

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
по дисциплине «Теория устойчивости движения»
для студентов направления 6.070106
"Автомобильный транспорт"
дневной формы обучения

Севастополь
2014

Методические указания к проведению практических занятий по дисциплине «Теория устойчивости движения» /Сост. В.Н. Торлин, Т.А. Рогозина, Л.А. Кияшко. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2014. – 20 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам при изучении курса «Теория устойчивости движения». Излагаются справочные данные, необходимые для решения задач, порядок получения решений и оформления отчета по практическому занятию.

Методические указания предназначены для студентов направления 6.070106 «Автомобильный транспорт» дневной формы обучения.

Методические указания рассмотрены и утверждены кафедрой «Автомобильного транспорта»
(протокол №3 от 18 ноября 2013 г.)

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний

Рецензент: Новоселов Ю.К., доктор технических наук, профессор.

Содержание

1. Практическая работа №1. Определение числа степеней подвижности механических систем.....	4
2. Практическая работа №2. Составление дифференциальных уравнений движения автомобильных систем. Типовые математические модели.....	5
3. Практическая работа №3. Исследование устойчивости движения системы прямым интегрированием дифференциальных уравнений.....	7
4. Практическая работа №4. Нормальная форма дифференциальных уравнений и фазовые координаты.....	9
5. Практическая работа №5. Первая теорема Ляпунова. Определитель Гурвица.....	11
6. Практическая работа №6. Устойчивость по первому приближению.....	13
7. Практическая работа №7. Вторая теорема Ляпунова.....	14
8. Практическая работа №8. Метод Михайлова.....	16

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ ПОДВИЖНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель работы: приобретение студентами навыков в области идентификации связей в механических системах, определении их числа и определении числа степеней подвижности систем.

1.1. Теоретический раздел

Условия, стесняющие свободу движения элементов системы, называются связями. Число независимых координат системы, однозначно определяющих положение всех элементов, называется числом степеней свободы (подвижности). Например, тяжелая сфера, движущаяся в пространстве, имеет шесть степеней подвижности, а находящаяся на плоской поверхности имеет одну связь и пять степеней подвижности. Перемещения по осям X и Y , повороты в направлении углов Эйлера θ , φ , ψ – это степени подвижности. Контакт с поверхностью по оси Z определяет одну связь. Колесо, вращающееся на неподвижной оси, имеет одну степень подвижности. Автомобиль, рассматриваемый как механическая система, имеет более ста степеней подвижности.

1.2. Порядок выполнения задания

Для получения искомого числа степеней подвижности заданной механической системы необходимо:

- изобразить схему механической системы;
- ввести систему координат;
- определить связи, действующие на элементы системы;
- определить число степеней подвижности системы;
- изобразить на схеме системы найденные движения.

1.3. Набор типовых задач для решения на занятии

Необходимо определить число степеней подвижности следующих систем:

- плоскопараллельная модель двухосного автомобиля;
- пространственная модель автомобиля с колесной формулой 4×2 ;
- модель седельного тягача с полуприцепом;
- модель двухколесного транспортного средства (мотоцикл, велосипед);
- модель прицепного тягача с прицепом.

В качестве индивидуального задания может быть решена задача по определению числа степеней подвижности шестиосного транспортного средства.

1.4 Содержание отчета о практическом занятии

- 1) Схема заданной системы с осями координат и нанесенными движениями (прямолинейные движения по осям обозначать X_i, Y_i, Z_i , круговые – $\varphi_i, \psi_i, \omega_i$, где i – номер элемента системы).
- 2) Найденное число степеней подвижности системы.

1.5 Контрольные вопросы

При защите отчета студент должен ответить на следующие вопросы:

- 1) Что называется связью?
- 2) Что называется степенью подвижности?
- 3) Сколько степеней подвижности имеют типовые звенья автомобильных систем?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Цель работы: приобретение студентами навыков в области математического моделирования процессов движения автомобильных систем.

