left| F_{i21}(\hat{X}_1[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0] \right|$$

И т.д. для $s = 1..3$

$$\hat{X}_{1j1}[q_0] = \left\langle \hat{X}_{1j1}[q_1] \mid j_1 = \overline{1, n}, q_1 \in [1, k_1] \right\rangle$$

$$\hat{X}_2[q_0] = \left\langle \hat{X}_{2j2}[q_2] \mid j_2 = \overline{1, n}, q_2 \in [1, k_2] \right\rangle$$

$$\hat{X}_3[q_0] = \left\langle \hat{X}_{3j3}[q_3] \mid j_3 = \overline{1, n}, q_3 \in [1, k_3] \right\rangle$$

$$q_0 \Leftrightarrow \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$$

$$\Phi_{i1}(x_1) = \sum_{j1=1}^{n1} a_{ij1}^{(1)} \Psi_{1j1}(x_{1j1})$$

$$\Phi_{i2}(x_2) = \sum_{j2=1}^{n2} a_{ij2}^{(2)} \Psi_{2j2}(x_{2j2})$$

$$\Phi_{i3}(x_3) = \sum_{j3=1}^{n3} a_{ij3}^{(3)} \Psi_{3j3}(x_{3j3})$$

Таким образом, для Φ_{is} , $i = \overline{1, 4}$; $s = \overline{1, 3}$ имеем

$$\Phi_{11}(x_1) = 1,073 \Psi_{11}(x_{11}) + 0,962 \Psi_{12}(x_{12});$$

$$\Phi_{21}(x_1) = 0,957 \Psi_{11}(x_{11}) + 1,018 \Psi_{12}(x_{12});$$

$$\Phi_{31}(x_1) = 0,964 \Psi_{11}(x_{11}) + 1,018 \Psi_{12}(x_{12});$$

$$\Phi_{41}(x_1) = 0,960 \Psi_{11}(x_{11}) + 1,048 \Psi_{12}(x_{12});$$

$$\Phi_{12}(x_2) = 1,040 \Psi_{21}(x_{21}) + 0,989 \Psi_{22}(x_{22});$$

$$\Phi_{22}(x_2) = 1,012 \Psi_{21}(x_{21}) + 0,991 \Psi_{22}(x_{22});$$

$$\Phi_{32}(x_2) = 1,025 \Psi_{21}(x_{21}) + 0,994 \Psi_{22}(x_{22});$$

$$\Phi_{42}(x_2) = 0,940 \Psi_{21}(x_{21}) + 1,038 \Psi_{22}(x_{22});$$

$$\Phi_{13}(x_3) = 1,158 \Psi_{31}(x_{31}) + 0,925 \Psi_{32}(x_{32}) + 0,960 \Psi_{33}(x_{33});$$

$$\Phi_{23}(x_3) = 0,946 \Psi_{31}(x_{31}) + 1,031 \Psi_{32}(x_{32}) + 0,983 \Psi_{33}(x_{33});$$

$$\Phi_{33}(x_3) = 0,971 \Psi_{31}(x_{31}) + 1,014 \Psi_{32}(x_{32}) + 0,999 \Psi_{33}(x_{33});$$

$$\Phi_{43}(x_3) = 0,858 \Psi_{31}(x_{31}) + 1,156 \Psi_{32}(x_{32}) + 0,981 \Psi_{33}(x_{33}).$$

Конечный результат формирования функций приближения

$\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1, 4}$ получим агрегированием соответствующих решений

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = c_{i1}^0 \Phi_{i1}(x_1) + c_{i2}^0 \Phi_{i2}(x_2) + c_{i3}^0 \Phi_{i3}(x_3), i = \overline{1, m}$$

Матрицы c_{is}^0 вычисляются следующим образом:

$$\|c^0\| = \arg \min_{\|c\|} \max_{i \in [1, m]} |F_{i3}(\hat{X}[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0]|$$

$$\|c^0\| = \langle \|c_{i1}^0\|, \|c_{i2}^0\|, \|c_{i3}^0\| \rangle$$

Таким образом, для рассматриваемого примера получим:

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = 0,073 \Phi_{11}(x_1) - 0,022 \Phi_{12}(x_2) + 0,953 \Phi_{13}(x_3);$$

$$\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 0,120 \Phi_{21}(x_1) - 0,078 \Phi_{22}(x_2) + 0,959 \Phi_{23}(x_3);$$

$$\Phi_3(x_1, x_2, x_3) = 0,127 \Phi_{31}(x_1) - 0,081 \Phi_{32}(x_2) + 0,954 \Phi_{33}(x_3);$$

$$\Phi_4(x_1, x_2, x_3) = -0,023 \Phi_{41}(x_1) + 0,018 \Phi_{42}(x_2) + 1,005 \Phi_{43}(x_3).$$

При этом,

$$\Phi_{i1}(x_1) = \sum_{j1=1}^{n1 \wedge (1)} a_{ij1} \Psi_{1j1}(x_{1j1})$$

$$\Phi_{i2}(x_2) = \sum_{j2=1}^{n2 \wedge (2)} a_{ij2} \Psi_{2j2}(x_{2j2})$$

$$\Phi_{i3}(x_3) = \sum_{j3=1}^{n3 \wedge (3)} a_{ij3} \Psi_{3j3}(x_{3j3})$$

$$\Psi_{sj_s}(x_{j_s}) = \sum_{p_s}^{P_{j_s}} \lambda_{j_s p_s}^0 T_{ps}^*(x_{sj_s}), s = \overline{1,3}$$

