



**Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный
технический университет**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
И ПРОИЗВОДСТВ**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольных и индивидуальных работ
по дисциплинам «Математическое моделирование систем
и процессов» и «Математические методы оптимизации» для
студентов дневной и заочной форм
обучения специальности
7.05100302 - Приборы и системы точной механики

**Севастополь
2013**



УДК 65.011.56:658.524

Методические указания для выполнения контрольных и индивидуальных работ по дисциплинам «Математическое моделирование систем и процессов» и «Математические методы оптимизации» для студентов дневной и заочной форм обучения специальности 7.05100302 - Приборы и системы точной механики/ Сост. В.Я. Копп, О.П. Чуб, А.Н. Круговой. - Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2013.- 20 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам при выполнении индивидуальных расчетных работ и контрольных работ студентов-заочников по дисциплинам «Математическое моделирование систем и процессов» и «Математические методы оптимизации».

Методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения специальности 7.05100302 - Приборы и системы точной механики

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Автоматизированные приборные системы» СевНТУ (протокол № _____ от _____ 2013 г.)

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний

Рецензент:

Л.Б. Шрон, канд. техн. наук, доцент кафедры «Технологии машиностроения»

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие указания.....	3
1.1. Цель работы.....	3
1.2. Требования к оформлению.....	4
2. Указания для решения задачи №1 методами деления отрезка пополам и золотого сечения.....	5
3. Указания для решения задачи №2 методом градиентного поиска.....	12
Библиографический список.....	18

1. Общие указания

1.1. Цель работы

Выполнение данной работы ставит своей целью закрепление знаний и привитие практических навыков студентам по дисциплинам «Математическое моделирование систем и процессов» и «Математические методы оптимизации».

При расчетах автоматизированных технологических процессов и производств необходимо получать системы, которые являются наилучшими по некоторому критерию. Часто к системам предъявляются требования, которые противоречат друг другу. Например, при разработке автоматизированных сборочных линий, желательно, чтобы они имели наибольшую производительность, надежность, наименьшую стоимость, минимальные площади, энергопотребление и т.п. Понятно, что одновременно выполнить все эти условия невозможно, поэтому выбирают один наиболее важный в данных условиях параметр (в теории оптимизации целевой функции) и стремятся достичь его экстремального значения, при этом остальные параметры должны находиться в некоторых пределах, называемых ограничением.

Таким образом, задачу оптимизации можно сформулировать в общем виде. Найти экстремум целевой функции:

$$f(x_1, x_2, x_n)$$

При ограничениях на параметр x_i , заданных неравенствами:

$$x_{1n} \prec x_1 \prec x_{1k}, \quad x_{nh} \prec x_n \prec x_{nk}$$

где x_{ih} и x_{ik} - начальное и конечное значение x_i .

Целевая функция может быть сколь угодно сложной и задаваться целой системой уравнений. Несмотря на сложность целевой функции, методы оптимизации не изменяются, поэтому в заданиях для простоты расчетов задаются простые целевые функции в виде аналитических выражений.

Контрольные задания для студентов заочной формы обучения состоят из решения двух задач. Первая задача посвящена применению методов одномерной оптимизации: деление отрезка пополам и золотого сечения, для целевой функции, заданной квадратным полиномом.

Вторая задача посвящена применению метода градиентного поиска для отыскания экстремума функции двух переменных.

Варианты в заданиях определяются тремя последними цифрами номера зачетной книжки.

1.2. Требования к оформлению

Работа оформляется на бумаге формата А4, на одной стороне листа с соблюдением требований к текстовым документам, установленным ГОСТ 2.105-95 – ЕСКД. Общие требования к текстовым документам и ГОСТ 2.106-96 – ЕСКД. Текстовые документы.

2. Указания для решения задачи №1 методами деления отрезка пополам и золотого сечения

Требуется найти минимум целевой функции:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

на отрезке $[-b/2a - 1; -b/2a + 2]$ с точностью 2% методами:

- деления отрезка пополам;
- золотого сечения.

Значения коэффициентов a, b, c определяются тремя последними цифрами номера зачетной книжки (если одна цифра «ноль», то ее следует заменять на 1).

Пример.

Пусть номер зачетной книжки 290212, тогда $a=2, b=1, c=2$.

$$f(x) = 2x^2 + x + 2.$$

Начальный интервал неопределенности

$$[x_0, x_c] = [-1/4 - 1; -1/4 + 2] = [-1,25; 1,75].$$

1. Решение задачи методом деления отрезка пополам производится по алгоритму, приведенному на рисунке 1.

Порядок сужения интервала неопределенности показан на рисунке 2.