2.1. Теоретический раздел

Автомобиль может двигаться по прямолинейной и криволинейной траекториям, на подъем и по спуску, по ровной и извилистой дорогам, со скоростью менее 90 км/ч и более. Для моделирования этих движений применяются дифференциальные уравнения различного типа и системы дифференциальных уравнений. Для моделирования прямолинейного движения одномассовой системы применяется уравнение типа

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad (2.1)$$

где F_x – сила, зависящая либо от времени t , либо от положения, либо от скорости движения, Н;

m – масса, кг.

В общем случае движение многомассовой системы описывается матричным уравнением типа

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} = \{Q\}, \quad (2.2)$$

где число элементов матриц равно числу степеней подвижности системы.

2.2. Порядок выполнения задания

Для составления дифференциального уравнения или системы уравнений, моделирующих процессы в автомобильных системах, необходимо:

- изобразить схему моделируемого объекта;
- определить независимые переменные;
- разработать схему сил, действующих на систему;
- записать типовые дифференциальные уравнения (2.1, 2.2);
- уточнить вид коэффициентов при производных и определить вид функции в правой части уравнения.

2.3. Набор типовых задач для решения на занятии

В качестве задачи может быть выполнено задание по составлению дифференциального уравнения движения автомобильных систем в следующих условиях:

- равноускоренное движение автомобиля при нулевой начальной скорости;
- движение автомобиля по дороге с заданным профилем ($z=f(t)$);
- движение автомобиля по дороге с заданным углом подъема;
- движение автомобиля по криволинейной траектории с заданным радиусом поворота;
- движение автомобиля с заданной скоростью.

2.4. Содержание отчета о практическом занятии

1) Схема моделируемого объекта с нанесенными на него координатными движениями и силами, действующими на систему.

2) Дифференциальные уравнения, моделирующие движение заданной системы.

2.5. Контрольные вопросы

При защите отчета студент должен ответить на следующие вопросы:

- 1) К какому типу относится составленное дифференциальное уравнение?
- 2) Какой физический смысл имеют коэффициенты при производных?
- 3) Какой физический смысл имеет выражение, стоящее в правой части уравнения?
- 4) Какие модели дороги вы знаете?
- 5) Что такое матрица жесткости?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ПРЯМЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: приобретение студентами навыков в области исследования устойчивости движения систем прямым интегрированием дифференциальных уравнений.

3.1. Теоретический раздел

Исследовать динамическое поведение системы или отдельных ее элементов можно путем интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих их поведение во времени. В случае если процесс описывается дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами типа

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + c = 0, \quad (3.1)$$

вид решения такого уравнения зависит от вида корней характеристического уравнения. Возможны четыре случая:

1) Если корни характеристического уравнения вещественные и разные, то решение имеет вид

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}; \quad (3.2)$$

2) Если корни вещественные, но равные, то

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{r_1 t}; \quad (3.3)$$

3) Если корни комплексные сопряженные числа $r_1 = a + ib; r_2 = a - ib$, то

$$x = e^{at} (c_1 \cos bt + c_2 \sin bt); \quad (3.4)$$

4) Если корни чисто мнимые числа $r_1 = bi; r_2 = -bi$, то

$$x = c_1 \sin bt + c_2 \cos bt. \quad (3.5)$$

Если при $t \rightarrow \infty$ процесс расходится, то движение неустойчивое, если асимптотически стремится к 0 – то устойчивое. Для колебательного процесса устойчивость характеризуется временем затухания колебаний.

3.2. Порядок выполнения задания

Для оценки устойчивости движения, заданного дифференциальным уравнением, необходимо:

- составить соответствующее характеристическое уравнение;
- исследовать корни характеристического уравнения (3.2 – 3.5);
- построить решение заданного дифференциального уравнения в виде $x=f(t)$;
- построить график изменения искомой величины во времени;
- определить характер поведения построенной кривой при $t \rightarrow \infty$ и сделать заключение об устойчивости заданного движения.