Восстановленные функции $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1,4}$, выраженные через смещенные полиномы Чебышева, имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1, x_2, x_3) = & 0,013 T_0^*(x_{11}) - 0,008 T_1^*(x_{11}) - 0,007 T_2^*(x_{11}) + \\ & 0,012 T_0^*(x_{12}) + 0,019 T_1^*(x_{12}) + 0,027 T_2^*(x_{12}) - 0,003 T_0^*(x_{21}) + 0,006 \\ & T_1^*(x_{21}) - 0,005 T_2^*(x_{21}) - 0,003 T_0^*(x_{22}) - 0,010 T_1^*(x_{22}) - 0,004 \\ & T_2^*(x_{22}) + 0,166 T_0^*(x_{31}) + 0,028 T_1^*(x_{31}) + 0,020 T_2^*(x_{31}) + 0,132 \\ & T_0^*(x_{32}) + 0,210 T_1^*(x_{32}) + 0,099 T_2^*(x_{32}) + 0,137 T_0^*(x_{33}) + 0,325 \\ & T_1^*(x_{33}) + 0,107 T_2^*(x_{33}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = & 0,020 T_0^*(x_{11}) - 0,012 T_1^*(x_{11}) - 0,010 T_2^*(x_{11}) + 0,021 T_0^*(x_{12}) + 0,034 T_1^*(x_{12}) + 0,046 T_2^*(x_{12}) - 0,010 T_0^*(x_{21}) + 0,020 T_1^*(x_{21}) - 0,016 T_2^*(x_{21}) - 0,009 T_0^*(x_{22}) - 0,033 T_1^*(x_{22}) - 0,013 T_2^*(x_{22}) + 0,136 T_0^*(x_{31}) + 0,023 T_1^*(x_{31}) + 0,016 T_2^*(x_{31}) + 0,148 T_0^*(x_{32}) + 0,236 T_1^*(x_{32}) + 0,111 T_2^*(x_{32}) + 0,141 T_0^*(x_{33}) + 0,334 T_1^*(x_{33}) + 0,100 T_2^*(x_{33});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3(x_1, x_2, x_3) = & 0,021 T_0^*(x_{11}) - 0,013 T_1^*(x_{11}) - 0,011 T_2^*(x_{11}) + 0,022 T_0^*(x_{12}) + 0,036 T_1^*(x_{12}) + 0,049 T_2^*(x_{12}) - 0,010 T_0^*(x_{21}) + 0,021 T_1^*(x_{21}) - 0,017 T_2^*(x_{21}) - 0,010 T_0^*(x_{22}) - 0,035 T_1^*(x_{22}) - 0,014 T_2^*(x_{22}) + 0,139 T_0^*(x_{31}) + 0,023 T_1^*(x_{31}) + 0,016 T_2^*(x_{31}) + 0,145 T_0^*(x_{32}) + 0,231 T_1^*(x_{32}) + 0,109 T_2^*(x_{32}) + 0,143 T_0^*(x_{33}) + 0,338 T_1^*(x_{33}) + 0,112 T_2^*(x_{33});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_4(x_1, x_2, x_3) = & 0,004 T_0^*(x_{11}) + 0,002 T_1^*(x_{11}) + 0,002 T_2^*(x_{11}) - 0,004 T_0^*(x_{12}) - 0,007 T_1^*(x_{12}) - 0,009 T_2^*(x_{12}) + 0,002 T_0^*(x_{21}) - 0,004 T_1^*(x_{21}) + 0,003 T_2^*(x_{21}) + 0,002 T_0^*(x_{22}) - 0,008 T_1^*(x_{22}) + 0,003 T_2^*(x_{22}) + 0,129 T_0^*(x_{31}) + 0,022 T_1^*(x_{31}) + 0,014 T_2^*(x_{31}) + 0,174 T_0^*(x_{32}) + 0,277 T_1^*(x_{32}) + 0,131 T_2^*(x_{32}) + 0,148 T_0^*(x_{33}) + 0,350 T_1^*(x_{33}) + 0,116 T_2^*(x_{33}).\end{aligned}$$

Такие же функции $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1,4}$ в виде многочленов для нормированных переменных (x_1, x_2, x_3) определяют соотношения

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = & 0,039 x_{1,1} - 0,056 x_{1,1}^2 - 0,173 x_{1,2} + 0,212 x_{1,2}^2 + 0,050 x_{2,1}^2 - 0,038 x_{2,1}^2 + 0,012 x_{2,2} - 0,031 x_{2,2}^2 - 0,101 x_{3,1} + 0,157 x_{3,1}^2 - 0,375 x_{3,2} + 0,795 x_{3,2}^2 - 0,209 x_{3,3} + 0,858 x_{3,3}^2 + 0,123;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = & 0,057 x_{1,1} - 0,082 x_{1,1}^2 - 0,300 x_{1,2} + 0,368 x_{1,2}^2 + 0,168 x_{2,1}^2 - 0,128 x_{2,1}^2 + 0,041 x_{2,2} - 0,108 x_{2,2}^2 - 0,083 x_{3,1} + 0,129\end{aligned}$$

$$x_{3,1}^2 - 0,421 x_{3,2} + 0,892 x_{3,2}^2 - 0,215 x_{3,3} + 0,883 x_{3,3}^2 + 0,091;$$

$$\Phi_3(x_1, x_2, x_3) = 0,061 x_{1,1} - 0,088 x_{1,1}^2 - 0,321 x_{1,2} + 0,393 x_{1,2}^2 + 0,178 x_{2,1}^2 - 0,135 x_{2,1}^2 + 0,043 x_{2,2} - 0,113 x_{2,2}^2 - 0,085 x_{3,1} + 0,131 x_{3,1}^2 - 0,412 x_{3,2} + 0,873 x_{3,2}^2 - 0,218 x_{3,3} + 0,894 x_{3,3}^2 + 0,094;$$

$$\Phi_4(x_1, x_2, x_3) = -0,011 x_{1,1} + 0,016 x_{1,1}^2 + 0,060 x_{1,2} - 0,073 x_{1,2}^2 - 0,036 x_{2,1}^2 + 0,027 x_{2,1}^2 - 0,010 x_{2,2} + 0,026 x_{2,2}^2 - 0,079 x_{3,1} + 0,122 - 0,495 x_{3,2} + 1,049 x_{3,2}^2 - 0,225 x_{3,3} + 0,925 x_{3,3}^2 + 0,062.$$

Окончательно функции $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1,4}$ представлены в виде многочленов для ненормированных переменных:

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = 376,152 x_{1,1} - 35,010 x_{1,1}^2 - 718,833 x_{1,2} + 150,055 x_{1,2}^2 + 325,590 x_{2,1}^2 - 21,216 x_{2,1}^2 + 91,772 x_{2,2} - 5,469 x_{2,2}^2 - 0,902 x_{3,1} + 0,011 x_{3,1}^2 - 15,456 x_{3,2} + 1,351 x_{3,2}^2 - 15,375 x_{3,3} + 5,833 x_{3,3}^2 + 1573,216;$$

$$\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 209,199 x_{1,1} - 19,471 x_{1,1}^2 - 472,927 x_{1,2} + 98,723 x_{1,2}^2 + 419,049 x_{2,1}^2 - 27,307 x_{2,1}^2 + 121,617 x_{2,2} - 7,248 x_{2,2}^2 - 0,281 x_{3,1} + 0,003 x_{3,1}^2 - 6,578 x_{3,2} + 0,575 x_{3,2}^2 - 6,008 x_{3,3} + 2,279 x_{3,3}^2 - 2026,330;$$

$$\Phi_3(x_1, x_2, x_3) = 271,605 x_{1,1} - 25,279 x_{1,1}^2 - 611,813 x_{1,2} + 127,715 x_{1,2}^2 + 536,092 x_{2,1}^2 - 34,933 x_{2,1}^2 + 154,137 x_{2,2} - 9,186 x_{2,2}^2 - 0,348 x_{3,1} + 0,004 x_{3,1}^2 - 7,793 x_{3,2} + 0,681 x_{3,2}^2 - 7,360 x_{3,3} + 2,792 x_{3,3}^2 - 2594,071;$$

$$\Phi_4(x_1, x_2, x_3) = -62,649 x_{1,1} + 5,831 x_{1,1}^2 - 145,776 x_{1,2} - 30,430 x_{1,2}^2 + 137,746 x_{2,1}^2 + 8,976 x_{2,1}^2 + 45,103 x_{2,2} + 2,688 x_{2,2}^2 - 0,414 x_{3,1} + 0,005 x_{3,1}^2 - 11,955 x_{3,2} + 1,045 x_{3,2}^2 - 9,727 x_{3,3} + 3,690 x_{3,3}^2 + 823,432.$$

2.1 Контрольные задания

1. Проводились наблюдения за температурой окружающей среды весной. Наблюдения в течение 20-ти дней дали следующие результаты:

6; 4; 5; 6; 7; 3; 8; 5; 10; 8; 9; 7; 3; 5; 10; 11; 9; 12; 10; 8.

