

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Методические указания
к выполнению лабораторных работ №1 — №5
по дисциплине
“Основы теории марковских процессов”
для студентов специальности
6.050101 – "Информационные управляющие системы и
технологии"
дневной и заочной формы обучения

Севастополь
2013

УДК 004.92

Методические указания к лабораторным работам №1 — №4 по дисциплине “Основы теории марковских процессов”/ Сост. Ю.В. Доронина. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2013. — 28.

Целью методических указаний по дисциплине “Основы теории марковских процессов” является выработка у студентов практических навыков анализа стохастических систем на основе моделей марковских процессов, систематизация знаний по специальным разделам теории случайных процессов.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями программы дисциплины “Основы теории марковских процессов” для студентов третьего курса заочной форм обучения специальности 6.050101 и утверждены на заседании кафедры информационных систем (протокол № ____ от _____ 2013 г.).

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Литвинова Л.А., доцент кафедры КиВТ СевНТУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для выполнения лабораторных работ по дисциплине
«Основы теории марковских процессов»

Введение

Для вычисления числовых параметров, характеризующих стохастические объекты, нужно построить некоторую вероятностную модель явления, учитывающую сопровождающие его случайные факторы. Для математического описания многих явлений, развивающихся в форме случайного процесса, может быть с успехом применен математический аппарат, разработанный в теории вероятностей для так называемых марковских случайных процессов.

Пусть имеется некоторая физическая система S , состояние которой меняется с течением времени (под системой S может пониматься что угодно: техническое устройство, ремонтная мастерская, вычислительная машина и т.д.). Если состояние S меняется по времени случайным образом, говорят, что в системе S протекает случайный процесс. Примеры: процесс функционирования ЭВМ (поступление заказов на ЭВМ, вид этих заказов, случайные выходы из строя), процесс наведения на цель управляемой ракеты (случайные возмущения (помехи) в системе управления ракетой), процесс обслуживания клиентов в парикмахерской или ремонтной мастерской (случайный характер потока заявок (требований), поступивших со стороны клиентов).

Случайный процесс называется марковским процессом (или «процессом без последствия»), если для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от её состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (т.е. как развивался процесс в прошлом). Пусть S техническое устройство, которое характеризуется некоторой степенью изношенности S . Нас интересует, как оно будет работать дальше. В первом приближении характеристики работы системы в будущем (частота отказов, потребность в ремонте) зависят от состояния устройства в настоящий момент и не зависят от того, когда и как устройство достигло своего настоящего состояния.

Теория марковских случайных процессов – обширный раздел теории вероятности с широким спектром приложений (физические явления типа диффузии или перемешивания шихта во время плавки в доменной печи, процессы образования очередей).

Л.Р. № 1

ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕПЕЙ МАРКОВА ДЛЯ АНАЛИЗА ОСАДКОВ

Теоретические сведения и пример анализа

Из практики прогнозирования метеорологических элементов, осадки имеют самый высокий показатель сложности прогнозирования. Габриэль и Нойманн (Gabriel, Neumann, 1962) применяли цепи Маркова для составления модели выпадения ежедневных осадков в зависимости от их величины. На основе метода Габриэля и Нойманна ниже приведены некоторые свойства инерции и периодичности осадков, которые можно представить цепями Маркова [11, 14].

Для простоты модели на первом этапе не будем отличать осадки по типам. Условимся день с осадками обозначать как D, и день без осадков – W.

Цепь определяется двумя условными вероятностями: ρ_0, ρ_1 (переходные вероятности). ρ_0 - вероятность того, что дню с осадками предшествует день без осадков (W/D), ρ_1 - вероятность того, что дню с осадками предшествует день с осадками (D/D). Априорная вероятность того, что какой-то день будут осадки, выражается эмпирически как отношение числа дней с осадками за исследуемый период к числу дней в периоде.

Аналогичным образом, эмпирически, можно получить условные вероятности как отношения:

$$\rho_0 = \frac{\text{общее количество дней с осадками, следующих за сухим днем}}{\text{общее количество сухих дней}} \quad (1)$$

$$\rho_1 = \frac{\text{общее количество дней с осадками, следующих за дождливым днем}}{\text{общее количество дождливых дней}} \quad (2)$$

Или в принятых нами обозначениях (1) и (2) примут вид:

$$\rho_0 = \frac{W / \sum D}{\sum W}, \quad \rho_1 = \frac{D / \sum D}{\sum D} \quad (3)$$

Предположим, что переходные вероятности: $\rho_0=0.24$, $\rho_1=0.59$. Можно легко убедиться, что обнаружилась инерция дождливых дней. И $\rho_0 + \rho_1 > 1$, т.к. они не независимы.

Вероятность того, что вслед за днем с осадками наступит сухой день, равна по определению $1 - \rho_1 = 0.41$. Аналогично, вероятность того, что вслед за одним сухим днем наступит другой сухой день, равна $1 - \rho_0 = 0.76$. Теперь возможно построить цепь вероятностей не только для одного дня без осадков.

Вероятность того, что через два дня после дня с осадками будет день с осадками равна (P_w):

$$P_w = P(W/W/W) + P(W/D/W) = p_1 p_2 + p_0(1 - p_1), \quad (4)$$

вероятность того, что через два дня после сухой погоды будет день с осадками (P_D)

$$P_w = P(W/W/D) + P(W/D/D) = p_1 p_0 + p_0(1 - p_0) \quad (5)$$

Кроме того, вместо выражений (4) и (5) можно использовать формулы [11]:

$$P_w = P + (1 - P)d^i, \quad P_D = P - Pd^i \quad (6)$$

где P - априорная вероятность дня с осадками и $d = \rho_1 - \rho_0$. Графики вероятности в зависимости от количества i дней по указанным формулам, асимптотически приближаются к априорной вероятности P (рисунок 1.1).



Рисунок 1.1. Марковские вероятности: P_w - i дней с осадками после дня с осадками, P_D - i дней с осадками после дня без осадков.

В каждом случае вероятность того, что за днем без осадков спустя 4 дня ($i=4$) будет день с осадками, очень близка к априорной вероятности P .

Продолжая разработки Марковских цепей, выясним вероятности периодов с осадками и сухих дней. Вероятность периода с осадками в k дней равна вероятности сухих дней, повторяющихся каждые (k+1) дней, то есть

$$P_{SW} = (1 - p_1) p_1^{k-1}, \quad P_{SD} = p_0 (1 - p_0)^{k-1}, \quad (7)$$

где k – число дней в периоде, p_1, p_0 - переходные вероятности, P_{SW} - вероятность периода без осадков, P_{SD} - вероятность периода с осадками.

На рисунке 1.2 приведены графики рассчитанных значений вероятностей периодов с осадками в k-дней и соответствующих периодов без осадков. Как видно, для значения $k=3$ P_{SW} и P_{SD} совпадают.



