

УДК 621.313:519.81

Р.В. Иванников, аспирант

Севастопольский национальный технический университет

ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГОРЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА

Проанализированы проблемы оптимального распределения энергоресурсов для энергокомпаний в условиях конфликта на основании модели матричных игр. Построена модель теоретикоигровой оптимизации распределения энергоресурсов, которая позволяет на основе аппарата матричных игр и их смешанного расширения построить метод, который сводит решение исходной задачи оптимизации распределения энергоресурсов к решению задачи нелинейного программирования.

В настоящее время для эффективной деятельности энергокомпаний основным и обязательным условием является оптимальное распределение своих энергетических ресурсов. Действие энергокомпаний на рынке всегда связано с риском и конфликтом интересов. Поэтому задачи оптимизации распределения энергоресурсов следует рассматривать с позиции теории игр. **Цель статьи** – анализ проблемы оптимального распределения энергоресурсов для энергокомпаний на основании модели матричных игр.

Рассмотрим конфликтную ситуацию, в которой первый игрок, т.е. лицо, принимающее решение (ЛПР), имеет n стратегий поведения и бесконечное множество вариантов распределения энергоресурсов S , направленных на совершенствование этих стратегий по отношению к m возможным стратегиям второго игрока. Эффективность стратегий (выигрыш) ЛПР определяется матрицей игры A с элементами a_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Известны неубывающие непрерывные функции $f_{ij}(s_{ij}) = \Delta a_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, характеризующие приращение эффективности стратегий ЛПР, где s_{ij} – элементы матрицы $S \in \overline{S}$, характеризующие количество энергоресурсов, идущих на совершенствование i -ой стратегии ЛПР при j -ом варианте действий второго игрока.

Общее количество энергоресурсов ограничено значением $\overline{S_{cp}}$, т.е.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m s_{ij} \leq \overline{S_{cp}}. \quad (1)$$

Требуется распределить энергоресурсы на совершенствование стратегий ЛПР в соответствии с теоретико-игровым подходом на основе применения аппарата матричных игр.

В теории матричных игр можно выделить три модели. В порядке увеличения сложности это собственно матричная игра в чистых стратегиях, смешанное расширение матричной игры классического типа и смешанное расширение матричной игры неклассического типа [1].

В первой модели реализуемые стратегии оптимальны относительно минимаксного (максиминного) критерия (ММ-критерия). Во второй модели стратегии, принадлежащие спектру, а, следовательно, реализуемые в процессе разыгрывания, оптимальны относительно критерия Байеса–Лапласа (BL-критерий). При построении модели смешанного расширения матричной игры неклассического типа имеется возможность учёта предпочтений игроков, соответствующих другим критериям, в том числе и производным.

Отметим, что применение ММ-критерия обеспечивает получение максимального гарантированного, а BL-критерия – максимального среднего выигрыша. Для исследования применения теоретико-игрового подхода к распределению энергоресурсов остановимся на этих двух критериях, поскольку они наиболее применимы в практике.

Рассмотрим условия применения модели матричных игр (ММ-критерия), т.е. условия при которых возможна теоретико-игровая оптимизация распределения энергоресурсов, обеспечивающая максимальный гарантированный выигрыш первого игрока. Они следуют из условия применения модели матричных игр в чистых стратегиях. Т.е. необходимо, чтобы матрица игры $\tilde{A}$ с элементами

$a_{ij}(s_{ij}) = \tilde{a}_{ij} + f_{ij}(s_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ в результате распределения энергоресурсов имела хотя бы одну седловую точку.

Сформулируем две теоремы [2].

Теорема 1. Пусть

$$a_{ij}^* \downarrow a_{i^*j}^* \downarrow a_{i^*j^*}^*, \quad (2)$$

тогда для всех $\tilde{a}_{ij}$, f_{ij} , S , определенных выше, если

$$S^* = \arg \max_S (\max_i \min_j \tilde{a}_{ij}(s_{ij})) \quad (3)$$

при выполнении (1), то

$$\tilde{a}_{ij}^*(s_{ij}^*) \downarrow a_{i^*j^*}^*(s_{ij}^*) \downarrow a_{i^*j}^*(s_{ij}^*). \quad (4)$$

Доказательство. Для того чтобы (4) было верным необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$a_{i^*j^*}^*(s_{ij}^*) = (\max_i \min_j \tilde{a}_{ij}(s_{ij}^*) = \min_j \max_i \tilde{a}_{ij}(s_{ij}^*)). \quad (5)$$

Поскольку выполняется (2), то

$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$, кроме того, из (3) следует, что $\max_i \min_j \tilde{a}_{ij}(s_{ij}^*) \geq \max_i \min_j a_{ij}$, а так как при

любых $\tilde{a}_{ij}(s_{ij}) = a_{ij} + f_{ij}(s_{ij})$ выполняется условие $\max_i \min_j \tilde{a}_{ij}(s_{ij}) \geq \min_j \max_i \tilde{a}_{ij}(s_{ij})$, то выражение (5) является верным, и следовательно, выполняется (4).