Составить по этим результатам статистический дискретный ряд распределения частот и относительных частот. Построить полигоны частот и относительных частот.

2. На телефонной станции проводились наблюдения над числом неправильных соединений в минуту. Наблюдения в течение часа дали следующие результаты:

3; 1; 3; 1; 4; 2; 2; 4; 0; 3; 0; 2; 2; 0; 2; 1; 4; 3; 3; 1.

Составить по этим результатам статистический дискретный ряд распределения частот и относительных частот. Построить полигоны частот и относительных частот.

3. В супермаркете проводились наблюдения над числом покупателей, обратившихся в кассу за один час. Наблюдение в течение 20 часов дало следующие результаты:

20; 25; 30; 15; 10; 27; 14; 21; 23; 25; 27; 24; 24; 20; 15; 12; 11; 9; 14; 10.

Составить по этим результатам статистический дискретный ряд распределения частот и относительных частот. Построить полигоны частот и относительных частот.

3 ИНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМНЫХ ЗАДАЧ

3.1 Показатели информированности

Решение любой системной задачи зависит от взаимосвязей и взаимозависимости разных факторов и условий, физических допущений и технологических ограничений, наложенных на функционирование исследуемого объекта.

Основная цель системного анализа сводится к обеспечению необходимого и технологически возможного уровня

подтверждения достоверности и обоснованности решения прикладных системных задач. Задачи информационного анализа состоят в создании методологического и математического инструментария для достижения поставленных целей.

Информация – это упорядоченная последовательность содержательно взаимно согласованных и структурно взаимосвязанных слов, рисунков, диаграмм, таблиц и (или) других способов письменного, устного, наглядного, технического отображения состояний, действий, расположений и других свойств и (или) процессов исследуемого объекта какой-либо природы.

Определение количества информации обосновывает понятие энтропии, которую описывает математическая формула:

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i) \quad (3.1)$$

Формула (3.1) определяет энтропию полной группы случайных событий или состояний. По содержанию энтропия является обратной величиной количества информации. Для определения количества информации применяются комбинаторный и алгоритмичный подходы.

Самыми важными свойствами информации с точки зрения ЛПР, являются: полнота, достоверность и своевременность информирования ЛПР.

Полнота информированности – свойство, которое характеризует соответствие количества получаемой ЛПР информации той, которая необходима для принятия решения.

Своевременность информированности – свойство, которое определяет, насколько ресурс времени ЛПР на формирование и принятие решения соответствует ресурсу времени от момента получения информации, до момента реализации решения.

Достоверность информированности – свойство, которое характеризует соответствие полученной ЛПР информации к настоящему состоянию ситуации.

Количественно полнота информации характеризуется показателями полноты информированности.

$$I_n = \frac{\Pi - \Pi^-}{\Pi^+ - \Pi^-}, \quad (3.2)$$

где Π^+ и Π^- - соответственно максимально целевой и минимально допустимый объём информации, нужный для принятия решений в определённых условиях; Π - объём информации, полученный ОПР в настоящей ситуации.

Существует понятие максимального целевого объёма информации Π_M^+ , что подразумевает получение ЛПР полезной информации до тех пор, пока она не окажется чрезмерной и ненужной для принятия решения.

Нижняя граница Π_m^- , подразумевает, что решение можно принимать при условии $\Pi \geq \Pi_m^- + \varepsilon$, где ε - достаточно малая величина т.к. для $\Pi = \Pi_m^-$ имеем $I_n = 0$. Схема уровней полноты информированности приведена на рисунке 3.1.

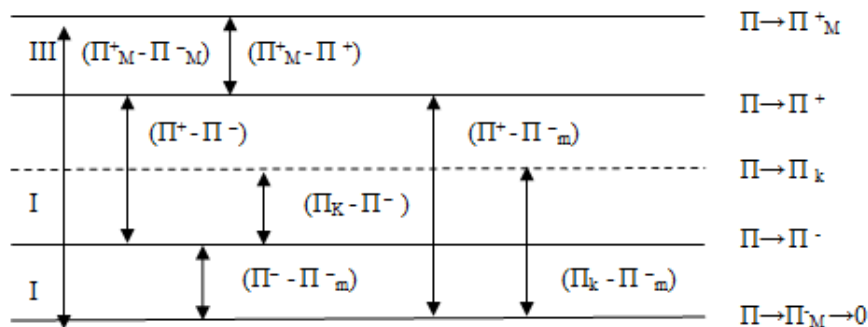


Рисунок 3.1 – Схема уровней полноты информированности

Если уровень информации находится в интервале $[\Pi_m^-, \Pi^-]$, то это недостаточная полнота информированности ЛПР.

Если уровень информации находится в интервале $[\Pi^-, \Pi^+]$, то это рациональная полнота информированности ЛПР.

Если уровень информации находится в интервале $[\Pi^+, \Pi_M^+]$, то это чрезмерная полнота информированности ЛПР.

Показатель чрезмерной полноты информированности

$$I_{\Pi}^+ = \frac{\Pi_M^+ - \Pi^+}{\Pi^+ - \Pi^-}. \quad (3.3)$$

Показатель дефицита полноты информированности

$$I_{\Pi}^{-} = \frac{\Pi^{-} - \Pi_{m}^{-}}{\Pi^{+} - \Pi^{-}} \quad (3.4)$$

Пример

Уровень полноты знаний студента о грядущей сессии представляется в виде шкалы от 0 до 50 баллов. Минимальный уровень информированности студента о сессии равен нулю ($\Pi_{m}^{-}=0$, т.е. студент полностью не проинформирован), а максимальный уровень равен 50 ($\Pi_{M}^{+}=50$, т. е. студент чрезмерно информирован о сессии). Студент обладает оптимальным уровнем знаний, который принадлежит интервалу [25; 45], т.е. $\Pi^{+}=45$, $\Pi^{-}=25$. Какие значения будет принимать полнота информативности, если информированность студента будет неполной, достаточной и чрезмерной? Каким объемом информации будет обладать студент, если он обладает на текущий момент полнотой информированности равной 0,6 ($I_n=0,6$)?

