

**Министерство образования и науки, молодежи и спорта  
Украины  
Севастопольский национальный технический университет**

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПОРШНЕВЫХ ДВС**

**Методические указания  
к практическим занятиям по дисциплине  
"Основы математического моделирования ТП  
на автотранспорте" для студентов направления  
6.070106 «Автомобильный транспорт»  
дневной и заочной форм обучения**

**Севастополь  
2012**

**УДК 517.272:621.431**

Моделирование процессов поршневых ДВС. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине "Основы математического моделирования ТП на автотранспорте" для студентов направления 6.070106 «Автомобильный транспорт» дневной и заочной форм обучения /Сост. В.П. Долгин, И.В. Долгин.– Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2012.- 48с.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями программы дисциплины "Основы математического моделирования ТП на автотранспорте" для студентов направления 6.070106. Целью настоящих указаний является оказание методической помощи при выполнении практических занятий по разделу моделирование процессов поршневых ДВС для студентов дневной и заочной форм обучения.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры АТ (протокол № 10 от 07.06. 2012 г.).

Допущено учебно-методическим центром университета  
в качестве методических указаний

Рецензент: Харченко А.А., канд. техн. наук, доцент.

>

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                  |           |
|--------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ .....</b>               | <b>4</b>  |
| <b>2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ .....</b>       | <b>5</b>  |
| <b>ЗАНЯТИЕ №1 .....</b>                          | <b>6</b>  |
| <b>ЗАНЯТИЕ №2 .....</b>                          | <b>12</b> |
| <b>ЗАНЯТИЕ №3 .....</b>                          | <b>17</b> |
| <b>ЗАНЯТИЕ №4 .....</b>                          | <b>22</b> |
| <b>ЗАНЯТИЕ №5 .....</b>                          | <b>28</b> |
| <b>ЗАНЯТИЕ №6 .....</b>                          | <b>32</b> |
| <b>ЗАНЯТИЕ №7 .....</b>                          | <b>36</b> |
| <b>ЗАНЯТИЕ №8 .....</b>                          | <b>40</b> |
| <b>ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ СТЕНДОВЫХ ИСПЫТАНИЙ</b> |           |
| <b>ПОРШНЕВЫХ ДВС .....</b>                       | <b>45</b> |
| <b>КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ .....</b>                 | <b>46</b> |
| <b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....</b>            | <b>48</b> |

## 1. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ

Основным элементом транспортного средства является двигатель, как источник механической энергии. Среди двигателей транспортных средств применяются, в основном, двигатели внутреннего сгорания (ДВС), преобразующие химическую энергию топлива в тепловую, а затем в механическую. Наиболее широко применяются поршневые ДВС, где это преобразование происходит внутри рабочего цилиндра. Процесс преобразования зависит от рода топлива, на котором работает двигатель. Превращение теплоты в работу в таких двигателях связано с реализацией целого комплекса сложных физико-химических, газодинамических и термодинамических процессов, которые определяют различия рабочих циклов и конструктивного их исполнения. Газообразным топливом для ДВС служат природный, сжиженный и генераторный газы. Жидкое топливо представляет собой продукты переработки нефти: бензин, керосин, дизельное топливо и др. Газожидкостные двигатели работают на смеси газообразного и жидкого топлива, причем основным топливом является газообразное, а жидкое используется как запальное в небольшом количестве. Многотопливные двигатели способны длительно работать на разных топливах в диапазоне от сырой нефти до высокооктанового бензина.

В зависимости от применяемого топлива, состава смеси, схемы её образования, степени сжатия, способа воспламенения, условий теплопередачи, способа осуществления рабочего цикла, объема камеры сгорания, схемы рабочего цикла и ряда характерных конструктивных особенностей поршневые ДВС разделяются на следующие группы: карбюраторные и дизельные (с непосредственным впрыском, предкамерные, форкамерные). Для перечисленных групп существуют аналитические описания характеристик процессов и режимов.

Среди проблем, возникающих при анализе процессов, определяющих качество работы двигателей, основными можно считать задачи, касающиеся идентификации, где по результатам ряда измерений требуется найти параметры функции, наиболее достоверно отражающей характер исследуемого процесса. Такие задачи традиционно решаются статистическими методами приближения функций. Наиболее удобными в рамках поставленной задачи являются процедуры аппроксимации на основе метода наименьших квадратов.

В качестве примеров решения указанных задач рассмотрены процедуры идентификации

- функции управления дроссельной заслонкой карбюратора;

- параметров политропы сжатия;
- коэффициентов функций Лейдермана;
- оценки границ устойчивости.

## 2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

По таблице  $m$  измерений  $Y(x_k)$ ;  $k = [1, m]$  найти приближающую функцию  $y(x)$ , которая в точках измерения  $x_1, \dots, x_m$  принимает наиболее близкие значения к табличным  $Y(x_k)$ .

Для получения решения необходимо задать вид приближающей функции. Пусть приближающая функция - полином  $n$ -й степени

$$y(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad (1)$$

где коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  являются искомыми параметрами.

В результате решения необходимо найти коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  приближающей функции.

В качестве критерия близости  $U$  значений приближаемой  $Y(x_k)$  и приближающей  $y(x)$  функций примем сумму квадратов разностей соответствующих табличных значений  $Y(x_k)$  и значений приближающей функции  $y(x_k)$ . Возьмем сумму квадратов разностей значений  $y_k = y(x_k)$  и  $Y_k = Y(x_k)$  на всем пространстве значений для  $k = [1, m]$

$$U = \sum_{k=1}^m (Y_k - y_k)^2$$

и потребуем минимального значения критерия  $U$ .

Для нахождения минимального  $U$  необходимо приравнять нулю частные производные по каждому из параметров функции  $y(x)$ :

$$\frac{d}{da_0} U = 0; \quad \frac{d}{da_1} U = 0; \quad \dots; \quad \frac{d}{da_n} U = 0.$$

Найдя частные производные по всем параметрам приближающей функции  $\frac{d}{da_0}U, \frac{d}{da_1}U, ..., \frac{d}{da_n}U$ , получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m (y_k - Y_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^m (y_k - Y_k) x_k = 0; \\ \sum_{k=1}^m (y_k - Y_k) x_k^2 = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^m (y_k - Y_k) x_k^n = 0, \end{array} \right.$$

решение которой относительно неизвестных  $a_0, a_1, \dots, a_n$  является искомым решением.