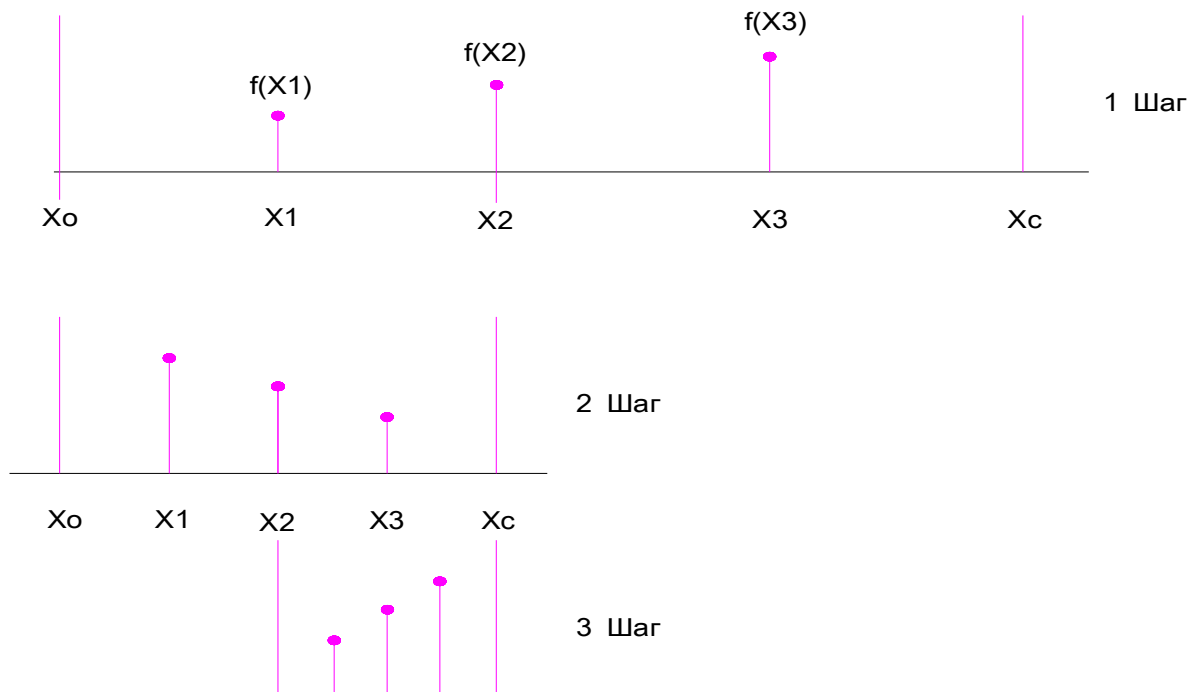


Рисунок 2- Порядок сужения интервала неопределенности в методе деления отрезка пополам.