Теорема 2. Пусть задана матрица A , такая, что выполняется условие $\min_j \max_i a_{ij} - \max_i \min_j a_{ij} = p$.

Если значение S_{2p}^- в (1) и f_{ij} таковы, что найдется такая матрица

$$S^* = \arg \max_S (\max_i \min_j \tilde{a}_{ij}(s_{ij})), \text{ что } \max_i \min_j \tilde{a}_{ij}(s_{ij}) - \max_i \min_j a_{ij} \leq p, \text{ то найдется хотя бы одна пара}$$

стратегий i^* , j^* , для которой $\tilde{a}_{ij}^*(s_{ij}^*) \downarrow a_{i^*j^*}^*(s_{ij}^*) \downarrow a_{i^*j}^*(s_{ij}^*)$.

Доказательство теоремы следует из теоремы 1.

Теоремы 1 и 2 определяют условия наличия хотя бы одной седловой точки в матрице $\tilde{A}$, сформированной по результатам оптимального распределения энергоресурсов.

Выполнение этих условий обеспечивает возможность применения критерия оптимальности в виде максимизации гарантированного выигрыша ЛПР в задаче распределения энергоресурсов. Алгоритм решения этой задачи несложно получить на основе последовательного анализа элементов матрицы A с оптимальным распределением энергоресурсов по строкам (чистым стратегиям ЛПР) с последующим выбором наилучшего из n вариантов.

Рассмотрим теперь в качестве критерия максимизацию среднего выигрыша (ω). Как было отмечено выше, этот критерий соответствует модели смешанного расширения матричных игр. Для этой модели множества стратегий первого и второго игроков $\bar{X}$, $\bar{Y}$ являются симплексами

$$\bar{X} = \{X = (\xi_1, \dots, \xi_n) \mid \xi_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n \xi_i = 1\}, \bar{Y} = \{Y = (\eta_1, \dots, \eta_m) \mid \eta_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m \eta_i = 1\},$$

а задача может быть сформулирована следующим образом.

Найти $\{X^*, S^*\}$ такие, что

$$\omega^*(X^*, S^*) = \max_{X, S} \min_Y (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi_i a_{ij} + f_{ij}(s_{ij}) \eta_j) = \min_Y \max_{X, S} (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi_i a_{ij} + f_{ij}(s_{ij}) \eta_j) \quad (6)$$

при наличии ограничений (1).

Игру с функцией выигрыша

$$H(X, S, Y) = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi_i a_{ij} + f_{ij}(s_{ij}) \eta_j) \quad (7)$$

обозначим в виде четверки $\Gamma_S = (\bar{X}, \bar{S}, \bar{Y}, H)$.

Седловая точка в такой модели игры для задачи распределения энергоресурсов существует всегда, что следует из теоремы фон Неймана, с учётом того, что функция (7) линейна по X , Y , множество вариантов распределения ресурсов $\bar{S}$ – выпуклое ограниченное замкнутое, $\bar{X}$, $\bar{Y}$ – симплексы, а $f_{ij}(s_{ij}) \geq 0$ – неубывающие непрерывные функции.

Решение задачи оптимального распределения энергоресурсов. Рассмотрим построение одного из общих методов решения задачи распределения энергоресурсов в условиях конфликта, описываемого моделью игры Γ_S .

Несложно показать, что игра Γ_S обладает свойством аффинной эквивалентности. Тогда с использованием этого свойства решение поставленной задачи распределения энергоресурсов можно свести к решению стандартной задачи нелинейного программирования.

Будем полагать, что все элементы матрицы $\tilde{A}$ положительны. Если это не так, то можно сформировать аффинно эквивалентную игру путём добавления ко всем элементам некоторого достаточно большого числа.

Пусть X – произвольная стратегия первого игрока в игре Γ_S .

Обозначим $\delta_{X,S} = \min_j \prod_{i=1}^n \xi_i(a_{ij} + \Delta a_{ij})$, тогда из положительности элементов матрицы $\tilde{A}$ и свойств смешанной стратегии следует, что

$$0 < \delta_{X,S} \leq \prod_{i=1}^n \xi_i(a_{ij} + \Delta a_{ij}), \quad j = \overline{1, m}. \quad (8)$$

Для игры Γ_S можно показать, что значение игры равно

$$\omega^* = \max_{X,S} \min_Y \prod_{i=1}^n \xi_i(a_{ij} + \Delta a_{ij}) = \min_Y \max_X \max_S \prod_{j=1}^m \eta_j(a_{ij} + \Delta a_{ij}),$$

причём внешние экстремумы достигаются на оптимальных стратегиях игроков.