Рисунок 1.2. Вероятности периода с осадками в k-дней и соответствующего периода без осадков

Рассуждения можно продолжить для оценки показателя периодичности, т.е. чередования сухих периодов и периодов с осадками по n дней каждый, выражение (8).

$$P_p = \frac{(1 - p_0)^{n-1} - p_1^{n-1}}{(1 - p_0 - p_1)} p_0 (1 - p_1) \quad (8)$$

где n – число дней в периоде, p_1, p_0 - переходные вероятности, P_n - вероятность чередования периодов без осадков и периодов с осадками по n дней каждый.

Вероятности чередующихся периодов с осадками и сухих дней продолжительностью n дней каждый (с периодичностью в $2n$ каждый) показаны на рисунке 1.3.

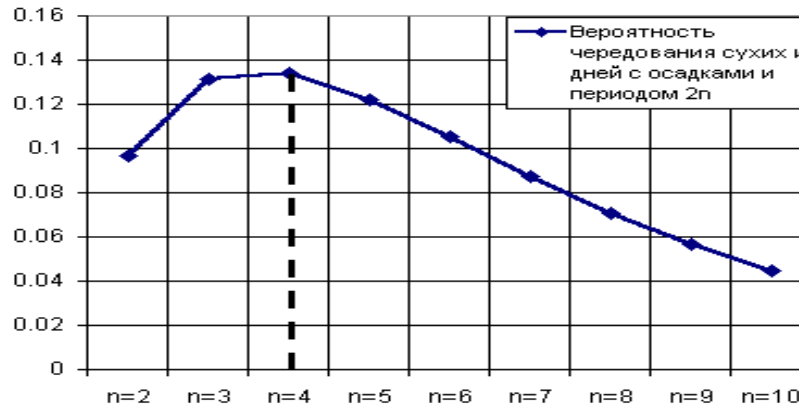


Рисунок 1.3. Вероятности чередующихся периодов с осадками и дней без осадков продолжительностью n дней каждый.

Как видно из расчетов, для исследуемого случая, показатель периодичности равен четырем дням, т.к. максимальное значение вероятности чередующихся периодов достигается при $n=4$. Это же справедливо и для расчетов по данным наблюдений станции Херсонесский маяк.

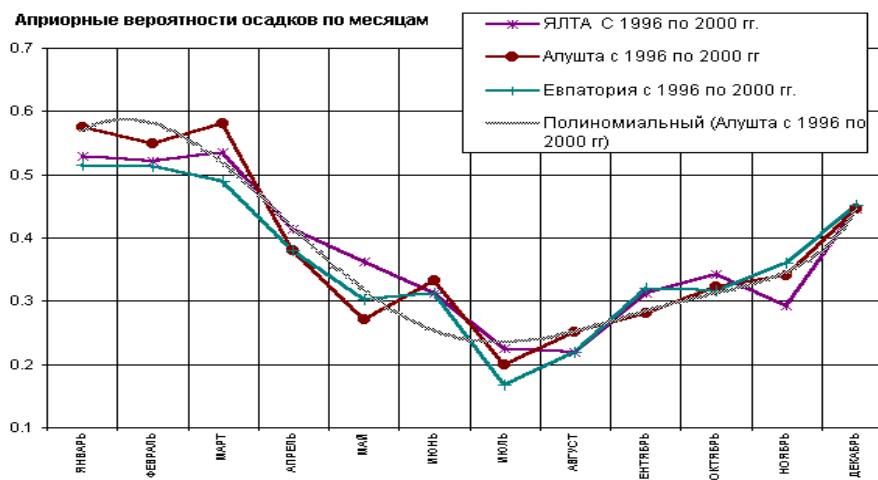


Рисунок 1.4. Априорные вероятности осадков для Ялты, Алушты, Евпатории.

Установлен годовой ход априорной вероятности осадков по данным наблюдений по Севастополю. Уравнения полиномов для исследуемых пунктов наблюдения приведены ниже:

По Севастополю:

$$y = 1E - 05x^6 - 0.0005x^5 + 0.0076x^4 - 0.053x^3 + 0.17x^2 - 0.23x + 0.59, R^2 = 0.98.$$

Применение цепей Маркова выявляет истинную стохастическую природу рядов данных. В Марковских цепях непосредственно на основании измерений определяются лишь условные вероятности и априорная вероятность. Все другие вероятности базируются на предположении о зависимости условий данного дня от предыдущего.

Задания к лабораторной работе:

1. Сгенерировать последовательности осадков в форме таблицы MS Excel за период 2 месяца (порядковый номер месяца - вариант задания - выбирается по последней цифре зачетной книжки: например, для номера ЗК=5 - май и июнь).

2. С использованием встроенных возможностей MS Excel, провести аналогичные исследования на основе модели, описанной в МУ. Найти:
 - 2.1 вероятность того, что вслед за днем с осадками наступит сухой день,
 - 2.2 вероятность того, что через два дня после дня с осадками будет день с осадками,
 - 2.3 вероятности периодов с осадками и сухих дней,
 - 2.4 оценки показателя периодичности, т.е. чередования сухих периодов и периодов с осадками по n дней каждый.
3. Построить графики, сделать выводы.
4. Подготовить отчет, содержащий все этапы исследования. К отчету приложить таблицы и распечатки графиков.

Контрольные вопросы:

1. Дать определения случайного процесса, марковского процесса.
2. Что такое переходные, условные и априорные вероятности для данной модели?
3. Какой тип МЦ использован в модели лабораторной работы?
4. Пояснить смысл периода дней без осадков в модели.
5. Привести выражение для оценки периодичности смены погодных условий.

Л.Р. № 2

НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

Теоретические сведения

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем иногда называют «непрерывной цепью Маркова». Для такого процесса вероятность перехода из состояния e_i в e_j для любого момента времени равна нулю. Вместо вероятности перехода p_{ij} в этом случае рассматривают *плотность вероятности перехода* λ_{ij} , которая определяется как предел отношения вероятности перехода из состояния e_i в состояние e_j за малый промежуток времени Δt , примыкающий к моменту t , к длине этого промежутка, когда она стремится к нулю. Плотность вероятности перехода может быть как постоянной ($\lambda_{ij} = \text{const}$), так и зависящей от времени ($\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$). В первом случае Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется *однородным*.

Плотности вероятностей переходов рассматриваются как интенсивности λ_{ij} простейших потоков событий, под влиянием которых происходит переход системы из состояния e_i в состояние e_j .

Потоком событий принято называть последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайный момент времени (поток автомашин, проходящих через таможенный пост; поток вызовов на станции скорой помощи; поток клиентов, снимающих денежные средства со счета в банке). На практике обычно рассматривают простейшие потоки событий, которые характеризуются свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия.

Поток событий называется *стационарным*, если вероятность попадания того или другого числа событий на любой интервал времени зависит только от длины τ этого интервала и не зависит от того, где именно на оси времени он расположен.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность одновременного поступления двух и более событий равна нулю, что означает, что события в потоке появляются «поодиночке», а не группами по два, по три и т.д.

Поток событий называется *потоком без последствия*, если число событий, попадающих на любой интервал времени τ , не зависит от того, сколько событий попало на любой другой не пересекающийся с ним интервал. Отсутствие последствия означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга.