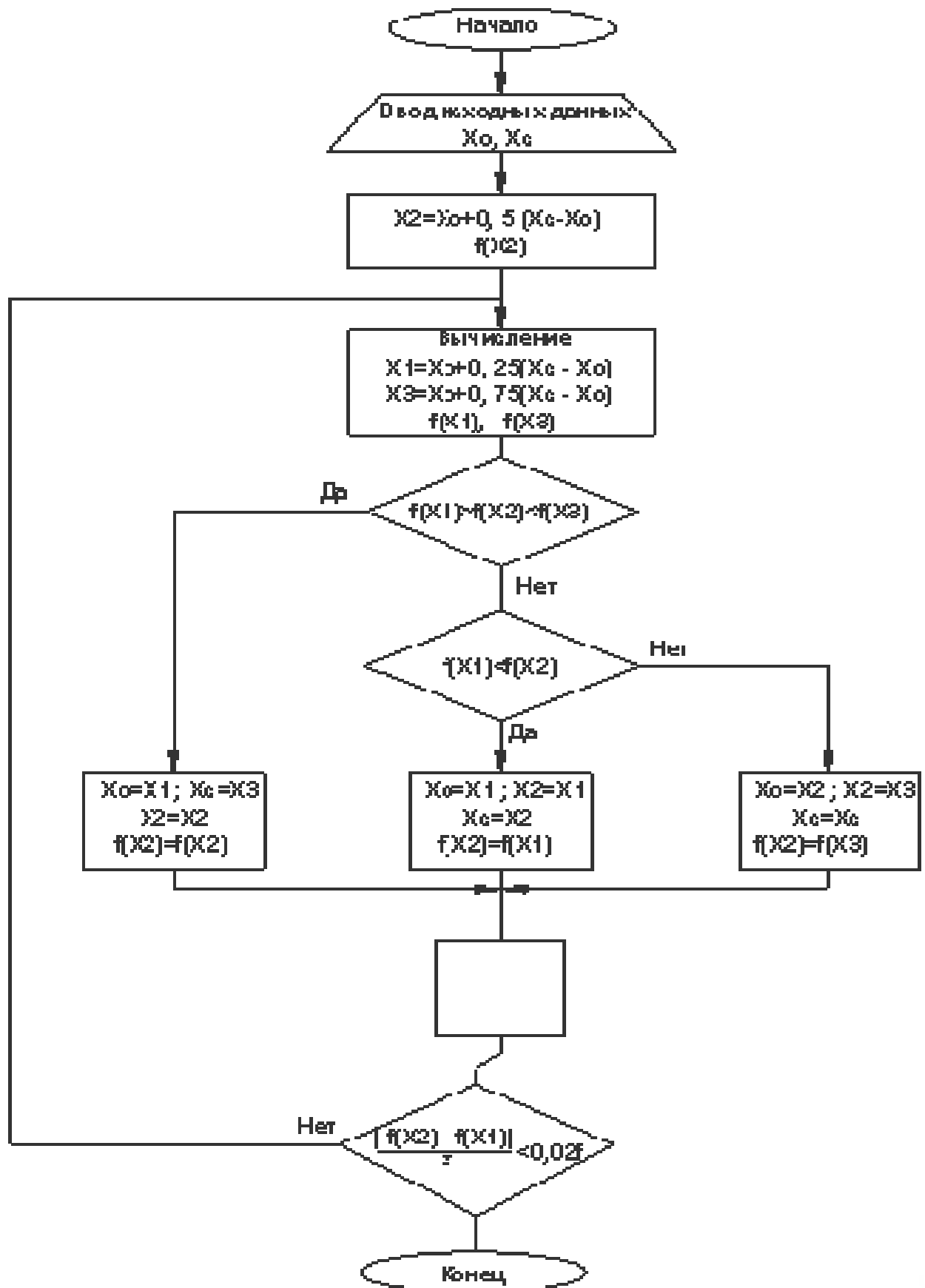


Рисунок 1 - Алгоритм метода деления отрезка пополам

Вычисления прекращаются при выполнении условия

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{\bar{f}} < 0,02\bar{f},$$

где $\bar{f} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ - среднее значение функции.

Результаты вычислений сводятся в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты вычислений методом деления отрезка пополам

№ шага	x_0	x_1	x_2	x_3	x_c	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$
1	-1,250	-0,500	-0,250	1	1,750	2	2,380	5
2	-1,250	-0,860	-0,500	-0,130	0,250	2,670	2	1,900
3	-0,500	-0,310	-0,130	0,060	0,250	1,880	1,80	2,070
4	-0,500	-0,410	-0,310	-0,220	-0,130	1,930	1,880	1,870
5	-0,310	-0,270	-0,220	-0,120	-0,130	1,876	1,870	1,885
6	-0,270				-0,180			
...								

Вычисления производить по шагам (на первых шагах условие (*) можно не проверять):

Шаг 1: $x_0 = -1,25$; $x_c = 1,75$

$$x_1 = x_0 + 0,25(x_3 - x_0) = -1,25 + 0,25(1,75 + 1,25) = -0,5$$

$$x_2 = x_0 + 0,5(x_3 - x_0) = -1,25 + 0,5(1,75 + 1,25) = -0,25$$

$$x_3 = x_0 + 0,75(x_3 - x_0) = -1,25 + 0,75(1,75 + 1,25) = 1$$

$$f(x_1) = 2 \cdot 0,5^2 - 0,5 + 2 = 2$$

$$f(x_2) = 2 \cdot 0,5^2 + 0,25 + 2 = 2,38$$

$$f(x_3) = 2 \cdot 1 + 1 + 2 = 5$$

$$f(x_1) \prec f(x_2)$$

$$\text{Шаг 2: } x_0 = -1,25; \quad x_c = x_2 = 0,25; \quad f(x_2) = f(x_1) = 2$$

$$x_1 = -1,25 + 0,25(0,25 + 1,25) = -0,88$$

$$x_3 = -1,25 + 0,75(0,25 + 1,25) = -0,13$$

$$f(x_1) = 2 \cdot 0,88^2 - 0,88 + 2 = 2,67$$

$$f(x_3) = 2 \cdot 0,88^2 + 0,88 + 2 = 1,9$$

$$f(x_3) \prec f(x_2), \text{ то есть } f(x_1) \succ f(x_2)$$

$$\text{Шаг 3: } x_0 = -0,5; \quad x_c = x_c = 0,25; \quad f(x_2) = f(x_3) = 1,9$$

$$x_1 = -0,5 + 0,25(0,25 + 0,5) = -0,31$$

$$x_3 = -0,5 + 0,75(0,25 + 0,5) = 0,06$$

$$f(x_1) = 2 \cdot 0,31^2 - 0,31 + 2 = 1,88$$

$$f(x_3) = 2 \cdot 0,06^2 + 0,06 + 2 = 2,07$$

$$f(x_3) \prec f(x_2)$$

$$\text{Шаг 4: } x_0 = -0,5; \quad x_c = x_2 = 0,13; \quad f(x_2) = f(x_1) = 1,88$$