Решение

1) Необходимо построить схему (рис.3.2), учитывая все граничные показатели, которые заданы в условии, а также полученную схему разграничить на области таким образом, что:

- I - [Π_{m}^{-} ; Π^{-}]
- II - [Π^{-} ; Π^{+}]
- III - [Π^{+} ; Π_{M}^{+}]

2) Рассчитываем показатели

- дефицита полноты информированности по формуле 3.4
- оптимальный показатель полноты информированности по формуле

$$I_n = \frac{\Pi - \Pi^{-}}{\Pi^{+} - \Pi^{-}} \quad (3.5)$$

- чрезмерный показатель полноты информированности по формуле

$$I_{\Pi}^{+} = \frac{\Pi_{M}^{+} - \Pi^{+}}{\Pi^{+} - \Pi^{-}} \quad (3.6)$$

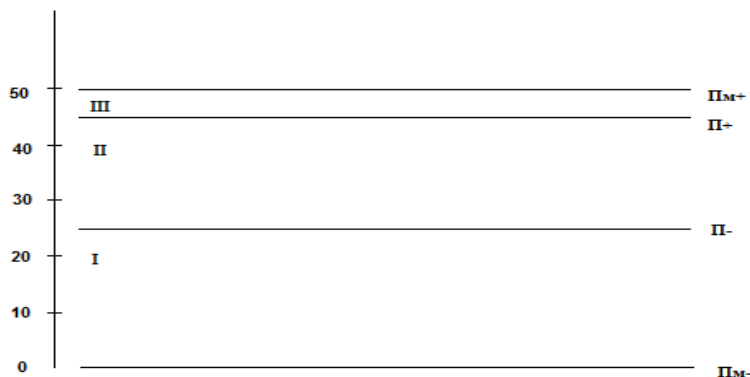


Рисунок 3.2 – Схема уровней полноты информированности

Из формулы (3.5) выведем формулу расчета объема информации (П):

$$П - П^- = I_n(П^+ - П^-)$$

$$П = I_n(П^+ - П^-) + П^-$$

$$П = 0,6 \cdot (45 - 25) + 25 = 37$$

Полученное значение лежит во II области. Значит, студент достаточно информирован о сессии.

3.2 Формализация показателя своевременности

Определим, что: t_0 – момент получения информации; t^- – момент окончания процедуры формирования решения при условии, что длительность этой процедуры T^- ; t^+ – момент окончания процедуры формирования решения при условии, что длительность этой процедуры T^+ ; t_{rk} – момент реализации решения для k -й; t_{fn} – момент начала формирования решения для k -й ситуации; t_{fk} – момент окончания формирования решений для k -й ситуации; T^- – минимально возможная длительность периода формирования решения для заданного множества ситуаций; T_{rk} – длительность периода от момента начала формирования решения, до момента его реализации для определённой k -й ситуации; T_M^+ – максимально возможное для заданного множества ситуаций длительность периода от

момента начала формирования решения до момента его реализации, то есть T_M^+ - максимум T_{rk} на множестве ситуаций; T_m^- - минимально возможная для заданного множества ситуаций длительность периода от момента начала формирования решений до момента его реализации, то есть T_m^- минимум T_{rk} на множестве ситуаций; T_{rk} – длительность периода от момента начала формирования решения k-й ситуации до момента его окончания. Допустим, $t_{fn} = t_0$.

Если $t \in [T_m^-, T^-]$, то это несвоевременная информированность ОНР поскольку $t_{rk} < T^-$ и, следовательно, невозможно даже за минимально допустимое время формулировать решение.

Если $t \in [T^+, T_M^+]$, то это рискованная своевременность, т.к. есть некий риск, что информация окажется несвоевременной.

Если $t \in [T^+, T_M^+]$, то это гарантированная своевременность, поскольку для каждого t_{rk} выполняется условие $t_{rk} > T^+$.

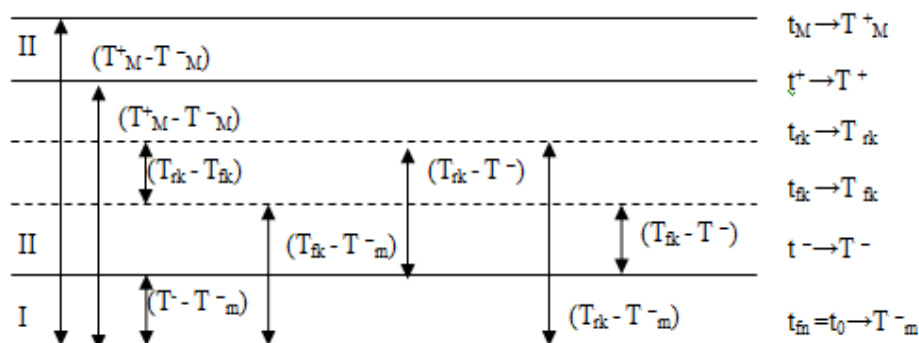


Рис.3.3—Схема уровней своевременности информированности

Под временным ресурсом формирования решения (R_{fk}) для k-й ситуации из заданного множества ситуаций будем понимать период времени от момента получения информации t_0 до момента окончания формирования решений t_{fk} для k-й ситуации.

Временной ресурс реализации решения (R_{rk}) для k-й ситуации из заданного множества ситуаций период времени, от момента получения информации t_0 до момента реализации решения t_{rk}

для k -й ситуации.

$$R_{fk} = \frac{T_{fk} - T^-}{T^+ - T^-}, \quad (3.7)$$

где $T_{fk} = t_{fk} - t_{fn} = t_{fk} - t_0$;

$$R_{rk} = \frac{T^+ - T_{rk}}{T^+ - T^-}, \quad (3.8)$$

где $T_{rk} = t_{rk} - t_0$.

Показатель своевременности информированности ОПР можно выразить через длительность соответствующих периодов

$$I_T' = \frac{T_{rk} - T_{rk}}{T^+ - T^-}. \quad (3.9)$$

Этот показатель целесообразно вычислять в интервале $[0;1]$, т.е.

$$I_T = 1 - \frac{R_{fk} + R_{rk}}{2}. \quad (3.10)$$

Таким образом, для каждой k -й ситуации может быть реализована одна из таких альтернатив:

- своевременность информированности гарантирована с некоторым резервом времени;
- своевременность информированности гарантирована;
- своевременность информированности не гарантирована.