Ординарный поток событий без последствия называется пуассоновским. Простейший поток есть частный случай пуассоновского потока, обладающего свойством стационарности. Случайный процесс $X(t)$, представляющий собой число появившихся до момента t событий в простейшем потоке, определяется исходя из закона Пуассона

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots,$$

где n – число состояний системы, λ – интенсивность потока.

В случае, когда система имеет конечное число состояний, вероятности состояний $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ в момент времени t находятся из системы дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), имеющих вид

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}, i = 1, 2, \dots, n,$$

где произведение $\lambda_{ij} p_i(t)$ – поток вероятности перехода [5] из состояния S_i в состояние S_j .

Данные уравнения удобно составлять, пользуясь размеченным графом состояний системы и следующим мнемоническим правилом: производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, переводящих из других состояний в данное, минус сумма всех потоков вероятности, переводящих из данного состояния в другие.

Чтобы решить данную систему дифференциальных уравнений нужно задать начальное распределение вероятностей $p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0)$, сумма которых равна единице

$$\sum_{i=1}^n p_i(0) = 1.$$

Пример выполнения лабораторной работы №2

Пусть нормально работающая система (состояние e_0) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_{01} , переходя в новое состояние e_1 , в котором она некоторое время может работать с необнаруженным отказом. Как только отказ обнаруживается (интенсивность обнаружения λ_{12}), производится осмотр системы (состояние e_2). В результате осмотра, устройство либо направляется в ремонт (состояние e_3) с интенсивностью λ_{23} , либо списывается и заменяется новым (состояние e_4) с интенсивностью λ_{24} . Из состояния e_3 с интенсивностью λ_{30} и из состояния e_4 с интенсивностью λ_{40} переходит в рабочее состояние e_0 . Найти распределение вероятностей состояний для любого момента времени и финальные вероятности состояний.

Граф состояний для сформулированной задачи приведен на рис. 2.1.

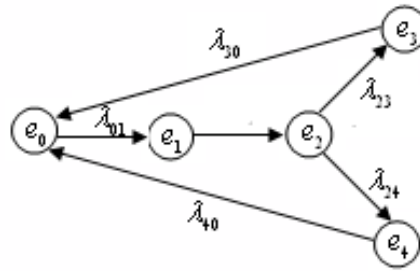


Рис. 2.1. Размеченный граф состояний системы

На основе размеченного графа состояний системы, составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = \lambda_{40} p_4 + \lambda_{30} p_3 - \lambda_{01} p_0 \\ \frac{dp_1}{dt} = \lambda_{01} p_0 - \lambda_{12} p_1 \\ \frac{dp_2}{dt} = \lambda_{12} p_1 - \lambda_{23} p_2 - \lambda_{24} p_2 \\ \frac{dp_3}{dt} = \lambda_{23} p_2 - \lambda_{30} p_3 \\ \frac{dp_4}{dt} = \lambda_{24} p_2 - \lambda_{40} p_4 \end{cases}$$

и нормировочное условие $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.

Для определенности придадим параметрам, приведенным в системе дифференциальных уравнений, следующие значения:

$$\lambda_{01} = 0,5, \lambda_{12} = 2, \lambda_{23} = 1,5, \lambda_{24} = 1,5, \lambda_{30} = 0,8, \lambda_{40} = 2.$$

Зададим также начальные условия, т.е. распределение вероятностей состояний в начальный момент времени:

$$p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0.$$

В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = 2 p_4 + 0,8 p_3 - 0,5 p_0 \\ \frac{dp_1}{dt} = 0,5 p_0 - 2 p_1 \\ \frac{dp_2}{dt} = 2 p_1 - 3 p_2 \\ \frac{dp_3}{dt} = 1,5 p_2 - 0,8 p_3 \\ \frac{dp_4}{dt} = 1,5 p_2 - 2 p_4 \end{cases}$$

Данную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно решить аналитически (методом исключения неизвестных, методом Эйлера или с помощью преобразований Лапласа), но при большой размерности данной системы [1, 2], предпочтительнее получить ее численное решение на ПК.

Для получения численного решения системы используем программу MathCAD, которая имеет необходимые функции для решения дифференциальных уравнений различными методами.

Воспользуемся общепринятой процедурой решения на основе метода Рунге-Кутты. В качестве функции, позволяющей получить решение, выберем функцию **rkfixed**(p_0, t_0, t_1, M, D),

где p_0 - начальные условия,

t_0, t_1 - начальная и конечная точки расчета соответственно,

M - число шагов,

$D = D(t, p)$ - матричная форма правых частей системы дифференциальных уравнений.

Листинг с введенными параметрами и полученным результатом решения в системе MathCAD [7] представлен на рис.2.2.

$$p := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, p) := \begin{pmatrix} -0.5p_0 + 0.8p_3 + 2p_4 \\ 0.5p_0 - 2p_1 \\ 2p_1 - 3p_2 \\ 1.5p_2 - 0.8p_3 \\ 1.5p_2 - 2p_4 \end{pmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(p, 0, 5, 15, D)$$

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	0	0	0	0
1	0.333	0.849	0.111	0.033	4.398·10 ⁻³	3.472·10 ⁻³
2	0.667	0.73	0.151	0.071	0.026	0.021
3	1	0.648	0.161	0.093	0.057	0.042
4	1.333	0.597	0.157	0.101	0.087	0.057
5	1.667	0.568	0.151	0.102	0.111	0.067
6	2	0.553	0.146	0.1	0.13	0.071
7	2.333	0.546	0.142	0.097	0.143	0.072
8	2.667	0.543	0.139	0.095	0.151	0.072
9	3	0.542	0.137	0.093	0.157	0.071
10	3.333	0.541	0.136	0.092	0.161	0.07
11	3.667	0.541	0.136	0.091	0.163	0.069
12	4	0.54	0.135	0.091	0.165	0.069
13	4.333	0.54	0.135	0.09	0.166	0.068
14	4.667	0.54	0.135	0.09	0.167	0.068
15	5	0.54	0.135	0.09	0.167	0.068

Z =

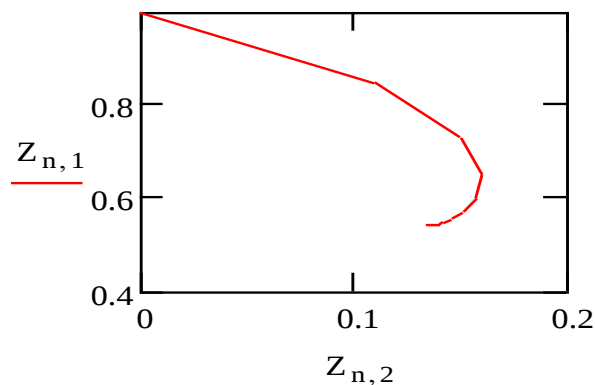


Рис. 2.2. Решение системы дифференциальных уравнений

Рис. 2.3. Проекция фазовой траектории для $p_1(t)$ и $p_2(t)$

Из решения (рис. 2.2) следует, что спустя период времени $t = 4$ наступает стабилизация случайного процесса. Фрагмент фазового портрета для $p_1(t)$ и $p_2(t)$ приведен на рис. 2.4.