$$x_1 = -0,5 + 0,25(-0,13 + 0,5) = -0,41$$

$$x_3 = -0,5 + 0,75(-0,13 + 0,5) = -0,22$$

$$f(x_1) = 2 \cdot 0,41^2 - 0,41 + 2 = 1,93$$

$$f(x_3) = 2 \cdot 0,22^2 + 0,22 + 2 = 1,87$$

$$f(x_3) \prec f(x_2), \text{ то есть } f(x_1) \succ f(x_2)$$

$$\text{Шаг 5: } x_0 = x_2 = -0,31; \quad x_c = 0,13; \quad f(x_2) = f(x_3) = 1,87$$

$$x_1 = -0,31 + 0,25(-0,13 + 0,31) = -0,27$$

$$x_3 = -0,31 + 0,75(0,13 + 0,31) = -0,18$$

$$f(x_1) = 2 \cdot 0,27^2 - 0,27 + 2 = 1,876$$

$$f(x_3) = 2 \cdot 0,18^2 + 0,18 + 2 = 1,885$$

$$f(x_2) < f(x_1), \quad f(x_2) < f(x_3)$$

Проверим условие (*):

$$\bar{f} = \frac{1,876 + 1,87}{2} = 1,873$$

$$0,02 \cdot \bar{f} = 0,037$$

$$\frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{\bar{f}} = \frac{|1,876 - 1,87|}{1,876} = 0,0032 < 0,02 \bar{f},$$

Следовательно, вычисления можно прекратить.

Шаг 6: $x_0 = x_1 = -0,27$; $x_c = x_3 = -0,18$.

Таким образом, проводя вычисления можно сделать вывод, минимум целевой функции $f(x) = 1,87$ находится в диапазоне $[-0,27; -0,18]$.

Для проверки полученного решения найдем производную целевой функции: $f'(x) = 4x + 1$;

Приравняв производную к нулю, определим точку минимума $x_{\min}$:

$$f'(x) = 4x + 1 = 0; \quad x_{\min} = -0,25; \quad f(x_{\min}) = 1,88.$$

Найденное решение $x_{\min} \in [-0,27; -0,18]$, следовательно, задача решена правильно.

2. Решение задачи методом золотого сечения производится по алгоритму, приведенному на рисунке 3. Порядок сужения интервала показан на рисунке 4.

Результаты вычислений сводятся в таблицу 2.

Шаг 1: $x_0 = -1,25$; $x_c = 1,75$

$$x_1 = x_0 + 0,382(x_c - x_0) = -1,25 + 0,382(1,75 - (-1,25)) = -0,1$$

$$x_2 = x_0 + 0,618(x_c - x_0) = -1,25 + 0,618(1,75 + 1,25) = 0,6$$

$$f(x_1) = 2 \cdot 0,1^2 - 0,1 + 2 = 1,92$$

$$f(x_2) = 2 \cdot 0,6^2 + 0,6 + 2 = 3,32$$

$$f(x_1) \prec f(x_2)$$

$$\text{Шаг 2: } x_0 = -1,25; \quad x_c = x_2 = 0,6; \quad f(x_2) = f(x_1) = 3,32$$

$$x_1 = x_0 + 0,382(x_c - x_0) = -1,25 + 0,382(0,6 + 1,25) = -0,54$$

$$f(x_1) = 2 \cdot 0,54^2 - 0,54 + 2 = 2,04$$

$$f(x_2) \prec f(x_1)$$

$$\text{Шаг 3: } x_0 = x_1 = -0,54; \quad x_c = 0,6; \quad f(x_2) = f(x_1) = 1,92$$

$$x_2 = x_0 + 0,618(x_c - x_0) = -0,54 + 0,618(0,6 + 0,54) = 0,16$$

$$f(x_2) = 2 \cdot 0,16^2 - 0,16 + 2 = 2,21$$

$$f(x_2) \succ f(x_1)$$

$$\text{Шаг 4: } x_0 = -0,54; \quad x_c = x_2 = 0,1; \quad f(x_2) = f(x_1) = 1,876$$

$$x_1 = -0,54 + 0,382(-0,1 + 0,54) = -0,37$$

$$f(x_1) = 2 \cdot 0,37^2 - 0,37 + 2 = 1,9$$

$$f(x_2) \prec f(x_1)$$

Проверим условие (*):

$$\bar{f} = \frac{1,9 + 1,876}{2} = 1,888$$

$$0,02 \cdot \bar{f} = 0,038$$

$$\frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{\bar{f}} = \frac{|1,9 - 1,876|}{1,888} = -0,013 \prec 0,02\bar{f}.$$

$$\text{Шаг 6: } x_0 = x_1 = -0,37; \quad x_c = -0,1.$$

Следовательно, целевая функция достигает минимума $f(x) = 1,89$ на интервале $[-0,37; -0,1]$, что совпадает с результатами, полученными при решении задачи методом деления отрезка пополам.