## Процедура приближения

Численное решение получим с помощью математического пакета прикладных программ Maple, применив оператор `fit(°)` пакета программ статистики `with(stats)`

```
fit[leastsquare([x,y], y=W)]([Sx,Sy]);
```

где  $Sy := [\text{seq}(Y[i], i=1..m)]:$  # множество ординат

$$Sx := [\text{seq}(X[i], i=1..m)]: \quad \# \text{ множество абсцисс}$$
$$W := \sum(a[j] \cdot x^j, j = 0 \dots n); \text{ \# приближающий полином, формула (1)}$$

## ЗАНЯТИЕ №1

**ДИСЦИПЛИНА: Основы математического моделирования ТП  
на автотранспорте**

## ТЕМА ЗАНЯТИЯ: Метод наименьших квадратов (МНК)

**ЦЕЛЬ ЗАНЯТИЯ:** Построение модели процесса управления дроссельной заслонкой карбюратора

Ст. гр. АВ-41з    Фамилия И.О.

## КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В результате эксперимента получена таблица значений некоторой зависимости  $Y(x)$ .

Таблица 1 – Таблица значений

|                      |        |          |          |       |          |
|----------------------|--------|----------|----------|-------|----------|
| Результаты Измерений | $Y(x)$ | $Y(x_1)$ | $Y(x_2)$ | ..... | $Y(x_m)$ |
|                      | $x$    | $x_1$    | $x_2$    | ..... | $x_m$    |
| Приближающая Функция | $y(x)$ | $y(x_1)$ | $y(x_2)$ | ..... | $y(x_m)$ |

Нужно найти формулу  $y(x)$ , выражающую эту зависимость аналитически.

### Постановка задачи

По результатам  $m$  измерений найти функцию  $y(x)$  заданного вида, которая в точках  $x_1, \dots, x_m$  принимает значения наиболее близкие к табличным  $Y(x_1), \dots, Y(x_m)$ .

### Анализ приближаемой функции

Эффективное сечение в функции угла поворота заслонки является гармонической функцией вида

$$F(x) = A \cos(x), \quad (2)$$

где  $A$  – площадь заслонки,  $x$  – угол поворота в диапазоне  $[0, \pi/2]$ .

Сведем функцию  $F(x)$  к полиномиальной путем разложения её нелинейной составляющей  $\cos(x)$  в степенной ряд [2] с членами  $(-1)^j x^{2j}/(2j)!$ , где  $j = [0, m]$

$$F(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^j x^{2j}/(2j)!.$$

При этом будет допущена погрешность  $\varepsilon$ , величина которой ограничена [2] значением  $\varepsilon_m < |x^{2m}/(2m)!|$ . Как очевидно, максимальным значение погрешности  $\varepsilon_m$  будет при максимальной величине  $x = \pi/2$  и составит

$$\varepsilon_m < (1,6)^{2m}/(2m)!.$$

Выражение для максимальной погрешности  $\varepsilon_m$  позволяет оценить требуемое число слагаемых  $m$ .

Значения максимальной погрешности  $\varepsilon_m$  быстро убывают с ростом числа членов  $m$ . Результат вычисления  $\varepsilon_m$  представлен в таблице 2.

Таблица 2 – Значения погрешности  $\varepsilon_m$

| $m$             | 1   | 2                 | 3         | 4                   | 5                 |
|-----------------|-----|-------------------|-----------|---------------------|-------------------|
| $\varepsilon_m$ | 1,2 | $2 \cdot 10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $2,5 \cdot 10^{-5}$ | $5 \cdot 10^{-7}$ |

Из таблицы 2 видно, что уже для числа членов разложения  $m=3$  функции  $F(x)$ , погрешность составляющей  $\cos(x)$  будет  $\varepsilon_m < 10^{-3}$ , что в большинстве случаев оказывается приемлемым.

Таким образом, приближающий полином необходимо выбрать степени  $n \leq 2m$ .

### Задача

По результатам замеров эффективного сечения канала воздуховода при изменении положения заслонки, описываемого выражением (2), найти параметры  $a_j$  ( $j=[0; n]$ ) приближающей полиномиальной функции  $y(x)$   $n$ -го порядка

$$y(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j,$$

аппроксимирующей закон изменения эффективного сечения от угла поворота дроссельной заслонки  $x$ . Построить графики процесса и погрешности аппроксимации при действии случайной погрешности измерений  $\xi$ .

### Задание

Выполнить приближение функции для двух разных значений порядка полинома  $n = [1, 2m]$  и сделать вывод.

### Структура имитационной модели

1. Описание конфигурации вычислительной системы
2. Описание (2) процесса  $F(x_k)$  и его параметров
3. Формирование таблицы 1 данных с введенной погрешностью

$$Y(x_k) = F(x_k) + \xi_k$$

4. Описание приближающей функции

$$y(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

5. Описание процедуры приближения

6. Вывод графиков функций  $Y(x_k)$ ,  $y(x_k)$

7. Вывод графика погрешности приближения  $\varepsilon(x_k)$

## MNK\_ZASLONKA

### ВЕРСИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

> #1. Конфигурация вычислительной системы

```
restart:          # Очистка памяти
with(stats):     # Статистические вычисления
with(plots):     # Построение графиков
№:=050005;       # НОМЕР ЗАЧЕТНОЙ КНИЖКИ
N:=7;            # Порядковый номер по списку группы
randomize(№);    # Установка генератора случайных чисел
```

$N := 7$

50005

> #2. Описание процесса и его параметров

```
F:=A*cos(x);      # математическая модель процесса
A:=Pi*R^2:        # площадь заслонки
R:=stats[random,uniform[2,4]](1):
R:=evalf[2](R);   # радиус заслонки
F1:=A*sum('x^(2*i)/(2*i)!*(-1)^i', 'i'=0..n/2):
```