Очевидно, что устойчивость решения подтверждается фазовым портретом (рис. 2.4), взятым для одной из десяти возможных проекций полученных решений.

Дополнительно для иллюстрации численного решения как функции времени приведем соответствующие графики.

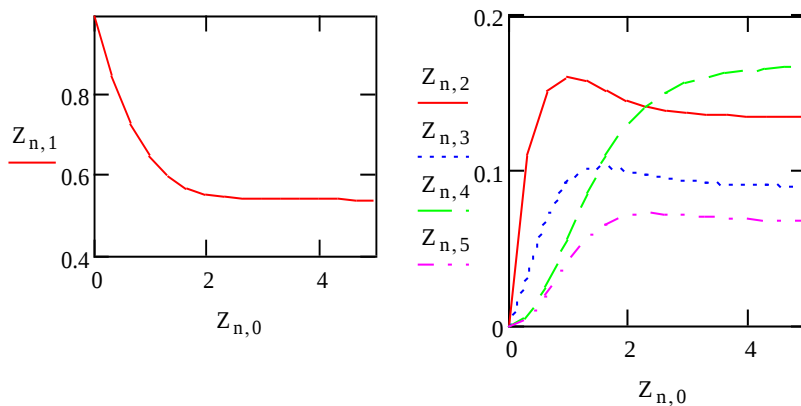


Рис. 2.4. Графики вероятностей состояний как функции времени

Для проверки решения системы дифференциальных уравнений на устойчивость целесообразно воспользоваться функцией отыскания собственных чисел $\text{eigenvals}(A)$, имеющейся в системе MathCAD. Результаты вычисления вектора собственных чисел матрицы A приведены ниже:

$$A := \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0.8 & 2 \\ 0.5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -3.523 \\ 0 \\ -1.848 + 1.123i \\ -1.848 - 1.123i \\ -1.08 \end{pmatrix}$$

Принимая во внимание теорему об устойчивости решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, заметим, что корни характеристического уравнения матрицы A не имеют положительных действительных частей, следовательно, полученное решение устойчиво.

Проблема устойчивости для данного класса задач является актуальной, так как предполагается нахождение финальных вероятностей для стохастических систем, описываемых с помощью дифференциальных уравнений Колмогорова.

Для вычисления финальных вероятностей положим левые части в системе дифференциальных уравнений Колмогорова равными нулю, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений. Принимая во внимание нормировочное условие для вероятностей, и отбрасывая одно из уравнений системы, получим неоднородную систему линейных уравнений. Для решения системы средствами MathCAD воспользуемся функцией $\text{Isolve}(A, b)$. Результаты вычисления финальных вероятностей приведены ниже.

$$\text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 0.539 \\ 0.135 \\ 0.09 \\ 0.169 \\ 0.067 \end{pmatrix}$$

При этом финальные вероятности можно истолковать как среднее время пребывания системы в данном состоянии. Данная система в среднем 54% времени будет работать нормально, 13,5% времени работать с необнаруженным отказом, 9% времени будет затрачено на диагностику, 17% времени на ремонт и около 7% тратится на замену новым оборудованием.

Варианты 1-5.

Система представляется в виде технического устройства (ТУ), которое имеет три узла (элемента). Для работы ТУ достаточно, чтобы работал хотя бы один узел. Система может находиться в следующих четырех состояниях:

- e_1 – все узлы системы работают исправно;
- e_2 – только один узел системы вышел из строя и подлежит восстановлению (ремонтируется или планируется его замена);
- e_3 – два узла системы вышли из строя и восстанавливаются;
- e_4 – все три узла системы вышли из строя и восстанавливаются.

Граф системы приведен на рис. 2.5.

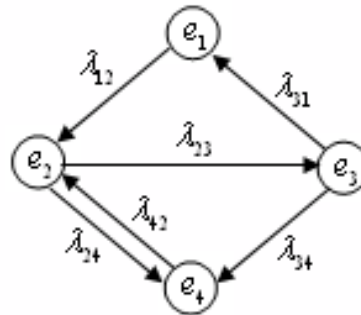


Рис. 2.5. Размеченный граф системы

Интенсивности переходов λ_{ij} из состояния e_i в состояние e_j для каждого варианта приведены ниже.

№ варианта	λ_{12}	λ_{23}	λ_{24}	λ_{31}	λ_{34}	λ_{42}
1	0,85	0,34	0,9	0,1	0,75	0,45
2	3	2	0,7	2	0,61	2
3	0,5	0,94	2	3	0,8	3
4	3	3	1	0,22	1	0,22
5	2	0,9	0,25	3	1	1

Варианты 6-10.

Общая постановка задачи:

Система состоит из двух технических устройств (ТУ), каждое из которых в любой момент времени может выйти из строя, после чего начинается ремонт ТУ продолжающийся заранее неизвестное случайное время. Система может находиться в следующих состояниях:

e_1 – оба ТУ работают;

e_2 – первое ТУ ремонтируется, второе работает;

e_3 – второе ТУ ремонтируется, первое работает;

e_4 – оба ТУ ремонтируются.

Граф системы приведен на рис. 2.6.

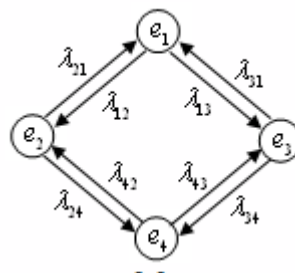


Рис. 2.6. Размеченный граф системы

Интенсивности переходов λ_{ij} из состояния e_i в состояние e_j для каждого варианта приведены ниже.

№ варианта	λ_{12}	λ_{13}	λ_{21}	λ_{24}	λ_{31}	λ_{34}	λ_{42}	λ_{43}
6	0,5	2	1	0,64	3	1	0,6	2
7	2	3	2	1	2	2	1	3
8	3	1	0,95	3	1	0,88	2	1
9	2	2,5	1	0,8	3	3	2	0,85
10	1	3	2	1	3	1	2	2

Задания к лабораторной работе:

1. Согласно варианту задания записать систему дифференциальных уравнений. Варианты выбираются по последней цифре зачетной книжки.
2. Получить численные решения системы с использованием MathCAD, Maple или MathLab.
3. Проверить решения системы дифференциальных уравнений на устойчивость.
4. Построить графики, сделать выводы.
5. Оформить отчет, приложить распечатки программ.

Контрольные вопросы:

1. Привести принцип решения дифференциальных уравнений на основе метода Рунге-Кутты.
2. Дать определения потоков событий, их классификацию.
3. Что означают коэффициенты в системе линейных дифференциальных уравнений?
4. Записать общий вид дифференциальных уравнений Колмогорова.
5. Что такое стационарный поток событий?