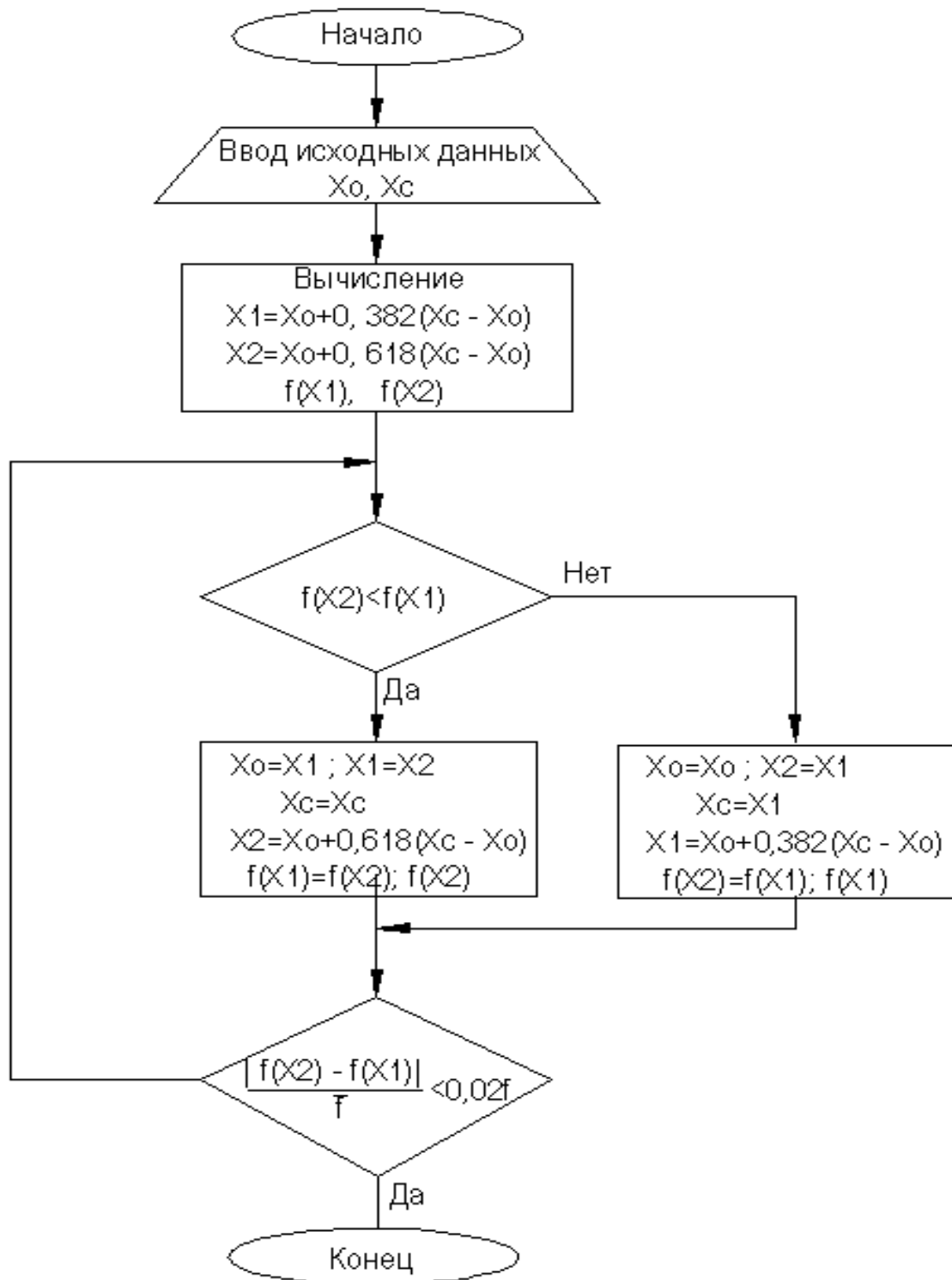


Рисунок 3 - Алгоритм метода золотого сечения

Таблица 2 – Результаты вычислений методом золотого сечения

№ шага	x_0	x_1	x_2	x_c	$f(x_1)$	$f(x_2)$
1	-1,250	-0,100	0,600	1,750	1,920	3,320
2	-1,250	-0,540	-0,100	0,600	2,040	1,920
3	-0,540	-0,100	0,160	0,600	1,920	2,210
4	-0,540	-0,270	-0,100	0,160	1,876	1,920
5	-0,540	-0,370	-0,270	-0,100	1,900	1,876
6	-0,370		-0,100			