Тогда, если $\{X^*, S^*\}$ – оптимальная стратегия, то для неё выполняется равенство

$$\delta_{X^*, S^*} = \max_{X,S} \delta_{X,S} = \omega^*. \quad (9)$$

Введём в рассмотрение вектор $\tilde{X} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n)^T$ такой, что

$$\tilde{X} = \frac{X}{\delta_{X,S}}. \quad (10)$$

Тогда из свойств стратегии X и выражений (8) – (10) следует, что стратегия первого игрока будет оптимальна тогда, когда

$$\prod_{i=1}^n \tilde{\xi}_i \rightarrow \min_{X,S} \quad (11)$$

в условиях ограничений (1) и

$$\left(\prod_{i=1}^n \tilde{\xi}_i (a_{ij} + f_{ij}(s_{ij})) \right) \leq 1, \quad j = \overline{1, m}, \quad (12)$$

$$s_{ij} \geq 0, \quad \tilde{\xi}_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (13)$$

В результате решения задачи нелинейного программирования (11) – (13) получим величину, обратную ω^* , оптимальное распределение энергоресурсов и оптимальную смешанную стратегию ЛПР по выражению, следующему из (10).

$$X^* = \tilde{X} \omega^*.$$

Пример решения задачи оптимального распределения энергоресурсов в условиях конфликта. В качестве примера рассмотрим задачу распределения энергоресурсов, в которой выигрыш первого игрока в конфликтной ситуации определяется матрицей игры A

$$A = \begin{pmatrix} 2.83 & 2.58 & 2.24 & 2.46 & 2.58 & 2.54 \\ 2.37 & 2.92 & 2.33 & 2.67 & 2.75 & 2.46 \\ 2.58 & 2.37 & 2.17 & 2.25 & 2.62 & 2.45 \\ 2.48 & 2.56 & 2.48 & 2.46 & 2.61 & 2.74 \\ 2.67 & 2.91 & 2.35 & 2.55 & 2.55 & 2.64 \end{pmatrix},$$

а зависимость приращения выигрыша ЛПР от расхода ресурсов имеет вид

$$\Delta a_{ij} = f_{ij}(s_{ij}) = k \ln(1 - \exp(-s_{ij})), \quad i = \overline{1,5}, \quad j = \overline{1,6}, \quad \text{где } k \geq 0.$$

Решение (1), (11) – (13) получим для различных значений $\bar{S}_{ep}$ в ограничении (1) и k в модели приращения выигрыша.

При $\bar{S}_{ep} = 0$ имеем $\omega^* = 2,47$, $X^* = (0 \ 0,0556 \ 0 \ 0,9444 \ 0)^T$,

$Y^* = (0 \ 0 \ 0,5833 \ 0,4167 \ 0 \ 0)^T$. Результаты решения задачи оптимального распределения ресурсов представлены в таблице 1, где в скобках указана структура оптимальной стратегии первого игрока: CC – оптимальной является смешанная стратегия; 4 – оптимальной является четвертая чистая стратегия; 5 – оптимальной является пятая чистая стратегия.

Таблица 1 – Значение игры (средний выигрыш)

k	Значение $\bar{S}_{ep}$		
	0,2	2,0	4,0
0,2	2,49 (CC)	2,57 (CC)	2,61 (4)
0,4	2,5 (CC)	2,64 (4)	2,73 (4)
1,0	2,54 (4)	2,87 (5)	3,07 (5)

Сравним результаты оптимального распределения энергоресурсов для $k=1$ при $\bar{S}_{ep} = 0,2$ и $\bar{S}_{ep} = 2,0$.

Для $\bar{S}_{ep} = 0,2$ S^* представляет собой матрицу, в которой для четвертой стратегии ЛПР $S_{4*}^* = (0,0595 \ 0,0000 \ 0,0595 \ 0,0810 \ 0,0000 \ 0,0000)$, остальные $s_{ij}^* = 0$. При этом оптимальной является четвертая чистая стратегия ЛПР. Для $\bar{S}_{ep} = 0,2$ получим

$S_{4*}^* = (0,2248 \ 0,0000 \ 0,7368 \ 0,3876 \ 0,3876 \ 0,2631)$, остальные $s_{ij}^* = 0$ и оптимальной стратегией является пятая чистая стратегия ЛПР.

Таким образом, при последовательной оптимизации результат получится в общем случае хуже, чем при оптимальном распределении суммарных энергоресурсов. Кроме того, при больших значениях $\bar{S}_{ep}$ и отсутствия ограничений на приращения эффективностей стратегий первого игрока относительно всех стратегий второго игрока наблюдается эффект «универсальной стратегии», т.е. энергоресурсы распределяются на совершенствование одной стратегии ЛПР так, что она становится одинаково эффективной против любых стратегий противника. При этом максимальная гарантированная и средняя эффективности стратегий ЛПР сравниваются.

Заключение. Разработанная модель теоретико-игровой оптимизации распределения энергоресурсов позволяет на основе аппарата матричных игр и их смешанного расширения построить метод, который сводит решение исходной задачи к решению задачи нелинейного программирования.

Задачей дальнейшего исследования в данном направлении является рассмотрение оптимального распределения энергоресурсов в условиях конфликта для нескольких энергокомпаний (игроков) на основании модели матричных игр.

Библиографический список

1. Дюбин Г.Н. Введение в прикладную теорию игр / Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль. — М.: Наука, 1981. — 336 с.
2. Нейман Дж. Фон. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Фон Нейман, О. Моргенштерн. — М.: Наука, 1970. — 324 с.

Поступила в редакцию 12.12.2007 г.