Л.Р.№3

Анализ функционирования сложной информационной системы

Пример описания функционирования системы на основе непрерывной цепи Маркова приведен в Л.Р.№2.

Задания к лабораторной работе №3:

1. Согласно варианту задания построить граф переходов и записать систему дифференциальных уравнений, описывающих функционирование сложной информационной системы.

Варианты выбираются по последней цифре зачетной книжки.

2. Получить численные решения системы с использованием одного из математических пакетов.
3. Найти распределение вероятностей состояний для любого момента времени и финальные вероятности состояний.
4. Проверить решения системы дифференциальных уравнений на устойчивость.
5. Построить графики, сделать выводы.
6. Оформить отчет, приложить текст программы, распечатанные графики.

Вариант 0.

Пусть нормально работающая система (состояние e_0) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_{01} , переходя в новое состояние e_1 , связанное с анализом типа отказа. В зависимости от определенного типа отказа система может перейти в невосстанавливаемое состояние (состояние e_2), либо в состояние ремонта (состояние e_3) с интенсивностью λ_{23} , либо списывается и заменяется новым (состояние e_4) с интенсивностью λ_{24} . Из состояния e_3 с интенсивностью λ_{30} и из состояния e_4 с интенсивностью λ_{40} переходит в рабочее состояние e_0 .

Вариант 1.

Пусть нормально работающая система (состояние e_0) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_{01} , переходя в новое состояние e_1 , связанное с восстановлением (ремонт). После восстановления (ремонта) система может перейти в новое состояние e_2 с некоторой интенсивностью, либо остаться в том же состоянии e_1 , когда ремонт не закончен или требуется еще один цикл ремонта. Далее, система из состояния e_2 переходит в рабочее состояние e_0 или в состояние сбоя, т.е. кратковременного отказа, когда техническая часть не отказывает, а результат анализа данных неудовлетворителен. В этом случае переход осуществляется в состояние, связанное с повторным анализом или идентификацией результатов, откуда осуществляются переходы либо в начальное рабочее состояние e_0 , либо в состояние восстановления (ремонта).

Вариант 2.

Пусть нормально работающая система (состояние e_0) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_{01} , переходя в новое состояние e_1 , в котором она некоторое время может работать с необнаруженным отказом. Как только отказ обнаруживает-

ся (интенсивность обнаружения λ_{12}), производится осмотр системы (состояние e_2) и далее классификация отказа (состояние e_5). В результате классификации, устройство либо направляется в ремонт (состояние e_3), либо списывается и заменяется новым (состояние e_4). Из состояния e_3 с интенсивностью λ_{30} и из состояния e_4 с интенсивностью λ_{40} переходит в рабочее состояние e_0 .

Вариант3.

Пусть нормально работающая система (состояние e_0) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_{01} , переходя в новое состояние e_1 , связанное с восстановлением (ремонт). После восстановления (ремонта) система может перейти в новое состояние e_2 с некоторой интенсивностью, либо остаться в том же состоянии e_1 , когда ремонт не закончен или требуется еще один цикл ремонта. Далее, система из состояния e_2 переходит в рабочее состояние e_0 или в состояние сбоя, т.е. кратковременного отказа. После этого система может с различными интенсивностями перейти в состояния, когда техническая часть не отказывает, а результат анализа данных неудовлетворителен или когда техническая часть отказала и восстановилась, но результат анализа данных положителен. В каждом из случаев, соответственно, переходы осуществляются в состояние, связанное с повторным анализом или идентификацией результатов, откуда осуществляются переходы либо в начальное рабочее состояние e_0 , либо в состояние восстановления (ремонта).

Вариант4.

Пусть нормально работающая система (состояние e_0) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_{01} , переходя в новое состояние e_1 , в котором она некоторое время может работать с необнаруженным отказом. Как только отказ обнаруживается (интенсивность обнаружения λ_{12}), производится ремонт системы (состояние e_2). В результате ремонта, устройство либо направляется в повторный ремонт (состояние e_3) с интенсивностью λ_{23} , либо переходит в состояние проверки работоспособности (состояние e_4). Из состояния e_3 и из состояния e_4 с интенсивностью λ_{40} переходит в рабочее состояние e_0 .

Вариант5.

Пусть нормально работающая система (состояние e_0) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_{01} , переходя в новое состояние e_1 , связанное с анализом производительности. После этого анализа, в случае значительного снижения ее производительности, система может перейти в новое состояние e_2 с некоторой интенсивностью, либо остаться в том же состоянии e_1 . Далее, система из состояния e_2 переходит в рабочее состояние e_0 или в состояние ремонта. В результате ремонта, устройство либо направляется в повторный ремонт, либо переходит в состояние проверки работоспособности (состояние e_4). Из состояния e_3 и из состояния e_4 с интенсивностью λ_{40} переходит в рабочее состояние e_0 .

Вариант 6.

Пусть нормально работающая система (состояние e_0) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_{01} , переходя в новое состояние e_1 , связанное с анализом типа отказа. При этом, возможны следующие типы: отказ оборудования восстанавливаемый, программный сбой, неустранимый отказ с соответствующими интенсивностями. Из программного сбоя система переходит в состояние анализа программного обеспечения и далее – в состояние либо работоспособное e_0 или в состояние ремонта. После неустранимого отказа устройство списывается и заменяется новым, а система переходит в работоспособное состояние. После восстанавливаемого отказа система переходит в состояние восстановления. Далее система из состояния переходит в рабочее состояние e_0 или снова в состояние ремонта.

Вариант 7.

Пусть нормально работающая система (состояние e_0) подвергается анализу качества ее производительности (состояние e_1), далее может быть принято решение о профилактике системы (состояние e_2), либо система переходит в исходное состояние e_0 . Одновременно система подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_{03} , переходя в новое состояние e_3 , связанное с анализом типа отказа. В зависимости от определенного типа отказа система может перейти в невосстанавливаемое состояние, либо в состояние ремонта с некоторой интенсивностью. Далее, система может быть восстановлена, либо перейти в состояние профилактики, из которых – в начальное работоспособное состояние e_0 .

Контрольные вопросы:

1. Дать определение непрерывной марковской цепи.
2. Дать определения потоков событий, их классификацию.
3. Какой тип МЦ использован в модели лабораторной работы?
4. Записать общий вид дифференциальных уравнений Колмогорова.
5. Пояснить смысл плотности вероятности перехода, чему она соответствует?