$F := A \cos(x)$

$R := 2.2$

> #3. Формирование таблицы 1

```
m:=100:          # число реализаций процесса
h:=.5*Pi/m:      # шаг по аргументу
X:=array(0..m):  # массив абсцисс
Y:=array(0..m):  # массив ординат
Mo:=0:           # математическое ожидание
So:=.05*A:       # стандартное отклонение
xi:=stats[random,normald[Mo,So]](m):
xi:=evalf[3](xi): # имитация погрешности
```

```

for k to m do X[k]:=evalf(h*k): # значения абсцисс
Y[k]:=subs(x=X[k],F)+xi[k] # значения ординат
od:
> # Таблица 2
Ep:=evalf(x^(2*i)/(2*i)!): # i-й член полинома
Em:=evalf(subs(x=Pi/2,Ep)): # максимальная погрешность
Sm:=evalf[3](seq(Em,i=1..6)): # массив i-х значений Em
POLYNOM:= seq(Ep*(-1)^i,i=0..6): # Полином F(x)
Gm:=plot(log10(Em),i=2..6,thickness=3), # График Em
pointplot({seq([i,log10(Em)],i=1..6)}):
plots[display](Gm,title="ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ КРИВАЯ
ПОГРЕШНОСТИ");

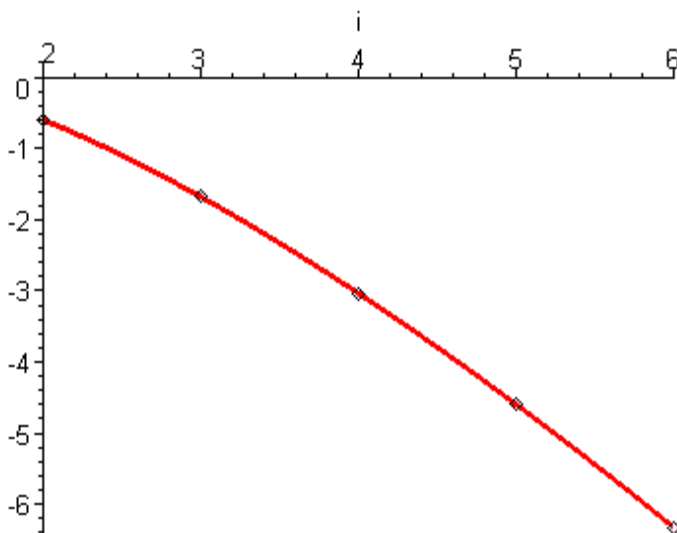
```

$Sm := 1.23, .253, .0208, .000916, .0000251, .468 \cdot 10^{-6}$

POLYNOM:=

$1.00, -.500 x^2, .0417 x^4, -.00139 x^6, .0000248 x^8, -.275 \cdot 10^{-6} x^{10}, .209 \cdot 10^{-8} x^{12}.$

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ КРИВАЯ ПОГРЕШНОСТИ



> #4. Описание приближающей функции

x:='x': # абсцисса полиномиальной функции

n:=2: # порядок приближающего полинома

W:=sum('a[j]\*x^j','j'=0..n): # приближающий полином

$$W := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

```

> #5. Процедура приближения
Sy:= [seq(Y[i], i=1..m)]: # множество ординат
Sx:= [seq(X[i], i=1..m)]: # множество абсцисс
MNK:=fit[leastsquare][[x,y], y=W]] ([Sx, Sy]);
Rez:=evalf[3](MNK);      # результат приближения
assign(Rez):              # присвоение значений
Rez := y = 15.7 - 2.46 x - 4.91 x2

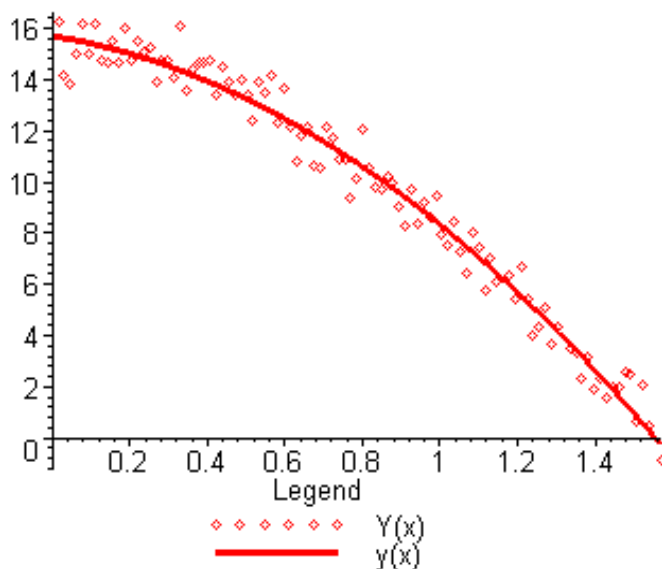
```

```

> #6. Графики Y(x), y(x)
k:='k':
Gp:=plot([X[k], Y[k], k=1..m],
         style=point, legend="Y(x)"):
Gy:=plot(y, x=0..Pi/2, thickness=3, legend="y(x)"):
plots[display](Gp, Gy, title="ГРАФИКИ ПРОЦЕССОВ");

```

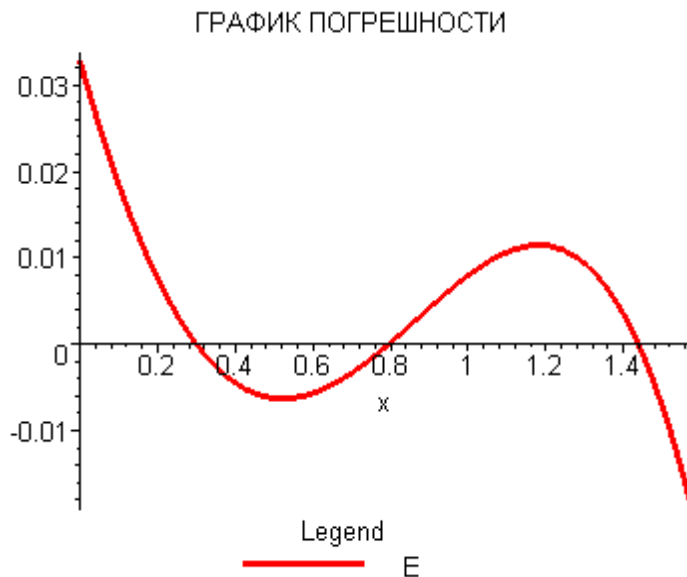
ГРАФИКИ ПРОЦЕССОВ



```

> #7. График погрешности приближения E
E:=(y-F)/A:
plot(E, x=0..Pi/2, thickness=3, title="ГРАФИК
ПОГРЕШНОСТИ", legend="E");

```



&gt;

**MNK\_POLITROPA****ЗАНЯТИЕ №2****ДИСЦИПЛИНА:** Основы математического моделирования  
ТП на автотранспорте**ТЕМА ЗАНЯТИЯ:** Математическое моделирование процессов  
методом наименьших квадратов (МНК)**ЦЕЛЬ ЗАНЯТИЯ:** Построение модели оценки параметров политропы  
сжатия по экспериментальным данным**Ст. гр. АВ-41з Фамилия И.О.****КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ**

Процесс сжатия создает благоприятные условия для воспламенения и сгорания рабочей смеси и обеспечивает эффективное преобразование теплоты в механическую работу. В реальном цикле процесс сжатия является политропным. При расчетах показатель политропы сжатия считают постоянным, равным среднему значению. Величина показателя политропы сжа-

тия меняется в процессе эксплуатации двигателя вследствие изменения зазоров и состояния поршневой группы.