3.3. Набор типовых задач для решения на занятии

Задачи, решаемые на этом занятии, имеют следующую типовую формулировку: определить устойчивость движения, описываемого следующим дифференциальным уравнением:

$$1. \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0; \quad 5. \ddot{y} - 4\dot{y} + 13y = 0;$$

$$2. \ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0; \quad 6. \ddot{y} + 16y = 0;$$

$$3. \ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0; \quad 7. \ddot{y} - 4\dot{y} - 3y = 0;$$

$$4. \ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 0; \quad 8. \ddot{y} + 9\dot{y} - 4y = 0.$$

3.4. Содержание отчета о практическом занятии

Отчет должен содержать:

- 1) Исходное дифференциальное уравнение и соответствующее характеристическое уравнение.
- 2) Решение уравнения в виде $x=f(t)$.
- 3) График $x=f(t)$ при $t \rightarrow \infty$;
- 4) Заключение об устойчивости исследуемого процесса.

3.5. Контрольные вопросы

При защите отчета студент должен ответить на следующие вопросы:

- 1) Какие основные признаки линейного дифференциального уравнения вы знаете?
- 2) Какой вид имеет решение дифференциального уравнения, если корни его характеристического уравнения вещественные разные числа?
- 3) Какой вид имеет решение дифференциального уравнения, если корни его характеристического уравнения комплексные числа?
- 4) Какой вид имеет решение дифференциального уравнения, если корни его характеристического уравнения чисто мнимые?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ФАЗОВЫЕ КООРДИНАТЫ

Цель работы: приобретение студентами навыков приведения дифференциальных уравнений к нормальному виду и использование фазовых координат.

4.1. Теоретический раздел

Для использования основных теорем теории устойчивости движения необходимо от уравнений высокого порядка перейти к системе уравнений первого порядка. Прием понижения степени дифференциального уравнения осуществляется следующим образом. Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + k^2y = 0. \quad (4.1)$$

Положим $y = y_1$, а $\dot{y} = y_2$, тогда подставив эти обозначения в исходное уравнение, получим

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = -2hy_2 - k^2y_1, \\ \dot{y}_1 = y_2; \end{cases} \quad (4.2)$$

или

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

Последние два уравнения представлены в нормальной форме, а y_1 и y_2 называются фазовыми координатами. Для исследования устойчивости системы с помощью фазовых координат необходимо решить соответствующее характеристическое уравнение, корни которого дадут фазовый портрет системы. В общем случае комплексных корней $r_{1,2} = p \pm iq$, имеют место следующие случаи:

- 1) $r_1 \neq r_2, r_1 < 0, r_2 < 0$ - фазовый портрет представляет собой устойчивый узел;
- 2) $r_1 \neq r_2, r_1 > 0, r_2 > 0$ - неустойчивый узел;
- 3) $r_1 \neq r_2, r_1 > 0, r_2 < 0$ - седло;
- 4) $r_{1,2} = \pm iq$ - чисто мнимые корни дают устойчивый центр;
- 5) $r_{1,2} = p \pm iq$ - комплексные корни при $p < 0, q \neq 0$ дают устойчивый фокус;
- 6) $r_{1,2} = p \pm iq$ - комплексные корни при $p > 0, q \neq 0$ дают неустойчивый фокус.

4.2. Порядок выполнения задания

Для оценки устойчивости движения путем приведения заданного дифференциального уравнения к нормальной форме и с использованием фазовых координат необходимо:

- привести заданное дифференциальное уравнение к нормальной форме (4.3);
- составить характеристическое уравнение;
- определить корни характеристического уравнения;
- построить соответствующий фазовый портрет;
- сделать заключение об устойчивости заданного движения.

4.3. Набор типовых задач для решения на занятии

Типовые задачи могут иметь следующую формулировку: исследовать устойчивость движения с использованием фазовых координат, заданного уравнением:

$$\begin{array}{ll} 1. \ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0; & 3. \ddot{y} + 9y = 0; \\ 2. \ddot{x} + 6\dot{x} - 9x = 0; & 4. 2\ddot{y} - 5\dot{y} + y = 0. \end{array}$$

4.4. Содержание отчета о практическом занятии

- 1) Исходное дифференциальное уравнение.
- 2) Соответствующую систему уравнений в нормальной форме.
- 3) Соответствующее характеристическое уравнение;
- 4) Корни характеристического уравнения.
- 5) Соответствующий фазовый портрет.
- 6) Заключение об устойчивости заданного движения.