Л.Р.№4

Анализ надежности информационной системы сбора и анализа мониторинговых данных

Порядок выполнения работы

Пусть в момент времени t система некоторого варианта находится в состоянии i . Поскольку вероятность $P_{ij}(t, \tau)$ перехода системы за время τ из состояния i в состояние j не зависит от поведения системы до момента времени t , то имеет место марковский процесс. Все варианты систем имеют конечное множество возможных состояний и характеризуются непрерывным функционированием. Следовательно, система является дискретной в пространстве и непрерывной во времени, а значит, описывается неоднородной марковской цепью с непрерывным временем. Неоднородность проявляется в том, что

$$\alpha_{ij}(t) \neq \text{const} \text{ для любых } i, j = \overline{1, n}.$$

Для оценки надежности и производительности составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

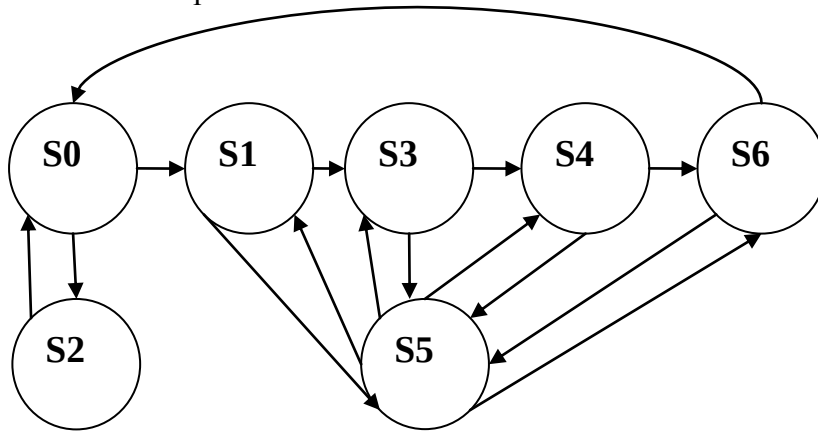


Рисунок 4.1 – Граф состояний системы

На рисунке 4.1 показаны следующие состояния: S0- начальное состояние системы, сбор данных; S1 - данные получены; S2- данные с устройств сбора не получены; S3- обработка данных; S4 - хранение данных; S5- контроль данных; S6-использование (восстановление данных).

Система дифференциальных уравнений Колмогорова для ЦГМД, с учетом уравнения нормировки, имеет вид:

$$\begin{cases} -a_0 \cdot p_0 + a_{20} \cdot p_2 + a_{60} \cdot p_6 = 0, \\ -a_1 \cdot p_1 + a_{01} \cdot p_0 + a_{51} \cdot p_5 = 0, \\ p_2 = a_{02} \cdot p_0 / a_{20}, \\ -a_2 \cdot p_3 + a_{13} \cdot p_1 + a_{53} \cdot p_5 = 0, \\ -a_3 \cdot p_4 + a_{34} \cdot p_3 + a_{54} \cdot p_5 = 0, \\ p_6 = a_{46} \cdot p_4 / a_{60}, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

где P_i - стационарные вероятности пребывания в состояниях системы ЦГМД. a_{ij} – интенсивности переходов в состояния S_j . В системе 3.1: $a_0 = a_{01} + a_{02}$; $a_1 = a_{15} + a_{13}$; $a_2 = a_{35} + a_{34}$; $a_3 = a_{45} + a_{46}$.

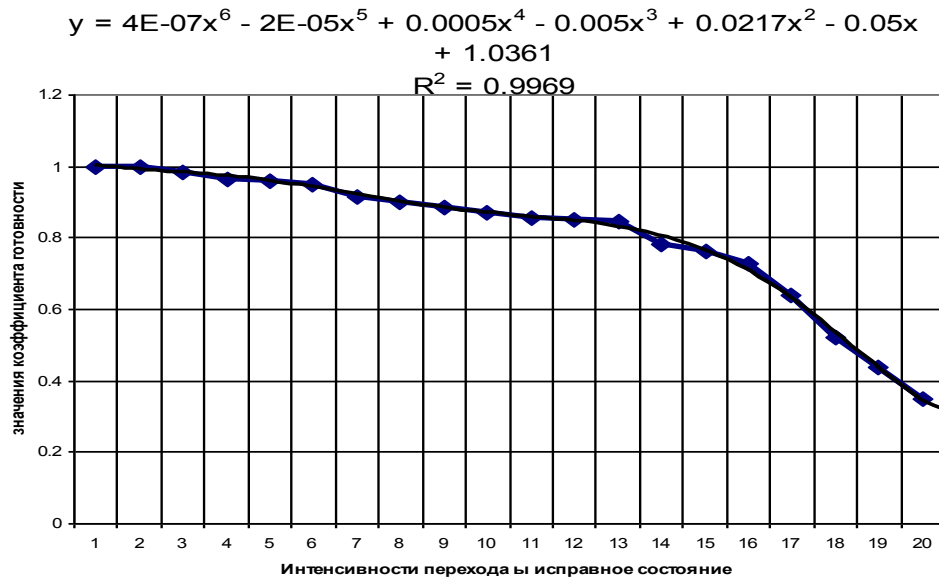


Рисунок 4.2 – Пример графика зависимости стационарного коэффициента готовности, от интенсивности входа в состояние отказа и полиномиальная аппроксимация 6-ой степени, величина достоверности 0.85

Модель надежности фазово укрупненной системы мониторинга

При применении к описанной выше системе метода фазового укрупнения [15, стр.16], было определено, что система может находиться в трех следующих обобщенных состояниях: начальное, исправное и состояние отказа (3.2).

$$\begin{cases}
 P_{i\hat{o}\hat{e}}(t) = P_o(t) - \hat{e}\hat{n}\hat{o}\hat{i}\hat{a}\hat{i}\hat{a} & \hat{n}\hat{i}\hat{n}\hat{o}\hat{i}\hat{y}\hat{i}\hat{e}\hat{a} , \\
 P_{o\hat{o}\hat{e}}(t) = P_2(t) - \hat{n}\hat{i}\hat{n}\hat{o}\hat{i}\hat{y}\hat{i}\hat{e}\hat{a} & \hat{i}\hat{o}\hat{e}\hat{a}\hat{c}\hat{a} \\
 P_{\hat{e}}(t) = P_1(t) + P_3(t) + P_4(t) + P_5(t) + P_6(t) - \hat{e}\hat{n}\hat{i}\hat{o}\hat{i}\hat{a}\hat{i}\hat{a} & \hat{n}\hat{i}\hat{n}\hat{o}\hat{i}\hat{y}\hat{i}\hat{e}\hat{a} .
 \end{cases} \quad (4.2)$$

Система уравнений Колмогорова для СФУ имеет вид:

$$\begin{cases}
 -(\alpha_{01} + \alpha_{02})P_i + \alpha_{20}P_{o\hat{o}\hat{e}} + \alpha_{60}P_{\hat{e}} = 0 \\
 -\alpha_{20}P_{o\hat{o}\hat{e}} + \alpha_{02}P_i + 0 \\
 -\alpha_{01}P_i + \alpha_{60}P_{\hat{e}} = 0
 \end{cases} , \quad (4.3)$$

Решения для полученной системы:

$$P_{i\hat{o}\hat{e}} = \frac{\alpha_{60}\alpha_{02}}{\alpha_{01}\alpha_{20} + \alpha_{60}\alpha_{20} + \alpha_{60}\alpha_{02}}, P_{\hat{e}} = \frac{\alpha_{01}\alpha_{20}}{\alpha_{01}\alpha_{20} + \alpha_{60}\alpha_{20} + \alpha_{60}\alpha_{02}}, \quad (3.4)$$

$$P_i = \frac{\alpha_{60}\alpha_{20}}{\alpha_{01}\alpha_{20} + \alpha_{60}\alpha_{20} + \alpha_{60}\alpha_{02}}.$$

Укрупненный граф состояний такой системы изображен на рисунке 3.4.