Если записать множество ситуаций в виде $S_0 = \{S_k | k = \overline{1, N_s}\}$, то можно выделить подмножество по условиям своевременности, приведённым выше, с такими свойствами:

$$\begin{aligned} S_{T_1} &= \{S_{k_1} \in S_0 | T_m^- \leq T_{rk_1} < T^-, k_1 = \overline{1, N_{T_1}}\}; \\ S_{T_2} &= \{S_{k_2} \in S_0 | T^- \leq T_{rk_2} \leq T^+, k_2 = \overline{1, N_{T_2}}\}; \\ S_{T_3} &= \{S_{k_3} \in S_0 | T^+ < T_{rk_3} \leq T_M^+, k_3 = \overline{1, N_{T_3}}\}; \\ N_{T_1} + N_{T_2} + N_{T_3} &= N_{T_S}, \end{aligned}$$

где $S_{T_1}, S_{T_2}, S_{T_3}$ - подмножества ситуаций, для которых уровень своевременности информированности обозначают соответственно условия (области).

Для $S_{T_1}: I_T = 0$; для $S_{T_2}: 0 \leq I_T \leq 1$; для $S_{T_3}: I_T \geq 1$.

Для оценки показателя своевременности информированности ОПР в условиях заданного множества

ситуаций в первую очередь необходимо для каждой конкретной ситуации определить, к какому из этих множеств она принадлежит.

3.3 Формализация показателя достоверности

Достоверность информативности рассматривается как свойство, обратное недостоверности информированности, считая, что последняя обусловлена влиянием череды факторов – неполноты, неточности, противоречивости, нечёткости, неопределенности выходной информации.

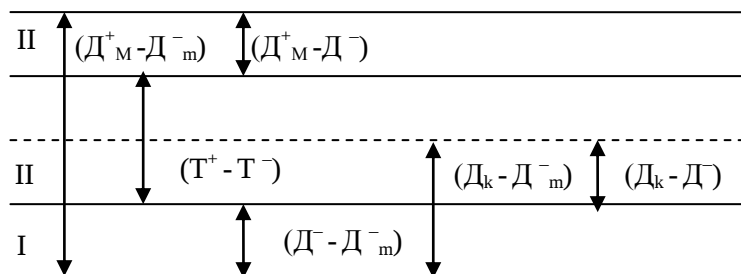


Рисунок 3.4 –Схема уровней достоверности информированности

Введём такие обозначения: D_m^- - уровень, который соответствует недостатку каких-либо знаний про анализируемое множество ситуаций; D_M^+ - уровень, который соответствует полному, точному, непротиворечивому знанию о анализируемом множестве ситуаций; D^+ - максимальный практически целесообразный уровень достоверности информированности на заданном множестве ситуаций; D^- - минимальный практически целесообразный уровень информированности на заданном множестве ситуаций; D_k - значение достоверности информированности о k -й ситуации из заданного множества ситуаций. Уровни D_M^+ , D_m^- - граничные, потенциально возможные уровни достоверности информированности, причём D_m^- - практически нецелесообразный, а D_M^+ - практически недостижимый из-за ограниченности инструментария по точности, раздельной способностью, другими подобными

характеристиками.

Если $D \in [D_m^-, D^-]$ и означает неприемлемый уровень достоверности информирования.

Если $D \in [D^-, D^+]$ и означает практически целесообразный уровень достоверности информирования.

Если $D \in [D^+, D_M^+]$ и означает потенциально полную достоверности информирования.

Показатель уровня дефицита информирования:

$$I_D^- = \frac{D^- - D_m^-}{D^+ - D^-} \quad (3.11)$$

Показатель уровня достоверности информированности:

$$I_D = \frac{D_k - D^-}{D^+ - D^-} \quad (3.12)$$

Показатель уровня резерва достоверности информированности:

$$I_D^+ = \frac{D_M^+ - D^+}{D^+ - D^-} \quad (3.13)$$

По свойству полноты информированности выделяют в множестве S_0 подмножества:

$$\begin{aligned} S_{\Pi_1} &= \{S_{k_1} \in S_0 \mid \Pi_m^- \leq \Pi_{k_1} < \Pi^-, k_1 = \overline{1, N_{\Pi_1}}\}; \\ S_{\Pi_2} &= \{S_{k_2} \in S_0 \mid \Pi^- \leq \Pi_{k_2} \leq \Pi^+, k_2 = \overline{1, N_{\Pi_2}}\}; \\ S_{\Pi_3} &= \{S_{k_3} \in S_0 \mid \Pi^+ < \Pi_{k_3} \leq \Pi_M^+, k_3 = \overline{1, N_{\Pi_3}}\} \end{aligned}$$

Аналогично по свойству достоверности информированности введём в множество S_0 подмножества вида:

$$\begin{aligned} S_{D_1} &= \{S_{k_1} \in S_0 \mid D_m^- \leq D_{k_1} < D^-, k_1 = \overline{1, N_{D_1}}\}; \\ S_{D_2} &= \{S_{k_2} \in S_0 \mid D^- \leq D_{k_2} \leq D^+, k_2 = \overline{1, N_{D_2}}\}; \\ S_{D_3} &= \{S_{k_3} \in S_0 \mid D^+ < D_{k_3} \leq D_M^+, k_3 = \overline{1, N_{D_3}}\} \end{aligned}$$

Если проверить значения этих параметров в конце формирования решения, может оказаться, что некоторый S_k перешёл из одного подмножества в другое. Это происходит из-за влияния других свойств информации.

3.4 Задачи распознавания критических и катастрофических ситуаций при измерении характеристик информативности ЛПР

При принятии решения необходимо найти рациональный компромисс между уровнями I_D, I_P, I_T в динамике формирования решения с целью сокращения времени на его формирование. При этом $I_D = I_D(t), I_P = I_P(t), I_T = I_T(t)$.

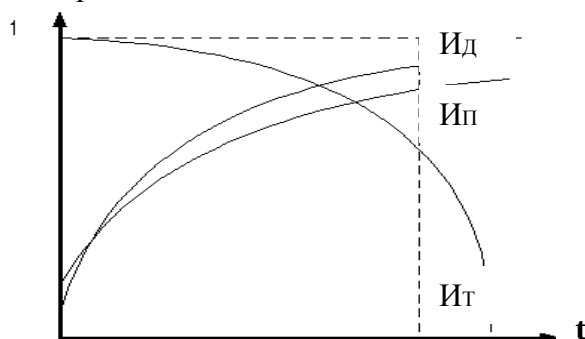


Рисунок 3.5 – Уровни информированности

Задача классификации и ранжирования ситуации.

Под действием множества $\Phi_j \in \Phi$ неконтролируемых факторов критическая ситуация S_i может перейти в чрезвычайную.

Переход ситуации S_i в чрезвычайную зависит от набора воздействующих факторов (таблица 3.1). Вероятность события, при котором под воздействием фактора Φ_j ситуация S_i может перейти в чрезвычайную зависит от полноты информированности. Данная зависимость записывается в виде:

$$\eta_{ij}^1 = 1 - \lg(1 + a_{ij} I_{ij}^j), \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,7}, \quad (3.14)$$

где a_{ij} - коэффициент (таблица 3.2), I_{ij}^j - полнота информированности (таблица 3.3).