4.5. Контрольные вопросы

При защите отчета студент должен ответить на следующие вопросы:

- 1) Что такое нормальная форма уравнений?
- 2) Что такое фазовые координаты?
- 3) Что такое фазовый портрет?
- 4) О чем свидетельствует фазовый портрет в виде устойчивого (неустойчивого) узла?
- 5) О чем свидетельствует фазовый портрет в виде устойчивого (неустойчивого) фокуса?

Цель работы: приобретение студентами навыков использования первой теоремы Ляпунова к анализу устойчивости движения.

В общем случае система дифференциальных уравнений имеет вид

[illegible]

$$x_n = A_n e^{\lambda t}. \quad (5.2)$$
$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3)$$
$$B_1\lambda^n + B_2\lambda^{n-1} + B_3\lambda^{n-2} + \dots + B_n = 0. \quad (5.4)$$

Первая теорема Ляпунова формулируется следующим образом [8]: если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, то движение устойчиво, если хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть, то движение неустойчиво.

5.2. Порядок выполнения задания

Для оценки устойчивости движения, заданного дифференциальным уравнением, необходимо:

- привести заданное дифференциальное уравнение к нормальной форме (5.1);
- составить определитель Гурвица (5.3);
- определить характеристическое уравнение и найти его корни;
- используя теорему Ляпунова, сделать заключение об устойчивости заданного движения.

5.3. Набор типовых задач для решения на занятии

Типовые задачи могут иметь следующую формулировку: определить устойчиво ли движение, описываемое следующим дифференциальным уравнением:

1. $\ddot{y} + 10\dot{y} + 2y = 0;$

3. $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0;$

2. $\ddot{y} - 9\dot{y} + 4y = 0;$

4. $4\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0.$

5.4. Содержание отчета о практическом занятии

- 1) Исходное дифференциальное уравнение.
- 2) Соответствующую систему уравнений в нормальной форме.
- 3) Определитель Гурвица.
- 4) Соответствующее характеристическое уравнение;
- 5) Корни характеристического уравнения.
- 6) Заключение об устойчивости заданного движения.

5.5. Контрольные вопросы

При защите отчета студент должен ответить на следующие вопросы:

- 7) Что представляет собой определитель Гурвица?
- 8) Относительно какого параметра составляется характеристическое уравнение?
- 9) Сформулировать первую теорему Ляпунова.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Цель работы: приобретение студентами навыков анализа устойчивости систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями.

6.1. Теоретический раздел

Ряд автомобильных систем содержит нелинейные элементы (резиновые детали, рессоры и др.), в результате чего процессы, происходящие в таких системах, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями типа

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \underline{a_{13}x_1x_2 + a_{14}x_1^2x_2}, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \underline{a_{23}x_1x_2^2 + a_{24}x_1^2x_2^2},\end{aligned}\tag{6.1}$$

последние два слагаемых описывают нелинейные процессы. Метод, разработанный Ляпуновым, предполагает возможность отбросить нелинейные слагаемые и проанализировать оставшиеся слагаемые по типовой методике, характеризующей в таком случае устойчивость по первому приближению.

6.2. Порядок выполнения задания

Для оценки устойчивости движения, заданного нелинейными дифференциальными уравнениями нормального вида, необходимо:

- отбросить нелинейные слагаемые;
- составить определитель Гурвица для линеаризованной системы;
- получить характеристическое уравнение;
- найти корни характеристического уравнения;
- используя первую теорему Ляпунова, сделать заключение об устойчивости заданного движения.