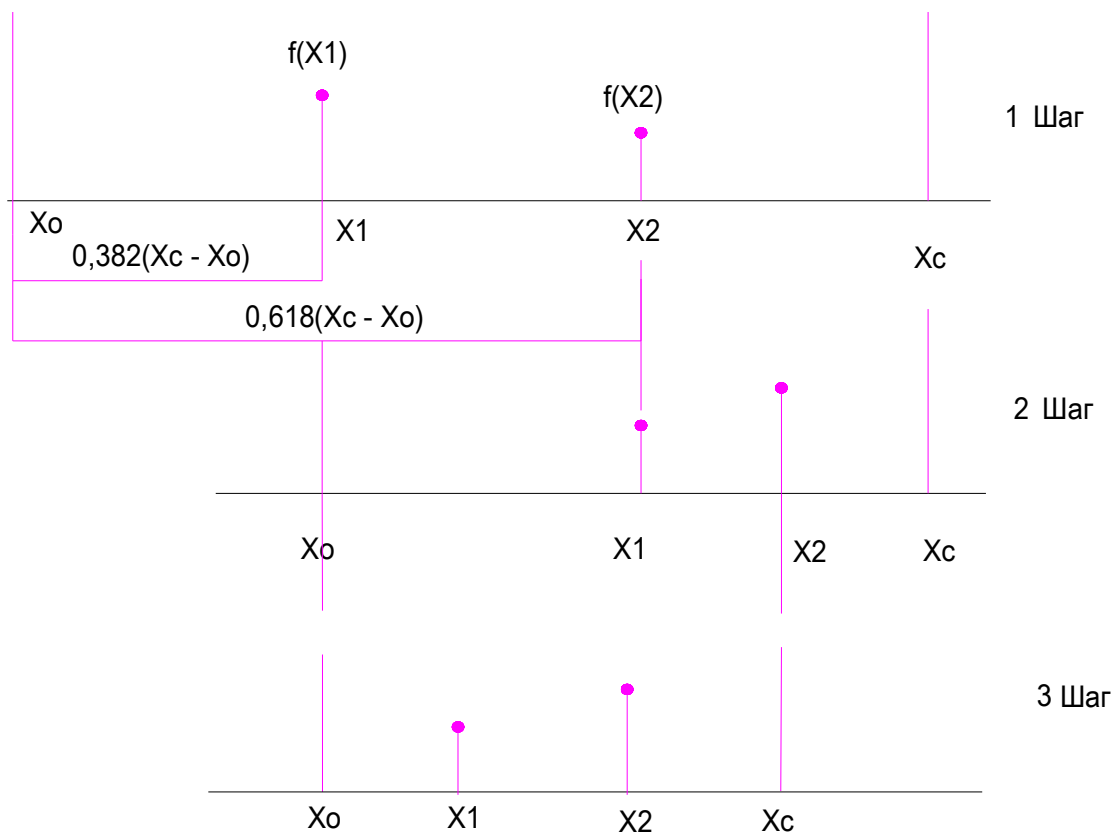


Рисунок 4 – Порядок сужения интервала неопределенности в методе золотого сечения

3. Указания для решения задачи №2 методом градиентного поиска

Требуется найти минимум целевой функции:

$$f(x, y) = ax^2 + by^2$$

методом градиентного поиска, при этом область изменения аргумента задается неравенствами:

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 1. \end{aligned} \quad (**)$$

Поиск начинается из точки с координатами $x_0 = 1$, $y_0 = 0,5$.

Значения коэффициентов a и b определяются аналогично задаче 1. Вычисления прекращаются при $f(x, y) \leq 0,005$.

Пример. Решение задачи методом градиентного поиска осуществляется в соответствии с алгоритмом, представленным на рисунке 4.

Направляющие косинусы определяются по формулам:

$$v_x = \frac{\partial f / \partial x}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}}; \quad v_y = \frac{\partial f / \partial y}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}}.$$

Приращения аргументов вычисляются из выражений:

$$\Delta x = \alpha \cdot v_x; \quad \Delta y = \alpha \cdot v_y,$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\sqrt{(1 - x_{\min} / x_{\max})^2 + (1 - y_{\min} / y_{\max})^2}}{n};$$

$x_{\min}$, $y_{\min}$, $x_{\max}$, $y_{\max}$ - минимальные и максимальные значения аргументов; $n = 5 \dots 10$ - предполагаемое количество шагов вычислений.

Если при изменении аргументов, их значения выходят за границы, заданные неравенствами (**), то дальнейшее движение осуществляется по границе возможных значений.

Если на i -м шаге выполняется неравенство:

$f_i > f_{i-1}$, где f_{i-1}, f_i - значение целевой функции на предыдущем и последующих шагах, то это значит, что при поиске пройдена точка минимума. В этом случае требуется возвратиться к предыдущей точке и двигаться в прежнем направлении, но с уменьшенным шагом $\alpha' = \alpha / n$.