Таблица 3. 1 – Возможные переходы ситуации в критическую

$\Phi_j \backslash S_i$	1	2	3	4	5	6	7
1	+	+	+	+	-	+	+
2	-	-	+	+	-	-	+
3	-	-	+	+	+	+	+
4	-	-	+	+	+	+	-

Таблица 3.2 – Коэффициенты a_{ij}

$\Phi_j \backslash S_i$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.5	0.6	0.65	0.5	-	0.7	0.6
2	-	-	0.6	0.7	-	-	0.4
3	-	-	0.7	0.7	0.4	0.55	0.65
4	-	-	0.75	0.6	0.4	0.5	-

Таблица 3.3 – Полнота информированности I_{II}^{ij}

$\Phi_j \backslash S_i$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.6	0.7	0.4	0.8	-	0.7	0.6
2	-	-	0.5	0.6	-	-	0.5
3	-	-	0.4	0.4	0.4	0.8	0.6
4	-	-	0.6	0.3	0.35	0.6	-

Требуется:

- определить вероятность перехода ситуации S_i в чрезвычайную под воздействием одного определенного из факторов Φ_j ;
- определить вероятность перехода ситуации S_i в чрезвычайную под воздействием хотя бы одного из заданной совокупности факторов;

- ранжировать по уровню опасности ситуации S_i под воздействием хотя бы одного из заданной совокупности факторов.
- Решить задачу при условии, что вероятность события, при котором под воздействием фактора Φ_j ситуация S_i может перейти в чрезвычайную зависит от полноты и достоверности информированности.

Данная зависимость записывается в виде:

$$\eta_{ij}^2 = 1 - \lg(1 + a_{ij} \cdot I_{\Pi}^{ij} \cdot I_{\Delta}^{ij} 10), i = \overline{1, 4}, j = \overline{1, 7} \quad (3.15)$$

Дополнительно задана матрица достоверности информированности I_{Δ}^{ij} (таблица 3.4).

Таблица 3.4- Достоверность информированности I_{Δ}^{ij} :

$\Phi_j \backslash S_i$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.7	0.8	0.4	0.7	-	0.7	0.7
2	-	-	0.3	0.8	-	-	0.8
3	-	-	0.3	0.8	0.4	0.6	0.6
4	-	-	0.5	0.7	0.3	0.7	-

Матрицы I_{Δ}^{ij} , I_{Π}^{ij} определяются экспертами и задают предварительные оценки соответствующих показателей.

Решение:

Под воздействием множества неконтролируемых факторов риска $\Phi_j \in \Phi$ ситуация $S_i \in S$ может перейти в чрезвычайную. Переход зависит от определенного набора воздействующих факторов:

Таблица 3.5 – Переходы ситуации в критическую

$\Phi_j \backslash S_i$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	0	1	1

2	0	0	1	1	0	0	1
3	0	0	1	1	1	1	1
4	0	0	1	1	1	1	0

По условию задачи заданы матрицы коэффициентов a_{ij} (матрица A) и матрицы показателей полноты информированности I_{Π}^{ij} и достоверности информированности $I_{\mathcal{D}}^{ij}$ (матрицы I_{Π} , $I_{\mathcal{D}}$ соответственно).

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.65 & 0.5 & 1 & 0.7 & 0.6 \\ 1 & 1 & 0.6 & 0.7 & 1 & 1 & 0.4 \\ 1 & 1 & 0.7 & 0.7 & 0.4 & 0.55 & 0.65 \\ 1 & 1 & 0.75 & 0.6 & 0.4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{\Pi} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.8 & 1 & 0.7 & 0.6 \\ 1 & 1 & 0.5 & 0.6 & 1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.8 & 0.6 \\ 1 & 1 & 0.6 & 0.3 & 0.35 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.4 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7 \\ 1 & 1 & 0.3 & 0.8 & 1 & 1 & 0.8 \\ 1 & 1 & 0.3 & 0.8 & 0.4 & 0.6 & 0.6 \\ 1 & 1 & 0.5 & 0.7 & 0.3 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}$$

Содержательный смысл коэффициентов a_{ij} может быть определен исходя из следующих рассуждений. Предположим, что уровень информированности ЛПР=1, и тем не менее, существует ненулевая вероятность перехода ситуации в чрезвычайную. Обозначим ее P^* .

$$p^* = 1 - \log_2(1 + a_{ij} \cdot 1)$$

$$\log_2(1 + a_{ij}) = 1 - p^*$$

$$1 + a_{ij} = 2^{1-p^*}$$

$$a_{ij} = 2^{1-p^*} - 1$$

Таким образом, коэффициенты a_{ij} нормированы, и могут быть вычислены при наличии предварительных оценок и предположений ЛПР о возможной вероятности возникновения чрезвычайной ситуации даже в случае полной информированности. Отметим, что идеальным является случай $a_{ij} = 1$, в таких обстоятельствах при полной информированности о некотором факторе риска можно гарантировать то, что ситуация не станет чрезвычайной. В другом крайнем случае – $a_{ij} = 0$, имеет место факт, что при любом уровне информированности о влиянии фактора риска на ситуацию, ситуация перейдет в чрезвычайную (вероятность=1).

Определим вероятность перехода ситуации $S_i \in S$ в чрезвычайную под воздействием одного определенного фактора риска $\Phi_j \in \Phi$. Для этого воспользуемся формулой:

$$\eta_{ij}^1 = 1 - \lg(1 + a_{ij} I_{II}^{ij}), \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,7}$$

$$H1 = \begin{bmatrix} 0.886 & 0.847 & 0.899 & 0.854 & 0 & 0.827 & 0.866 \\ 0 & 0 & 0.886 & 0.848 & 0 & 0 & 0.921 \\ 0 & 0 & 0.892 & 0.893 & 0.936 & 0.842 & 0.857 \\ 0 & 0 & 0.838 & 0.928 & 0.943 & 0.886 & 0 \end{bmatrix}$$

Данная матрица H1 задает вероятность перехода критической ситуации в чрезвычайную под воздействием одного из факторов риска. Как видно из матрицы вероятности перехода достаточно большие (>0.8).

Определим вероятность перехода ситуации $S_i \in S$ в чрезвычайную под воздействием хотя бы одного из заданной совокупности факторов. Данная вероятность задается

зависимостью: $\eta_i^1 = 1 - \left[\prod_{j=1}^7 (1 - \eta_{ij}^1) \right]$, (это вектор H11)

$$H11 = \begin{bmatrix} 0.999 \\ 0.999 \\ 0.999 \\ 0.999 \end{bmatrix}$$

Ранжируем по уровню опасности ситуации, складывающейся под воздействием одного из заданной совокупности факторов (таблица 3.6).