Средний показатель политропы в зависимости от режимов работы лежит в пределах  $m=1.30-1.40$  у карбюраторных двигателей и  $m=1.20-1.35$  у дизельных. Для определения показателя политропы используют формулу, предложенную профессором В. А. Петровым

$$m = 1,41 - \frac{100}{n},$$

где  $n$  - частота вращения двигателя [об./мин].

### Уравнение политропы сжатия.

Оценку параметров политропы сжатия можно получить по экспериментальным данным измерения давления в цилиндре  $P$  двигателя при изменении объема рабочей камеры  $V_x$ , связанных уравнением

$$P(V_x) = P_a \left( \frac{V_a}{V_x} \right)^q,$$

где  $P_a$  - максимальное давление в ВМТ (верхней мертвой точке, МПа),  
 $V_a$  - объем цилиндра в ВМТ (см<sup>3</sup>),  
 $V_x$  - текущее значение объема цилиндра (см<sup>3</sup>),  
 $q$  - показатель политропы.

### Модель процесса

Оценке подлежат параметры политропы  $P_a$  и  $m$  при известном значении  $V_a$ , которые можно найти методом наименьших квадратов. Для их определения необходимо свести выражение политропы  $P(V_x)$  к полиномиальной форме

$$y(x) = a_0 + a_1 x,$$

где  $y(x) = \ln(P(V_x))$ ;  $a_0 = \ln(P_a)$ ;  $a_1 = q$ ;  $x = V_a/V_x$ , что получается в результате логарифмирования выражения  $P(V_x)$ .

Экспериментальные значения будут получены с некоторой случайной погрешностью  $\xi$ . Если погрешность обусловлена округлением результата

измерения, то закон ее изменения близок к равномерному распределению. Зная погрешность измерительного прибора  $E$ , можно задать границы изменения случайной погрешности в пределах  $\pm E$ .

Результаты моделирования процесса представим в табличной форме (таблица 1), где  $Y(x) = \ln(P(V_x) + \xi)$  – результат измерения давления  $P(V_x)$  в камере сгорания, полученный с погрешностью  $\xi$  при текущем объеме камеры сгорания  $V_x$ ,  $x = \frac{V_a}{V_x}$  – относительное значение абсциссы политропы сжатия,  $y(x) = a_0 + a_1x$  – приближающая функция.

Таблица 1 – Таблица значений

|                      |        |          |          |       |          |
|----------------------|--------|----------|----------|-------|----------|
| Результаты измерений | $Y(x)$ | $Y(x_1)$ | $Y(x_2)$ | ..... | $Y(x_m)$ |
|                      | $x$    | $x_1$    | $x_2$    | ..... | $x_m$    |
| Приближающая функция | $y(x)$ | $y(x_1)$ | $y(x_2)$ | ..... | $y(x_m)$ |

По найденным параметрам  $(a_0, a_1)$  приближающей функции можно определить искомые значения  $P_a = \exp(a_0)$  и  $q = a_1$ .

## СТРУКТУРА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. Описание конфигурации вычислительной системы
2. Ввод уравнения политропы сжатия
3. Ввод параметров модели
4. Формирование таблицы данных
5. Описание процедуры МНК- приближения
6. Вывод графиков результатов МНК- приближения
7. Вывод графика погрешности приближения

## ВЕРСИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ

```
> #1. Конфигурация вычислительной системы
restart:      # Очистка памяти
with(stats):  # Пакет статистических вычислений
with(plots):  # Пакет построения графиков
№:=050005:    # НОМЕР ЗАЧЕТНОЙ КНИЖКИ
N:=7;         # Порядковый номер по списку группы
randomize(№); # Установка генератора случайных чисел
```

$N := 7$   
50005

> #2. Политропа сжатия

```

Px:=Pa*(Va/Vx)^q; # Уравнение политропы
Pa:=5:           # Давление в ВМТ
Va:=.5:          # Объем камеры в ВМТ
Vz:=4:           # Объем камеры в НМТ
q:=1.25+.01*N:   # Показатель степени политропы

```

$$P_x := P_a \left( \frac{V_a}{V_x} \right)^q$$

> #3. Параметры модели

```

z:=100:          # Число измерений
h:=(Vz-Va)/z:    # Величина шага
E:=.05*Pa:       # Предельный уровень шума
Y:=array(1..z):  # Массив ординат
X:=array(1..z):  # Массив абсцисс

```

> #4. Формирование таблицы данных

```

xi:=stats[random,uniform[-E,E]](z):#Модель погрешности
for i to z do Vx:=Va+i*h:  # Значение рабочего объема
Y[i]:=ln(Px+xi[i]):        # Измеренная ордината
X[i]:=ln(Va/Vx)            # Значение абсциссы
od:

```

> #5. Описание процедуры МНК- приближения

```

Sy:=[seq(Y[i],i=1..z)]:    # Множество ординат
Sx:=[seq(X[i],i=1..z)]:    # Множество абсцисс
MNK:=fit[leastsquare[[x,y]]](Sx,Sy):# МНК-процедура
Rez:=evalf[4](MNK);        # Результат приближения
assign(Rez):               # Присвоение значений
a[0]:=coeff(y,x,0);        # Идентификация  $a_0$ 
a[1]:=coeff(y,x,1);        # Идентификация  $a_1$ 
P:=exp(a[0])*x^a[1];        # Приближающая функция

```

$$Rez := y = 1.664 + 1.388 x$$

$$a_0 := 1.664$$

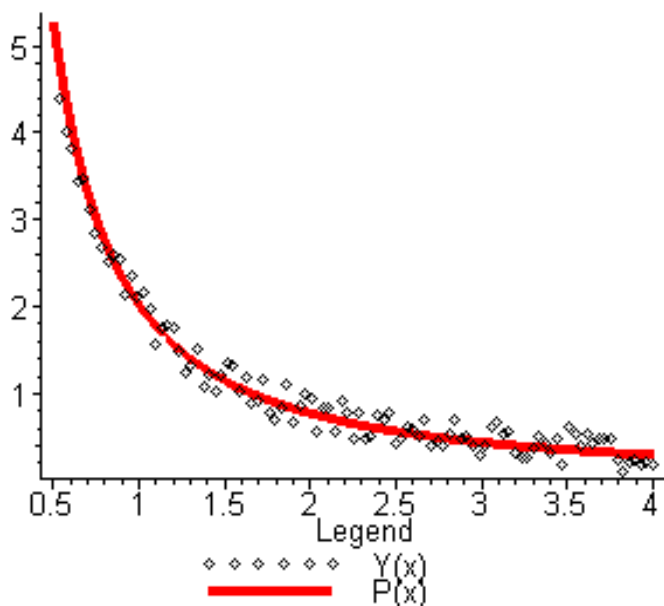
$$a_1 := 1.388$$

$$P := 5.280390218 x^{1.388}$$

```

> #6. Графики результатов МНК- приближения
Ge:                                # Аппроксимирующая кривая
Gy:                                # Аппроксимируемая кривая
Ge:=plot([Va/x,P,x=1..Va/Vz],
         thickness=4, legend="P(x)"):
Gy:=pointplot({seq([Va+J*h,exp(Y[J])],J=1..z)},
              legend="Y(x)"):
plots[display](Gy,Ge,title="РЕЗУЛЬТАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ");
РЕЗУЛЬТАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ