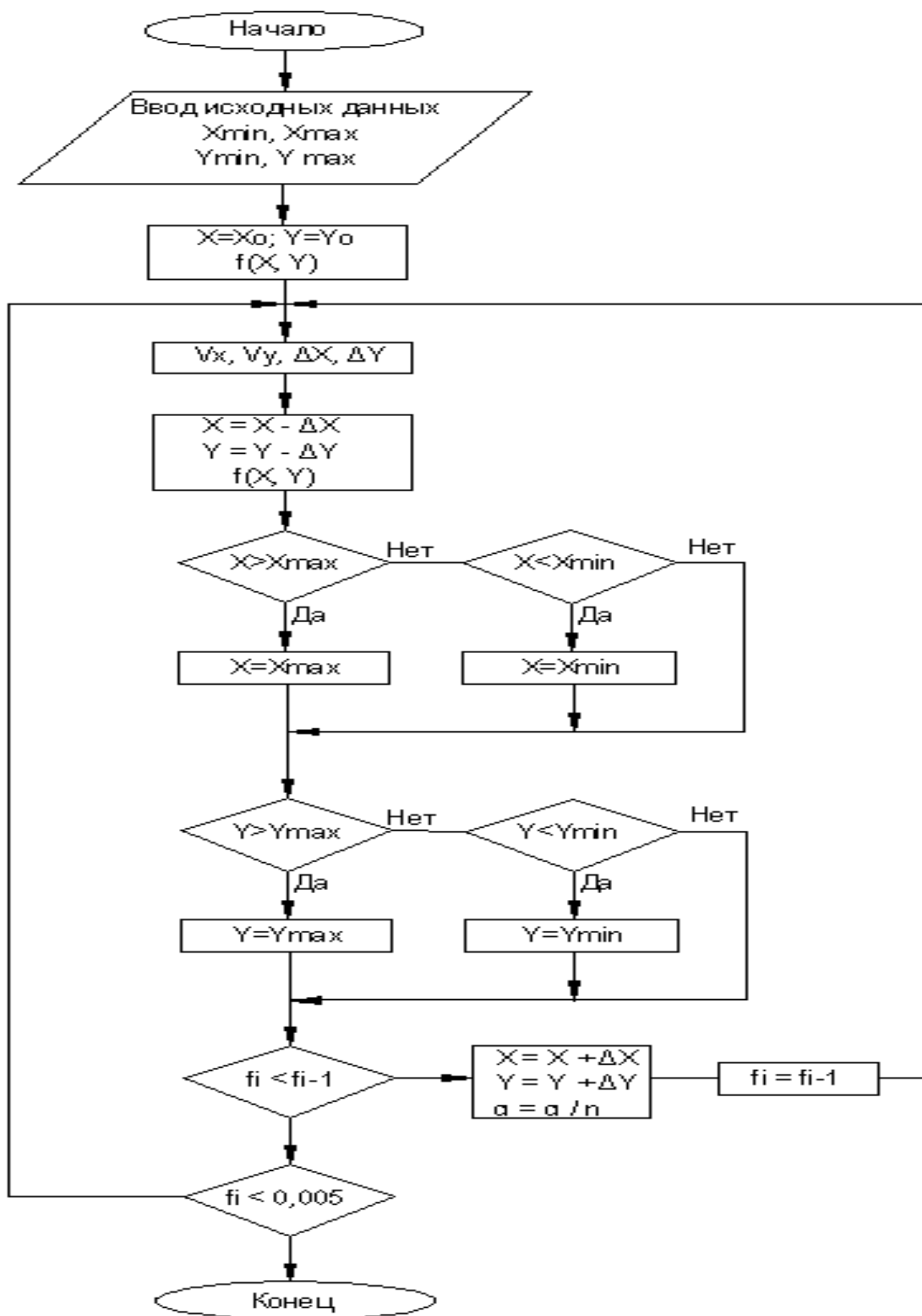


Рисунок 5 - Алгоритм метода градиентного поиска

Данные вычислений сводятся в таблицу 3.

Таблица 3 - Результаты решения методом градиентного поиска

№ шага	x	y	$f(x, y)$	v_x	v_y	Δ_x	Δ_y
1	1	0,500	2,250	0,970	0,240	0,390	0,096
2	0,610	0,400	0,900	0,940	0,340	0,380	0,140
3	0,230	0,260	0,180	0,930	0,360	0,370	0,140
4	-0,140	0,120	0,051	-0,920	0,390	-0,370	0,160
5	0,230	-0,040	0,110				
6	-0,140	0,120	0,050	-0,92	0,390	-0,190	0,080
7	0,050	0,040	0,0066	0,910	0,370	0,180	0,074
8	-0,130	-0,100	0,044				
9	0,050	0,040	0,0066	-0,92	0,390	0,360	0,015
10	0,014	0,025	0,001				

$$\beta = \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2} ;$$

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 ;$$

$$\partial f / \partial x = 4x, \quad \partial f / \partial y = 2y, \quad \beta = \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2} .$$

Шаг 1.