6.3. Набор типовых задач для решения на занятии

Типовые задачи могут иметь следующую формулировку: определить устойчиво ли движение, описываемое следующим дифференциальным уравнением (системой уравнений):

$$1) \quad \begin{cases} \dot{x}_2' = x_1 - x_2 - 3x_1^3, \\ \dot{x}_1' = 3x_2 - 4x_1 + 3x_1^2x_2; \end{cases} \quad 2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + x_1x_2 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_2 + 3x_1 - 2x_1^2x_2^2; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \begin{cases} y_1' = y_2 + 3y_1^2 y_2^2 - 4y_1^5, \\ y_2' = -y_1 - y_2^3 + y_1^3 y_2; \end{cases} & 4) \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2^3 - 2x_1 + 4x_1^3 x_2 - 3x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_1 x_2^2 - 2x_1^3 x_2^2 + x_2; \end{cases} \\
 5) \quad & \dot{x}_1 = 4x_1^2 x_2^3 - 2x_1 x_2 + 3x_1 - 4x_1 x_2^3
 \end{aligned}$$

6.4. Содержание отчета о практическом занятии

Отчет должен содержать:

- 1) Исходную систему дифференциальных уравнений.
- 1) Определитель Гурвица.
- 2) Характеристическое уравнение.
- 3) Корни уравнения.
- 4) Заключение об устойчивости движения.

6.5. Контрольные вопросы

При защите отчета студент должен ответить на следующие вопросы:

- 5) Чем отличается нелинейное дифференциальное уравнение от линейного?
- 6) Почему можно отбросить нелинейные слагаемые?
- 7) Что такое определитель Гурвица?
- 8) Что такое устойчивость по первому приближению?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА

Цель работы: приобретение студентами навыков анализа устойчивости систем с помощью второй теоремы Ляпунова.

7.1. Теоретический раздел

Функция называется определенно-положительной или знакоопределенной, если она в точке $x_1 = x_2 = x_n$ обращается в нуль и имеет в этой точке минимум. Эти функции ввел Ляпунов. Вторая теорема Ляпунова формулируется следующим образом [8]: если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию v , производная v' которой в силу этих уравнений будет знакопостоянной функцией противоположного знака с v , то движение, описываемое данными уравнениями, устойчиво.

7.2. Порядок выполнения задания

Для оценки устойчивости движения, описываемого заданной системой дифференциальных уравнений, в общем случае нелинейных, необходимо:

- составить функцию Ляпунова;
- найти от нее производную;
- подставить в выражение производной от функции Ляпунова соответствующее выражение из дифференциальных уравнений;
- преобразовать полученное выражение и оценить результат по критерию, заданному теоремой Ляпунова [8];
- сделать заключение об устойчивости движения.

7.3 Набор типовых задач для решения на занятии

Задачи, решаемые на этом занятии, могут иметь следующую формулировку: определить устойчиво ли движение, описываемое следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \begin{cases} x_2' = x_1 - x_2 - 3x_1^3, \\ x_1' = 3x_2 - 4x_1 + 3x_1^2 x_2; \end{cases} & 2) \quad \begin{cases} x' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2y, \\ y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2y}{(1+x^2)^2}; \end{cases} \\
 3) \quad \begin{cases} y_1' = y_2 + 3y_1^2 y_2^2 - 4y_1^5, \\ y_2' = -y_1 - y_2^3 + y_1^3 y_2; \end{cases} & 4) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2^3 - 2x_1 + 4x_1^3 x_2 - 3x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_1 x_2^2 - 2x_1^3 x_2^2 + x_2; \end{cases} \\
 5) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - 4y_1 y_2 + 2y_1^3 + y_2, \\ \dot{y}_2 = -2y_1 - 2y_1 y_2^2 - 3y_1^2 y_2 + 2y_1^2; \end{cases} & 6) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 y_2 - 2y_1^2 y_2 + 3y_1^2, \\ \dot{y}_2 = -2y_1^2 y_2^2 + y_2^2 - 4y_1 y_2^2; \end{cases}
 \end{array}$$

7.4. Содержание отчета о практическом занятии

Отчет должен содержать:

- 1) Исходную систему дифференциальных уравнений.
- 2) Функцию Ляпунова.
- 3) Производную от функции Ляпунова.
- 4) Полное выражение для производной.
- 5) Преобразованное выражение.
- 6) Заключение об устойчивости движения.