```

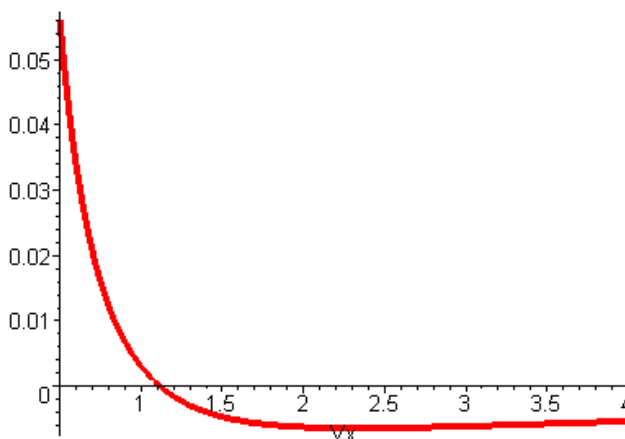


```

> #7. Погрешность приближения
Vx:='Vx':
plot((subs(x=Va/Vx,P)-Px)/Pa,Vx=Va..Vz,thickness=4,
     title="ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ");

```

ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ



**MNK\_RASXOD=1**

### **ЗАНЯТИЕ №3**

**ДИСЦИПЛИНА:** Основы математического моделирования  
ТП на автотранспорте

**ТЕМА ЗАНЯТИЯ:** Математическое моделирование процессов  
методом наименьших квадратов (МНК)

**ЦЕЛЬ ЗАНЯТИЯ:** Построение модели оценки коэффициентов  
Лейдермана функции расхода топлива

**Ст. гр. АВ-41з Фамилия И.О.**

### **КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ**

Управление режимом работы ДВС и решение задач диагностики возможно по результатам измерения его параметров, представленных в форме коэффициентов функции Лейдермана [1], которые могут изменяться в процессе эксплуатации. Задача состоит в оценке значений указанных коэффициентов, которая может быть решена, например, с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Для этого необходимо по данным таблицы  $m$  измерений  $Y(x_k)$ ;  $k = [1, m]$  найти приближающую функцию  $y(x)$ , которая в точках измерения  $x_1, \dots, x_m$  принимает наиболее близкие значения к табличным  $Y(x_k)$ .

Для получения решения необходимо приближающую функцию представить в форме полинома  $n$ -й степени

$$y(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

В результате решения требуется найти его коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

В качестве критерия близости примем сумму квадратов разностей соответствующих табличных значений и значений приближающей функции. Возьмем сумму квадратов разностей для значений  $y_k = y(x_k)$  и  $Y_k = Y(x_k)$  при  $k = [1, m]$

$$U = \sum_{k=1}^m (Y_k - y_k)^2$$

и потребуем минимального значения для  $U$ .

В соответствии с методикой МНК – приближения для нахождения минимума необходимо приравнять нулю производные по каждому из параметров функции  $y(x)$ :

$$\frac{d}{da_0} U = 0; \frac{d}{da_1} U = 0; \dots; \frac{d}{da_n} U = 0.$$

Найдя частные производные по всем параметрам приближающей функции  $dU/da_0, dU/da_1, \dots, dU/da_n$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (y_k - Y_k) &= 0; & \left( \sum_{k=1}^m (y_k - Y_k) \right) x_k &= 0; \\ \left( \sum_{k=1}^m (y_k - Y_k) \right) x_k^2 &= 0, \dots, & \left( \sum_{k=1}^m (y_k - Y_k) \right) x_k^n &= 0, \end{aligned}$$

решение которой относительно неизвестных  $a_0, a_1, \dots, a_n$  является решением задачи.

**Задача.** По результатам замеров расхода топлива найти коэффициенты  $a_j$  ( $j=[0, n]$ ) полиномиальной функции  $y(x)$   $n$ -го порядка

$$y(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j,$$

аппроксимирующей закон изменения расхода топлива при изменении частоты вращения вала двигателя, распределенной по заданному закону.

**Решение.** В качестве независимой переменной примем относительную частоту вращения  $x = n_x / n_e$ , где  $n_x$  – текущее значение в диапазоне от минимального до максимального допустимых значений, а  $n_e$  – частота вращения коленчатого вала двигателя при максимальной мощности.

Аналитической зависимостью удельного эффективного расхода топлива от частоты вращения коленчатого вала двигателя является формула Лейдермана

$$g_x = g_n \left( A_1 - B_1 \frac{n}{n_x} + C_1 \left( \frac{n}{n_x} \right)^2 \right),$$

где  $g_x$  – удельный эффективный расход топлива в расчетной точке,  $g_n$  – удельный эффективный расход топлива при номинальной мощности.

С учетом введенных обозначений функцию удельного эффективного расхода топлива, выполнив нормирование по расходу  $g_n$ , сведем к виду

$$F(x) = A_1 - B_1 x + C_1 (x)^2,$$

где  $F(x) = g_x / g_n$  – нормированная функция удельного эффективного расхода топлива.

В качестве модели приближаемой функции примем

$$Y_k = F_k + \xi_k,$$

где  $F_k = A_1 - B_1 x_k + C_1 x_k^2$  – нормированная функция расхода [1],  $\xi_k$  – случайная погрешность  $k$  – го измерения, считая её распределенной по нормальному (N – шум) либо равномерному (R – шум) закону в диапазоне погрешности измерений  $\pm E$ .