$$x = 1, \quad y = 0,5; \quad \alpha = \frac{\sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2}}{20} = 0,4.$$

$$f(x, y) = 2 \cdot 1^2 + 0,5^2 = 2,25 .$$

$$\partial f / \partial x = 4 \cdot 1 = 4, \quad \partial f / \partial y = 1; \quad \beta = \sqrt{16 + 1} = 4,12 .$$

$$v_x = \frac{4}{4,12} = 0,97; \quad v_y = \frac{1}{4,12} = 0,24 .$$

$$\Delta_x = \alpha \cdot v_x, \quad \Delta_x = 0,4 \cdot 0,97 = 0,39 ;$$

$$\Delta_y = \alpha \cdot v_y, \Delta_y = 0,4 \cdot 0,24 = 0,096.$$

Шаг 2.

$$x = 1 - 0,39 = 0,61;$$

$$y = 0,5 - 0,096 = 0,4;$$

$$f(x, y) = 2 \cdot 0,61^2 + 0,4^2 = 0,9;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 \cdot 0,61 = 2,24, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot 0,4 = 0,8;$$

$$v_x = 2,24 / 2,38 = 0,94; \quad v_y = 0,8 / 2,38 = 0,34.$$

$$\Delta_x = 0,4 \cdot 0,94 = 0,38; \quad \Delta_y = 0,4 \cdot 0,34 = 0,14.$$

Шаг 3.

$$x = 0,61 - 0,38 = 0,23;$$

$$y = 0,4 - 0,14 = 0,26;$$

$$f(x, y) = 2 \cdot 0,23^2 + 0,26^2 = 0,18$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 \cdot 0,23 = 0,92, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot 0,26 = 0,52;$$

$$v_x = 0,92 / 0,99 = 0,93; \quad v_y = 0,52 / 0,99 = 0,52.$$

$$\Delta_x = 0,4 \cdot 0,93 = 0,37; \quad \Delta_y = 0,4 \cdot 0,52 = 0,21.$$

Шаг 4.

$$x = 0,23 - 0,37 = -0,14;$$

$$y = 0,26 - 0,21 = 0,05;$$

$$f(x, y) = 2 \cdot (-0,14)^2 + 0,05^2 = 0,04$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 \cdot (-0,14) = -0,56, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot 0,05 = 0,1;$$

$$v_x = -0,56 / 0,61 = -0,92; \quad v_y = 0,1 / 0,61 = 0,16.$$

$$\Delta_x = 0,4 \cdot (-0,92) = -0,37; \quad \Delta_y = 0,4 \cdot 0,16 = 0,06.$$

Шаг 5.

$$x = -0,14 + 0,37 = 0,23;$$

$$y = 0,05 - 0,06 = -0,01;$$

$$f(x, y) = 2 \cdot 0,23^2 + (-0,01)^2 = 0,11.$$

Значение целевой функции $f(x, y)$ на пятом шаге больше, чем на четвертом, хотя на предыдущих шагах оно постепенно уменьшалось. Следовательно, необходимо вернуться на четвертый шаг, так как оптимальная точка пройдена, и значения целевой функции начали возрастать при нахождении минимума целевой функции согласно постановке задачи.

Шаг 6.

$$x = -0,14, \quad y = 0,12.$$

Уменьшаем размер последующих шагов $\alpha = 0,4 / 2 = 0,2$.

$$\Delta_x = -0,37 / 2 = -0,19, \quad \Delta_y = 0,16 / 2 = 0,08.$$

Шаг 7.

$$x = -0,14 + 0,19 = 0,05;$$

$$y = 0,12 - 0,08 = 0,04;$$

$$f(x, y) = 2 \cdot 0,05^2 + 0,04^2 = 0,0066.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 \cdot (-0,05) = -0,2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot 0,04 = 0,08;$$

$$v_x = -0,2 / 0,22 = -0,91; \quad v_y = 0,08 / 0,22 = 0,37;$$

$$\Delta_x = -0,2 \cdot (-0,91) = 0,18; \quad \Delta_y = 0,08 \cdot 0,37 = 0,03.$$

Шаг 8.

$$x = 0,05 - 0,18 = -0,13;$$

$$y = 0,04 - 0,14 = -0,1;$$

$$f(x, y) = 2 \cdot 0,13^2 + 0,01^2 = 0,034.$$

Шаг 9.

$$x = -0,14 + 0,19 = 0,05;$$

$$y = 0,12 - 0,08 = 0,04;$$

$$f(x, y) = 2 \cdot 0,05^2 + 0,04^2 = 0,0066.$$

Библиографический список

1. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. – 328 с., ил.
2. Турчак Л.И. Основы численных методов. М.: Наука, 1987.- 320 с.
3. Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. – 289 с.
4. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. М.: Энергоатомиздат, 1987. - 496 с.

Заказ № _____ от « ____ » _____ 2013. Тираж _____ экз.

Изд-во СевНТУ