Таблица 3.6 – Уровни опасности ситуаций

Сокращение	Качественная хар-ка степени риска	Количественное описание
ч.н.	чрезвыч. низкий	0.0-0.1
о.н.	очень низкий	0.1-0.25
н.	низкий	0.25-0.4
с.	средний	0.4-0.6
в.	высокий	0.6-0.75
о.в.	очень высокий	0.75-0.9
ч.в.	чрезвыч.высокий	0.9-1.0

Таблица 3.7 – Степени риска

	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7
S_1	о.в.	о.в.	о.в.	о.в.	-	о.в.	о.в.
S_2	—	-	о.в.	о.в.	—	-	ч.в.
S_3	-	-	о.в.	о.в.	ч.в.	о.в.	о.в.
S_4	—	—	о.в.	ч.в.	ч.в.	о.в.	-

Определим вероятность η_{ij}^2 перехода ситуации $S_i \in S$ в чрезвычайную под воздействием одного определенного фактора риска с учетом полноты и достоверности информированности.

Воспользуемся формулой:

$$\eta_{ij}^2 = 1 - \lg(1 + a_{ij} g_{ij} I_{II}^{ij} I_{Д}^{ij}); i = \overline{1, 4}, j = \overline{1, 7}.$$

Где g_{ij} - коэффициент, который вычисляется при наличии предварительных оценок и предположений ЛПР о возможной вероятности возникновения чрезвычайной ситуации даже в случае, когда уровень достоверности равен 1. Обычно принимается $g_{ij} = 10$.

Пусть p^* - ненулевая вероятность перехода критической ситуации в чрезвычайную. Матрица для η_{ij}^2 имеет вид:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.509 & 0.361 & 0.691 & 0.42 & 0 & 0.353 & 0.455 \\ 0 & 0 & 0.721 & 0.36 & 0 & 0 & 0.585 \\ 0 & 0 & 0.735 & 0.489 & 0.785 & 0.438 & 0.76 \\ 0 & 0 & 0.488 & 0.646 & 0.847 & 0.509 & 0 \end{bmatrix}$$

Определим вероятность перехода ситуации $S_i \in S$ в чрезвычайную под воздействием хотя бы одного из заданных совокупности факторов с учетом полноты и достоверности информированности. Данная вероятность задается

зависимостью : $\eta_i^2 = 1 - \left[\prod_{j=1}^7 (1 - \eta_{ij}^2) \right]; i = \overline{1, 4}$

Это вектор H22:

$$H22 = \begin{bmatrix} 0.976 \\ 0.926 \\ 0.996 \\ 0.986 \end{bmatrix}$$

Ранжируем по уровню опасности ситуации, складывающиеся под воздействием одного из заданной совокупности факторов при условии, что учитываются полнота и достоверность информированности (Таблица 3.8).

Таблица 3.8 – Уровни опасности

$\Phi_j \backslash S_i$	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7
S_1	с.	н.	о.в.	с.	-	н.	с.
S_2	-	-	в.	н.	-	-	с.
S_3	-	-	в.	с.	о.в.	с.	о.в.
S_4	-	-	с.	в.	о.в.	с.	-

4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСТИМОГО ВРЕМЕНИ НА ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Принятие решений постоянно решаемая в процессе управления задача. Задача принятия решений (ЗПР) направлена на определение наилучшего (оптимального) способа действий для достижения поставленных целей.

Под **целью** понимается идеальное представление желаемого состояния или результата деятельности. Если фактическое состояние не соответствует желаемому, то имеет место проблема. Выработка плана действий по устранению проблемы составляет сущность задачи принятия решений.

Проблемы могут возникать в следующих случаях:

- функционирование системы в данный момент не обеспечивает достижение поставленных целей;
- функционирование системы в будущем не обеспечит достижение поставленных целей;
- не обходимо изменение целей деятельности.

Проблема всегда связана с определенными условиями, которые обобщенно называют **ситуацией**. Совокупность проблемы и ситуации образует **проблемную ситуацию**. Выявление и описание проблемной ситуации дает исходную информацию для постановки задачи принятия решений.

Субъектом всякого решения является лицо, принимающее решение(ЛПР). Это может быть одно лицо – индивидуальное ЛПР или группа лиц, вырабатывающих коллективное решение,

групповое ЛПР. Для помощи ЛПР в сборе и анализе информации, информировании решений привлекаются эксперты.

В процессе принятия решений формируются альтернативные (взаимоисключающие) варианты решений и оценивается их предпочтительность.

Предпочтение – это интегральная оценка качества решений, основанная на объективном анализе (знании, опыте, проведении экспериментов и расчетов) и субъективном понимании ценности, эффективности решений.

Для осуществления выбора наилучшего решения индивидуальное ЛПР определяет критерий выбора. Групповое ЛПР производит выбор на основе принципа согласования. Конечным результатом ЗПР является решение, которое представляет собой предписание к действию.

Решение называется **допустимым**, если оно удовлетворяет ограничениям: ресурсным, правовым, морально-этическим.

Решение называется **оптимальным** (наилучшим), если оно обеспечивает экстремум (максимум или минимум) критерия выбора при индивидуальном ЛПР или удовлетворяет принципу согласования при групповом ЛПР.

Обобщенной характеристикой решения является его эффективность. Эта характеристика включает эффект решения, определяющий степень достижения целей, и стоимость решения – совокупность затрат ресурсов для принятия и реализации решения. Таким образом, эффективность решения – это степень достижения целей, отнесенная к затратам на их достижение. Решение тем эффективнее, чем больше степень достижения целей и меньше стоимость затрат.

Принятие решений происходит во времени, поэтому вводится понятие процесса принятия решений. Этот процесс состоит из последовательности этапов и процедур и направлен на устранение проблемной ситуации. Допустимое время для принятия решения – это максимальное время, за которое текущее состояние ситуации не успеет перейти в критическое, чрезвычайное или катастрофическое.

Вероятность подобного перехода зависит от изменения

времени, а также таких показателей как полнота $I_{П}$, своевременности $I_{Т}$, достоверности $I_{Д}$.

Пример

В процессе функционирования системы под влиянием множества $\Phi = \{\Phi_j, j = 1..m\}$ неконтролируемых факторов риска ситуация S_i может перейти в критическую, чрезвычайную или катастрофическую. Такой переход может происходить в течение некоторого периода времени, продолжительность которого априори неизвестна, и которой зависит от количества, свойств и продолжительности влияния факторов Φ_i .

Требуется определить такой допустимый период времени T на формирование и реализацию решения, для которого вероятность перехода ситуации S_i в критическую, чрезвычайную или катастрофическую не будет превышать заданное значение $\eta = \eta_{\text{доп}}$.