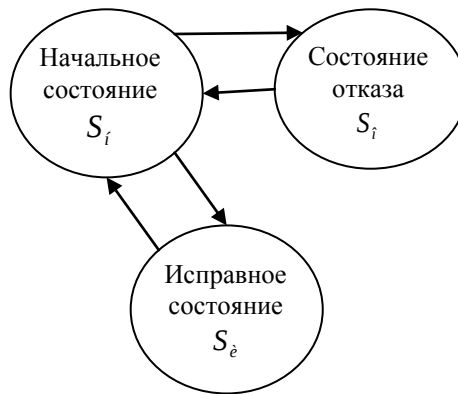


Рисунок 4.4 – Фазовое укрупнение ЦГМД

Задания к лабораторной работе:

1. По рисунку 4.1. получить решение системы диф.уровнений в одном из математических пакетов.
2. Построить по модели 1:
 - 2.1 Графики зависимостей стационарных вероятностей пребывания в состояниях от интенсивностей перехода в эти состояния;
 - 2.2 Зависимость стационарных вероятностей пребывания в состояниях от интенсивности перехода в состояние отказа;
 - 2.3 График зависимости стационарного коэффициента готовности, от интенсивности входа в состояние отказа и полиномиальную аппроксимации 6-ой степени, с величиной достоверности 0.85.
3. Построить по модели 2 (СФУ):
 - 3.1 Провести численное моделирование по решениям (выражение 4.4).

Таблица - Значения интенсивностей для численного моделирования

№ варианта	Интенсивность входа в исправное состояние	Интенсивность входа в состояние отказа	Интенсивность восстановления	P0	P1	P2
1	0,01, const	0,9, const	0,8			
2	0,01	0.5, const	0,8, const			
3	0,1,	0,9, const	0,8, const			
4	0,3, const	0,6, const	0,8			
5	0,5, const	0,9, const	0,8			
6	0,7, const	0,9	0,75, const			
7	0,25	0,001, const	0,8, const			
8	0,1, const	0,01, const	0,8			
9	0,1, const	0,1	0,8, const			
10	0,1	0,3, const	0,95, const			
0	0,99, const	0,5	0,1, const			

- 3.2 Построить график зависимости вероятности пребывания в состояниях отказа, начального и исправного от интенсивности входа в исправное состояние.
- 3.3 Построить график зависимости стационарного коэффициента готовности, от интенсивности входа в состояние отказа.
4. Сделать выводы.
5. Подготовить отчет, содержащий все этапы исследования. К отчету приложить коды программ и распечатки графиков.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение фазового укрупнения информационных систем.
2. Привести характеристики производительности и надежности информационных систем.
3. Какой тип МЦ использован в модели лабораторной работы?
4. Пояснить принцип построения систем уравнений (4.1), (4.3).
5. Привести выражение и пояснить смысл коэффициента готовности системы.

Л.Р.№5

Имитационные модели случайных процессов

Пример построения модели

Для того, чтобы проимитировать стрельбу из пушки по цели, построим модель марковского случайного процесса с дискретным временем [16].

Определим следующие три состояния: S_0 — цель не повреждена; S_1 — цель повреждена; S_2 — цель разрушена. Зададим вектор начальных вероятностей:

	S_0	S_1	S_2
P_0	0.8	0.2	0

Значение P_0 для каждого из состояний показывает, какова вероятность каждого из состояний объекта до начала стрельбы. Зададим матрицу перехода состояний (табл. 5.1).

Таблица 5.1.

Матрица вероятностей перехода дискретного марковского процесса

	В S_0	В S_1	В S_2	Сумма вероятностей переходов
Из S_0	0,45	0,40	0,15	$0,45+0,40+0,15=1$
Из S_1	0	0,45	0,55	$0+0,45+0,55=1$
Из S_2	0	0	1	$0+0+1=1$

Матрица задает вероятность перехода из каждого состояния в каждое. Вероятности заданы так, что сумма вероятностей перехода из некоторого состояния в остальные всегда равна единице (куда-то система должна перейти обязательно).

Модель марковского процесса можно представить себе в виде следующего графа (рис. 5.1).

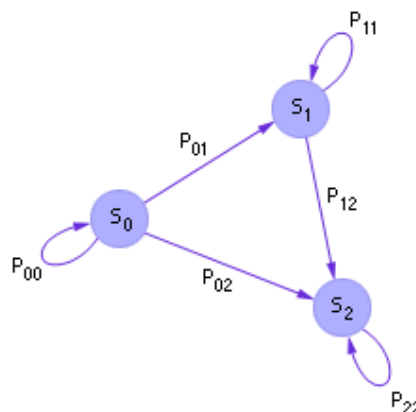


Рис. 5.1. Граф марковского процесса, моделирующий стрельбу из пушки по цели

Используя модель и метод статистического моделирования, решим следующую задачу: определить среднее количество снарядов, необходимое для полного разрушения цели.

Проимитируем, используя таблицу случайных чисел, процесс стрельбы. Пусть начальное состояние будет S_0 . Возьмем последовательность из таблицы случайных чисел: 0.31, 0.53, 0.23, 0.42, 0.63, 0.21, ...

Получим:

- 0.31: цель находится в состоянии S_0 и остается в состоянии S_0 , так как $0 < 0.31 < 0.45$;
 0.53: цель находится в состоянии S_0 и переходит в состояние S_1 , так как $0.45 < 0.53 < 0.45 + 0.40$;
 0.23: цель находится в состоянии S_1 и остается в состоянии S_1 , так как $0 < 0.23 < 0.45$;
 0.42: цель находится в состоянии S_1 и остается в состоянии S_1 , так как $0 < 0.42 < 0.45$;
 0.63: цель находится в состоянии S_1 и переходит в состояние S_2 , так как $0.45 < 0.63 < 0.45 + 0.55$.

Так как достигнуто состояние S_2 (далее цель переходит из S_2 в состояние S_2 с вероятностью 1), то цель поражена. Для этого в данном эксперименте потребовалось 5 снарядов.

На рис. 5.2 приведена временная диаграмма, которая получается во время описанного процесса моделирования. Диаграмма показывает, как во времени происходит процесс изменения состояний. Такт моделирования для данного случая имеет фиксированную величину. Нам важен сам факт перехода (в какое состояние переходит система) и не важно, когда это происходит.