## СТРУКТУРА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. Описание конфигурации вычислительной системы
2. Формирование таблицы
3. Описание процедуры MNK- приближения
4. Иллюстрация результата MNK – приближения

5. Оценка погрешности приближения
6. Вывод полученных коэффициентов Лейдермана
7. Оценка максимальной погрешности приближения

**MNK\_RASXOD=1**

### **ВЕРСИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ**

```
> #1. # Конфигурация вычислительной системы
restart:          # Очистка памяти
with(stats):      # Пакет статистических вычислений
N:=050015;        # НОМЕР ЗАЧЕТНОЙ КНИЖКИ
N:=7;             # Порядковый номер по списку
randomize(N);

N:= 7
50015

> #2. Формирование таблицы
m:=30:            # число реализаций процесса
h:=1.25/m:        # шаг дискретизации
X:=array(0..m):   # массив абсцисс
Y:=array(0..m):   # массив ординат
F:=A1-B1*x+C1*x^2; # нормированная функция расхода
A1:=1.2:B1:=1:C1:=.8: # коэффициенты Лейдермана
x:=h*k:           # значение аргумента
E:=.01:           # погрешность измерений
#xi:=stats[random,uniform[-E,E]](m): # R - шум
xi:=stats[random,normald[0,E]](m): # N - шум
for k to m do     # формирование таблицы
    X[k]:=x:      # значения абсцисс
    Y[k]:=F+xi[k] # значения ординат
od:
```

$$F := A1 - B1 x + C1 x^2$$

```
> #3. Процедура MNK- приближения
x:='x':          # аргумент приближающего полинома
n:=2:            # порядок приближающего полинома
y:=sum('a[j]*x^j','j'=0..n); # приближающий полином
Var:={seq(a[i],i=0..n)};    # множество неизвестных
Sys:={seq(sum('Y[k]-      # система уравнений
subs(x=k*h,y))*(k*h)^i','k'=1..m),i=0..n)}:
Rez:=solve(Sys,Var);        # решение системы
assign(Rez):                # присвоение значений
```

$$y := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$Var := \{a_0, a_1, a_2\}$$

$$Rez := \{a_2 = .7828863289, a_1 = -.9762703105, a_0 = 1.196679017\}$$

> #4. Иллюстрация результата МНК-приближения

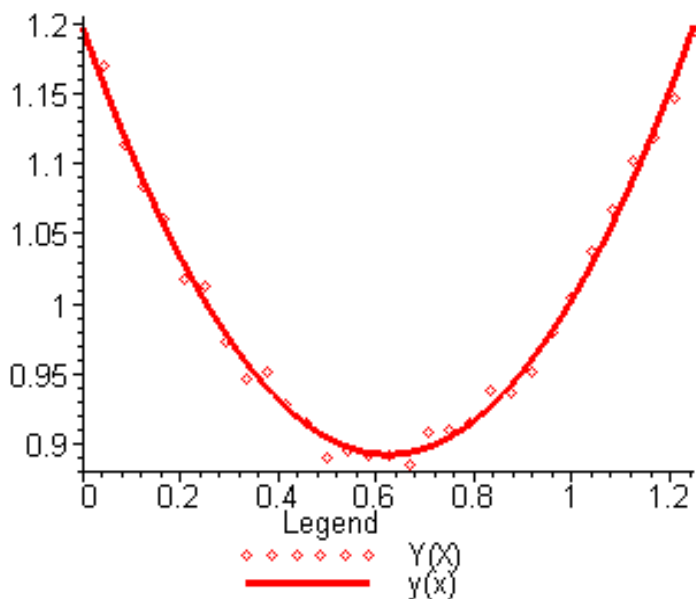
k:='k':

Gp:=plot([X[k],Y[k],k=1..m],  
style=point,legend="Y(X)");

Gy:=plot(y,x=0..h\*m,thickness=3,legend="y(x)");

plots[display](Gp,Gy,title="РЕЗУЛЬТАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ");

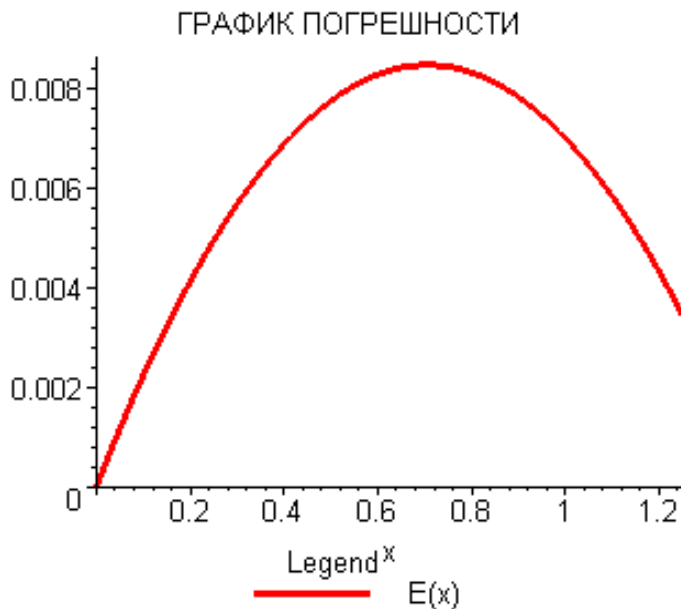
РЕЗУЛЬТАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ



> #5. Погрешность приближения E

E:=y-F:

plot(E, x=0..h\*m,thickness=3,  
legend="E(x)",title="ГРАФИК ПОГРЕШНОСТИ");



> #6. Вычисленные коэффициенты Лейдермана

A1:=evalf[3](coeff(y,x,0));

B1:=evalf[3](coeff(y,x,1));

C1:=evalf[3](coeff(y,x,2));

A1 := 1.20

B1 := -.976

C1 := .783

> #7. Максимальная погрешность приближения

E<sub>max</sub>:=evalf[3](maximize(abs(E),x=0..h\*m));

E<sub>max</sub> := .00843

**ВЫВОД:** Абсолютная погрешность приближения - менее ...

MNK\_POWER

ЗАНЯТИЕ №4

ДИСЦИПЛИНА: Основы математического моделирования

### ТП на автотранспорте

**ТЕМА ЗАНЯТИЯ:** Математическое моделирование процессов

**ЦЕЛЬ ЗАНЯТИЯ:** Построение МНК – модели оценки коэффициентов Лейдермана функции эффективной мощности

Ст. гр. АВ-41з Фамилия И.О.

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Мощность, экономичность и другие параметры поршневых двигателей зависят от ряда факторов (вида топлива, настройки режимов и др.) изменяются в процессе эксплуатации. Внешняя скоростная характеристика для оценки мгновенной мощности может быть получена расчетным путем с помощью функции Лейдермана [1,2]

$$N_x = N_m \left( A \frac{n}{n_e} + B \left( \frac{n}{n_e} \right)^2 - C \left( \frac{n}{n_e} \right)^3 \right).$$

При вычислении функции необходимо знать её коэффициенты  $A, B$  и  $C$ , которые могут изменяться в процессе эксплуатации.