Количество факторов риска и ситуаций зададим в таблице 4.1, где знак «+» обозначает, что при влиянии соответствующего фактор ситуация переходит в критическую, а знак «-» - фактор риска не влияет на ситуацию. Отметим, что метод и алгоритм решения задачи применим и для конечных значений i и j .

Таблица 4.1 – Влияние факторов на переход

	Φ_1	Φ_2	Φ_3
S_1	+	+	-
S_2	-	-	+

Вероятность перехода ситуации S_i под влиянием фактора Φ_j в критическую зависит от изменения во времени, полноты, достоверности и своевременности информированности ЛПР.

$$\eta_{ij} = 1 - \lg[1 + a_{ij} I_{ij}(t)], \quad (3.1)$$

$$\text{где } I_{ij}(t) = I_{Пij}(t) I_{Дij}(t) I_{Тij}(t)$$

Показатели полноты, достоверности и своевременности ЛПР возрастают со временем, а также зависят от оценок соответствующих показателей, определенных экспертами ранее, которые будут приведены в условии задачи ($I_{Пij}, I_{Дij}, I_{Тij}$).

Полнота информированности – $I_{\Pi ij}(t) = I_{\Pi ij}(1 + a_{ij}t)$;

Достоверность информированности – $I_{Д ij}(t) = I_{Д ij}(1 + c_{ij}t)$;

Своевременность информированности – $I_{Т ij}(t) = I_{Т ij}(1 + b_{ij}t^2)$,

где a , b , c – коэффициенты, характеризующие динамику изменения показателей информированности

$$a_{ij} = e^{a'_{ij}} I_{\Pi ij} 0.5, \text{ если } 0 < a'_{ij} \leq 1 \quad a_{ij} = 0, \text{ иначе.}$$

$$c_{ij} = e^{c'_{ij}} a'_{ij} 0.05, \text{ если } 0 < a'_{ij} \leq 1 \quad c_{ij} = 0, \text{ иначе.}$$

$$b_{ij} = (a_{ij} + c_{ij}) I_{Т ij} 10^{-4}, \text{ если } 0 < (a_{ij} + c_{ij}) \leq 1 \quad b_{ij} = 0, \text{ иначе.}$$

Где a'_{ij} – также коэффициент, определенный экспертами заранее. Тогда, подставив в неравенство (3.1)

$$0 < 1 - \lg[1 + a_{ij} I_{ij}(t)] < \eta_{\text{доп}}$$

некоторое значение времени, мы сможем определить, будет ли своевременно принято решение, а решение этого неравенства будет допустимым временем для формирования и принятия решения.

Пример

Для одного фактора и одной ситуации показатели, определенные экспертами, равны: $a' = 0.6$; $I_{\Pi} = 0.7$; $I_{Д} = 0.8$; $I_{Т} = 0.8$.

Допустимая вероятность перехода ситуации в критическую $\eta_{\text{доп}} = 0.5$.

Вывести итоговое неравенство, а также проверить, будет ли принято решение до перехода ситуации в критическую за время 40 ед; 30 ед; 50 ед.

Решение

Коэффициенты изменений показателей будут равны $a = 0.637$; $c = 0.067$; $b = 0.563 \cdot 10^{-4}$

Выведем функции зависимостей показателей информированности $I_{\Pi}(t) = 0.7 + 0.4459t$; $I_{Д}(t) = 0.8 + 0.0536t$;

$$I_{Т}(t) = 0.8 + 0.4504 \cdot 10^{-4}t;$$

По формуле 3.1

$$0 < |1 - \lg[1 + 0.637 \cdot 0.7 \cdot 0.8 \cdot 0.8(1 + 0.637t)(1 + 0.067t)(1 + 0.563 \cdot 10^{-4}t^2)]| < 0.5$$

Подставив значение 40, получим:

$0 < 0.495737 < 0.5$ – максимально допустимое время для принятия решения.

Подставив значение 30, получим:

$0 < 0.28155 < 0.5$ – решение будет принято до перехода ситуации в критическую.

Подставив значение 50, получим:

$0 < 0.676869 < 0.5$ – ситуация перейдет в критическую.

4.1 Контрольные задания

В процессе функционирования системы под влиянием множества $\Phi = \{\Phi_j, j = 1..m\}$ неконтролируемых факторов риска ситуация S_i может перейти в критическую, чрезвычайную или катастрофическую. Требуется определить такой допустимый период времени T на формирование и реализацию решения, для которого вероятность перехода ситуации S_i в критическую, чрезвычайную или катастрофическую не будет превышать заданное значение $\eta_{\text{доп}}$. Показатели, определенные экспертами, равны: $a' = 0.6$; $I_{\Pi} = 0.7$; $I_{\text{Д}} = 0.8$; $I_{\text{T}} = 0.8$. Допустимая вероятность перехода ситуации в критическую $\eta_{\text{доп}} = 0.6$.

Вывести итоговое неравенство, а также проверить, будет ли принято решение до перехода ситуации в критическую за время 30 м.; 20 м.; 60 м..

Рассчитать коэффициенты изменений показателей, определить функции зависимостей показателей информированности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Основы системного анализа и проектирования АСУ./Под ред. А.А. Павлова. — Киев.: Вища школа, 1991, — 367с.
2. Згуровский М. З., Панкратова Н.Д. Системный анализ: проблемы, методология, приложения [Текст] : монография / М. З. Згуровский, Н. Д. Панкратова; М-во образования и науки, молодежи и спорта Украины, Нац. акад. наук Украины, Ин-т прикладного систем. анализа. - 2-е изд., перераб. и доп. - К.: Наукова думка, 2011. - 727 с.
3. Перевозчикова О. Л. Основи системного аналізу об'єктів і процесів комп'ютеризації [Текст] / О.Л. Перевозчикова; Нац. ун-т "Київ.-Могилакад.". - К.: Академія, 2003. - 432 с.
4. Волкова В. Н. Теория систем и системный анализ [Текст] : учеб. для студ. вузов, обуч. по напр. "Прикладная информатика" / В. Н. Волкова, А. А. Денисов. - М.: ЮРАЙТ, 2010. - 680 с.
5. Бесекерский В. А. Теория систем автоматического управления [Текст] / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. - 4-е изд., перераб. и доп. - СПб. : Профессия, 2003. - 752 с.
6. Казиев В. М. Введение в анализ, синтез и моделирование систем [Текст] : учеб. пособие / В. М. Казиев. - 2-е изд. - М. : ИНТУИТ : БИНОМ. ЛЗ, 2007. - 244 с.
7. Сорока К. О. Основи теорії систем і системного аналізу [Текст]: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / К. О. Сорока; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва.- 2-ге вид., переробл. та допов.-Харьков: Тимченко А. М., 2005.- 288 с.

*Заказ № _____ от « _____ » _____ 2014 г. Тираж 35 экз.
Изд-во СевНТУ*