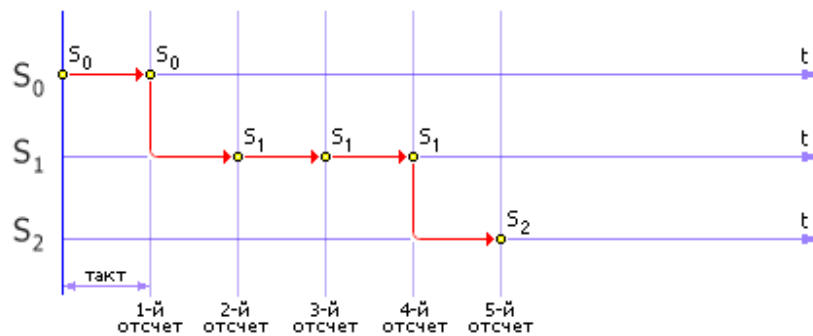


Рис. 5.2. Временная диаграмма переходов в марковском графе (пример имитации)

Процедура уничтожения цели совершена за 5 тактов, то есть марковская цепь этой реализации выглядит следующим образом: $S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_2$. Конечно, ответом задачи это число быть не может, так как в разных реализациях получатся разные ответы. А ответ у задачи может быть только один.

Повторяя данную имитацию, можно получить, например, еще такие реализации (это зависит от того, какие конкретно случайные числа выпадут): 4 ($S_0—S_0—S_1—S_1—S_2$); 11 ($S_0—S_0—S_0—S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_1—S_1—S_1—S_2$); 5 ($S_1—S_1—S_1—S_1—S_1—S_2$); 6 ($S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_1—S_2$); 4 ($S_1—S_1—S_1—S_1—S_2$); 6 ($S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_1—S_2$); 5 ($S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_2$). Всего уничтожено 8 целей. Среднее число циклов в процедуре стрельбы составило: $(5 + 4 + 11 + 5 + 6 + 4 + 6 + 5)/8 = 5.75$ или, округляя, 6. Именно столько снарядов, в среднем, рекомендуется иметь в боевом запасе пушки для уничтожения цели при таких вероятностях попаданий.

Теперь следует определить точность. Именно точность может нам показать, насколько следует доверять данному ответу. Для этого проследим, как сходятся последовательность случайных (приближенных) ответов к правильному (точному) результату. Напомним, что, согласно центральной предельной теореме, сумма случайных величин есть величина неслучайная, поэтому для получения статистически достоверного ответа необходимо следить за средним числом снарядов, получаемых в ряде случайных реализаций.

На первом этапе вычислений средний ответ составил 5 снарядов, на втором этапе средний ответ составил $(5 + 4)/2 = 4.5$ снаряда, на третьем — $(5 + 4 + 11)/3 = 6.7$. Далее ряд

средних величин, по мере накопления статистики, выглядит следующим образом: 6.3, 6.2, 5.8, 5.9, 5.8. Если изобразить этот ряд в виде графика средней величины выпущенных снарядов, необходимых для поражения цели, в зависимости от номера эксперимента, то обнаружится, что данный ряд сходится к некоторой величине, которая и является ответом (рис. 5.3).

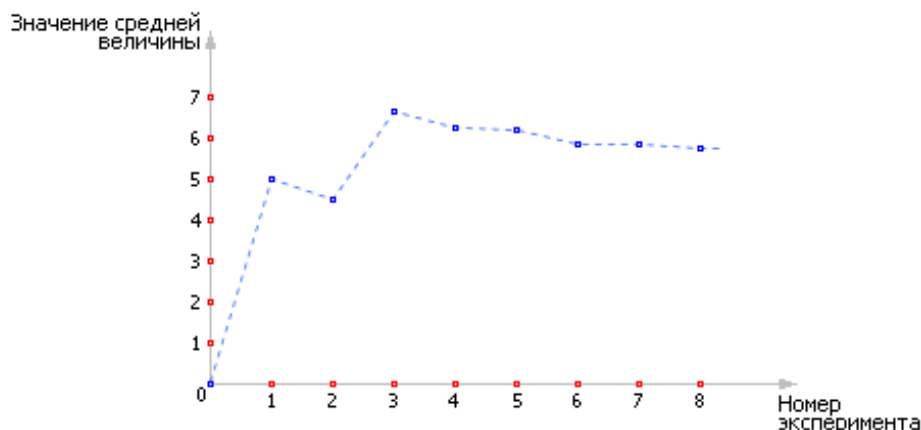


Рис. 5.3. Изменение средней величины в зависимости от номера эксперимента

Визуально мы можем наблюдать, что разброс между вычисляемой текущей величиной и ее теоретическим значением со временем уменьшается, стремясь к статистически точному результату. То есть в некоторый момент график входит в некоторую «трубку», размер которой и определяет точность ответа.

Задания к лабораторной работе:

1. По приведенной модели составить имитационную модель в одной из программных сред.
2. Спланировать эксперимент, построить графики, провести анализ полученных результатов.
3. Подготовить отчет, содержащий программу имитации, план эксперимента. Анализ результатов, соответствующие распечатки.

Библиографический список

1. Абчук В.А. Справочник по исследованию операций. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.
2. Алексахин С. В., Балдин А.В., Криницын А.Б. и др. Прикладной статистический анализ данных. Теория. Компьютерная обработка. Области применения. Кн. 1 и 2. – М.: «Изд. ПРИОР», 1998. – 336 с., 352 с.
3. Андросенко О.С., Девятченко Л.Д., Маяченко Е.П. Постановка задач Марковских процессов в формате программы WinQSB// Математика. Приложение математики в экономических, технических и педагогических исследованиях: Сб. науч. тр./ Под ред. М.В. Бушмановой. Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2006. С. 3 - 13.
4. Боровков А.А. Математическая статистика, Оценка параметров, проверка гипотез/А.А. Боровков. – М.: Наука, 1984. –472 с.
5. Брандт З. Статистические методы анализа наблюдений / З. Брандт. – М.: Мир, 1975.- 312 с.
6. Браун Р., Мэзон Р., Фламгольд Э. и др. Исследование операций. В 2-х томах. Пер. с англ. Т. 2. Модели и применения. М.: Мир, 1981. – 677 с., ил.

7. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с., ил.
8. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 320 с.
9. Девятченко Л.Д. Стохастические матрицы в исследовании систем: Метод. разработка. Магнитогорск: МГМИ, 1987, 32 с.
10. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970.
11. Самнер Г. Математика для географов / Г. Самнер. – М.: Прогресс, 1981. – 296 с.
12. Таха Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е изд.: пер. с англ. – М.: изд. дом «Вильямс», 2005. – 912 с., ил.
13. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применение в 2-х т.: пер. с англ. С предисловием Колмогорова А.Н. – М.: Мир, 1984. – 1- 528 с., 1984. – Т. 2 – 752 с.
14. Доронина Ю. В. Анализ количества осадков на основе цепей Маркова / Ю.В. Доронина // Сб. научных трудов УкрНИГМИ. – Киев, 2001. – Вып.249. – С. 82-88.
15. Королюк В.С. Стохастические модели систем / В.С. Королюк. – К.: Наук. думка, 1989. – 208 с.
16. Усов А.В., Савельева О.С., Становська І.І., Перпері А.О. Математичні методи моделювання. Підручник / За ред. Становського О.Л.. – Одеса: ПАЛЬМИРА, 2011. – 500 с.