Задача состоит в оценке значений указанных коэффициентов. Она может быть решена, например, с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Для этого необходимо по данным таблицы  $m$  измерений  $Y(x_k)$ ;  $k = [1, m]$  найти приближающую функцию  $y(x)$ , которая в точках измерения  $x_1, \dots, x_m$  принимает наиболее близкие значения к табличным  $Y(x_k)$ .

Для получения решения необходимо приближающую функцию представить в форме полинома  $n$  – й степени ( $n = 3$ )

$$y(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

В результате решения требуется найти коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

В качестве критерия близости примем сумму квадратов разностей соответствующих табличных значений и значений приближающей функции. Возьмем сумму квадратов разностей для значений  $y_k = y(x_k)$  и  $Y_k = Y(x_k)$  при  $k = [1, m]$

$$U = \sum_{k=1}^m (Y_k - y_k)^2$$

и потребуем минимального значения для  $U$ .

В соответствии с методикой МНК – приближения для нахождения минимума необходимо приравнять нулю производные по каждому из параметров функции  $y(x)$ :

$$\frac{d}{da_0} U = 0; \frac{d}{da_1} U = 0; \dots; \frac{d}{da_n} U = 0.$$

Найдя частные производные по всем параметрам приближающей функции  $dU/da_0, dU/da_1, \dots, dU/da_n$ , приравняв их нулю, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (y_k - Y_k) &= 0; & \left( \sum_{k=1}^m (y_k - Y_k) \right) x_k &= 0; \\ \left( \sum_{k=1}^m (y_k - Y_k) \right) x_k^2 &= 0, \dots, & \left( \sum_{k=1}^m (y_k - Y_k) \right) x_k^n &= 0, \end{aligned}$$

решение которой относительно неизвестных  $a_0, a_1, \dots, a_n$  является решением задачи.

**ЗАДАЧА.** По результатам замеров мгновенной мощности  $N_x$  найти коэффициенты  $a_j$  ( $j=[0, n]$ ) полиномиальной функции  $y(x)$   $n$ -го порядка

$$y(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j,$$

аппроксимирующей закон изменения мгновенной мощности  $N_e$  при изменении частоты вращения вала двигателя в заданном диапазоне.

**РЕШЕНИЕ.** В качестве независимой переменной примем относительную частоту вращения  $x = n_x / n_e$ , где  $n_x$  – текущее значение частоты вращения коленчатого вала двигателя в диапазоне от минимального до максимального допустимых значений, а  $n_e$  – частота вращения коленчатого вала двигателя при максимальной мощности [1].

В этом случае формулу Лейдермана можно представить в упрощенном виде

$$N_x = N_m x(A + Bx - Cx^2),$$

где  $N_x$  – значение мгновенной мощности в расчетной точке,  $N_m$  – значение максимальной мощности двигателя.

С учетом введенных обозначений функцию мгновенной мощности, выполнив нормирование по максимальной мощности  $N_m$ , сведем к виду

$$F(x) = x(A + Bx - Cx^2),$$

где  $F(x) = N_x / N_m$  – нормированная функция изменения мгновенной мощности.

В качестве модели приближаемой функции примем

$$Y_k = F_k + \xi_k,$$

где  $F_k = x_k(A + Bx_k - C_1x_k^2)$  – нормированная функция изменения мгновенной мощности,  $\xi_k$  – случайная погрешность  $k$  – го измерения, которую можно принять распределенной по нормальному (N – шум) либо равномерному (R – шум) закону в диапазоне погрешности измерений  $\pm E$ .

## СТРУКТУРА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. Описание конфигурации вычислительной системы
2. Формирование таблицы
3. Описание процедуры MNK- приближения
4. Иллюстрация результата MNK – приближения
5. Оценка погрешности приближения
6. Вывод полученных коэффициентов Лейдермана
7. Оценка максимальной погрешности приближения

## ВЕРСИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

```
> #1. Конфигурация вычислительной системы
restart:      # Очистка памяти
with(stats): # Пакет статистических вычислений
```

```

№:=050015;      # НОМЕР ЗАЧЕТНОЙ КНИЖКИ
N:=7;           # Порядковый номер по списку
randomize(№) ;

```

$N := 7$   
 50015

> #2. Формирование таблицы

```

m:=30:          # число реализаций процесса
h:=1.5/m:       # шаг дискретизации
X:=array(0..m): # массив абсцисс
Y:=array(0..m): # массив ординат
F:=x*(A+B*x-C*x^2); # нормированная функция
A:=.6:B:=1.4:C:=1: # коэффициенты Лейдермана
x:=h*k:         # значение аргумента
E:=.01:         # погрешность измерений
#xi :=stats[random, uniform[-E,E]](m): # R-шум
xi := stats[random, normald[0,E]](m): # N-шум
for k to m do   # формирование таблицы
    X[k]:=x:    # значения абсцисс
    Y[k]:=F+xi[k] # значения ординат
od:

```

$$F := x(A + Bx - Cx^2)$$

> #3. Процедура MNK- приближения

```

x:='x':        # аргумент приближающего полинома
n:=3:          # порядок приближающего полинома
W:=sum('a[j]*x^j','j'=0..n): # приближающий полином
Sy:=[seq(Y[i],i=1..m)]:      # множество ординат
Sx:=[seq(X[i],i=1..m)]:      # множество абсцисс
MNK:=fit[leastsquare][[x,y],y=W]]([Sx,Sy]):
Rez:=evalf[3](MNK);          # результат приближения
assign(Rez):                  # присвоение значений

```

$$Rez := y = .00543 + .557 x + 1.49 x^2 - 1.04 x^3$$

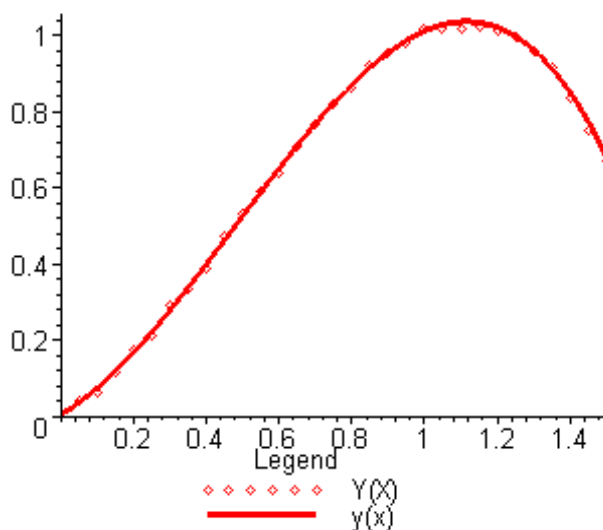
> #4. Иллюстрация результатов MNK- приближения

```

k:='k':
Gp:=plot([X[k],Y[k],
    k=1..m],style=point,legend="Y(X)"):
Gy:=plot(y,x=0..h*m,thickness=3,legend="y(x)"):
plots[display](Gp,Gy,title="РЕЗУЛЬТАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ");