7.5. Контрольные вопросы

При защите отчета студент должен ответить на следующие вопросы:

1. По каким критериям выбирают вид функции Ляпунова?
2. Какая функция называется знакоопределенной?
3. Как найти производную сложной функции?
4. Сформулируйте вторую теорему Ляпунова.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8

МЕТОД МИХАЙЛОВА

Цель работы: приобретение студентами навыков анализа устойчивости систем с помощью метода Михайлова.

8.1. Теоретический раздел

В ряде случаев, когда решить задачу об устойчивости движения не удастся ни одним из аналитических методов, можно воспользоваться графическим методом Михайлова, сущность которого заключается в следующем. Для заданной системы дифференциальных уравнений составляется характеристическое уравнение типа

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_0 = 0. \quad (8.1)$$

Затем в характеристическом уравнении необходимо сделать подстановку $\lambda = i\omega$, которая при четных степенях λ дает вещественные числа ($\lambda^2 = -\omega^2$), а при нечетных – мнимые ($\lambda^3 = -i\omega^3$). Далее полученное выражение представляется в виде

$$f(i\omega) = u(\omega) + v(i\omega), \quad (8.2)$$

где $u(\omega)$ – действительные числа, $v(i\omega)$ – мнимые.

После этого в координатах $u - v$ строят график функции $f(i\omega)$, который называется годографом Михайлова. В каждой точке (u, v) построенного графика определяется вектор r , который с ростом координат u и v поворачивается вокруг начала координат. Устойчивость системы можно определить по критерию, утверждаемому следующей теоремой Михайлова: если при изменении ω от 0 до ∞ вектор r повернется вокруг начала координат на угол $\psi = \frac{\pi}{2}n$, где n – степень характеристического полинома, то движение, описываемое данной системой, асимптотически устойчиво.

8.2. Порядок выполнения задания

Для оценки устойчивости движения, описываемого заданной системой дифференциальных уравнений, необходимо:

- составить характеристическое уравнение (8.1);
- представить характеристическое уравнение в комплексной форме (8.2);
- построить годограф Михайлова;
- сделать заключение об устойчивости движения.

8.3. Набор типовых задач для решения на занятии

Типовые задачи могут иметь следующую формулировку: определить устойчиво ли движение, описываемое следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - y_1, \\ \dot{y}_2 = -4y_1 + 5y_2; \end{cases} & 2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 25x_1 - 5x_2, \\ \dot{x}_2 = 10x_1 + 15x_2; \end{cases} \\
 3) \quad \begin{cases} \dot{y}_2 = -10y_2 - 2y_1, \\ \dot{y}_1 = y_2; \end{cases} & 4) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2 - 2x_1, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2; \end{cases} \\
 5) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - 4x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2; \end{cases} & 6) \quad y^{IV} + 2y''' - y'' - 3y' - y = 0
 \end{array}$$

8.4. Содержание отчета о практическом занятии

Отчет должен содержать:

- 1) Исходную систему дифференциальных уравнений.
- 2) Характеристическое уравнение.
- 3) Годограф Михайлова.
- 4) Заключение об устойчивости заданного движения.

8.5. Контрольные вопросы

При защите отчета студент должен ответить на следующие вопросы:

- 1) Что отражает характеристическое уравнение?
- 2) Что такое годограф Михайлова?
- 3) Сформулировать теорему Михайлова.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова.- М.: Наука, 1970. - с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. – с.
3. Дубошин Г.Н. Основы устойчивости движения. М.: Изд-во МГУ, 1952. – с.
4. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения/ Д.Р. Меркин. - СПб: Лань, 2003. - 304 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям/ Э. Камке. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
6. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.- М.: Физматгиз, 1959.

7. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения/ И.Г. Малкин. - М: Едиториал УРСС, 2004. – 432 с.
8. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения/ А.М.Ляпунов. - М.: Гостехиздат, 1953. – с. 7-263
9. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по Аналитической механике. – М.: АН СССР, 1962. – с.