```

РЕЗУЛЬТАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ

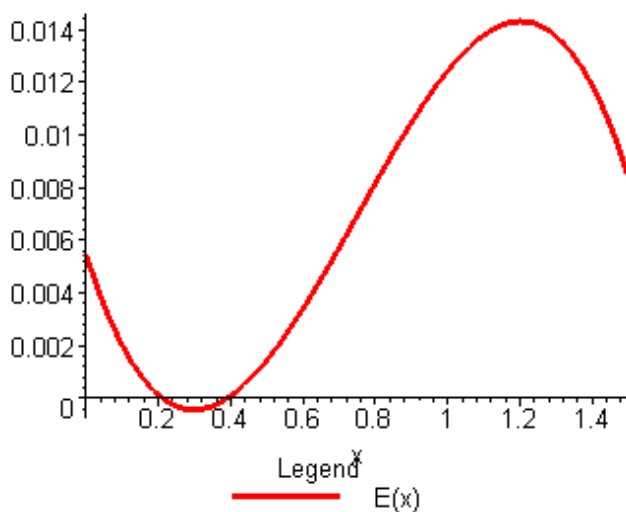


> #5. Погрешность приближения  $E$

$E := y - F$ :

```
plot(E, x=0..h*m, thickness=3, legend="E(x)",
      title="ГРАФИК ПОГРЕШНОСТИ");
```

ГРАФИК ПОГРЕШНОСТИ



```

> #6. Вычисленные коэффициенты Лейдερмана
A:=evalf[3](coeff(y,x,1));
B:=evalf[3](coeff(y,x,2));
C:=evalf[3](coeff(y,x,3));
      A:= .557
      B:= 1.49
      C:= -1.04

> #7. Максимальная погрешность приближения
Emax:=evalf[3](maximize(abs(E),x=0..h*m));
      Emax:= .0154

```

>

**MNK\_MOMENT**

### **ЗАНЯТИЕ №5**

**ДИСЦИПЛИНА:** Основы математического моделирования  
ТП на автотранспорте

**ТЕМА ЗАНЯТИЯ:** Математическое моделирование процессов

**ЦЕЛЬ ЗАНЯТИЯ:** Построение MNK- модели оценки коэффициентов  
Лейдερмана функции эффективного крутящего момента

**Ст. гр. АВ-41з Фамилия И.О.**

### **КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ**

Значения эффективного крутящего момента двигателя могут быть определены по формуле [1,2]

$$M_x = K_m N_x / n_x ,$$

где  $N_x = N_m x (A + Bx - Cx^2)$ ,  $x = n_x / n_e$ ,  $n_x$  - текущее значение частоты вращения коленчатого вала двигателя в диапазоне от минимального до максимального допустимых значений, а  $n_e$  - частота вращения коленчатого вала двигателя при максимальной мощности,  $K_m = 3 \cdot 10^4 n_e / \pi$  - коэффициент.

После очевидных упрощений формула эффективного крутящего момента двигателя примет вид

$$M_x = M_m (A + Bx - Cx^2),$$

где  $M_m = K_m N_m$ .

**ЗАДАЧА.** По результатам замеров эффективного крутящего момента найти параметры  $a_j$  ( $j=[0; n]$ ) полиномиальной функции  $y$   $n$ -го порядка

$$y(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j ,$$

аппроксимирующей закон изменения эффективного крутящего момента при изменении частоты вращения коленчатого вала двигателя. Построить графики процесса и погрешности аппроксимации при заданной случайной погрешности измерений, распределенной по заданному закону.

**РЕШЕНИЕ.** С учетом введенных обозначений функцию эффективного крутящего момента двигателя, выполнив нормирование по  $M_m$ , сведем к виду

$$F(x) = A + Bx - Cx^2 ,$$

где  $F(x) = M_x / M_m$  - нормированная функция эффективного крутящего момента двигателя.

В качестве модели приближаемой функции примем

$$Y_k = F_k + \xi_k ,$$

где  $F_k = A + Bx_k - C_1 x_k^2$  - нормированная функция эффективного крутящего момента двигателя,  $\xi_k$  - случайная погрешность  $k$ -го измерения, считая её распределенной по нормальному (N - шум) либо равномерному (R - шум) закону в диапазоне погрешности измерений  $\pm E$ .

### СТРУКТУРА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. Описание конфигурации вычислительной системы
2. Формирование таблицы
3. Описание процедуры MNK- приближения
4. Иллюстрация результата МНК - приближения
5. Оценка погрешности приближения
6. Вывод полученных коэффициентов Лейдермана
7. Оценка максимальной погрешности приближения

### ВЕРСИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ

```
> #1. # Конфигурация вычислительной системы
restart:      # Очистка памяти
with(stats): # Пакет статистических вычислений
```

```

N:=050015;      # НОМЕР ЗАЧЕТНОЙ КНИЖКИ
N:=7;           # Порядковый номер по списку
randomize (N) ;

```

$N := 7$   
 $50015$

```

> #2. Формирование таблицы
m:=30:          # число реализаций процесса
h:=1.2/m:       # шаг дискретизации
X:=array(0..m): # массив абсцисс
Y:=array(0..m): # массив ординат
F:=A+B*x-C*x^2; # нормированная функция момента
A:=.6:B:=1.4:C:=1: # коэффициенты Лейдермана
x:=h*k:         # значение аргумента
E:=.01:         # погрешность измерений
#xi:=stats[random,uniform[-E,E]](m): # R-шум
xi:= stats[random,normald[0,E]](m): # N-шум
for k to m do   # формирование таблицы
    X[k]:=x:    # значения абсцисс
    Y[k]:=F+xi[k] # значения ординат
od:

```

$$F := A + Bx - Cx^2$$

```

> #3. Процедура MNK- приближения
x:='x':          # аргумент приближающего полинома
n:=2:            # порядок приближающего полинома
W:= sum('a[j]*x^j','j'=0..n); # приближающий полином
Sy:=[seq(Y[i],i=1..m)]: # множество ординат
Sx:=[seq(X[i],i=1..m)]: # множество абсцисс
MNK:=fit[leastsquare][[x,y],y=W]]([Sx,Sy]):
Rez:=evalf[3](MNK); # результат приближения
assign(Rez):       # присвоение значений

```

$$W := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

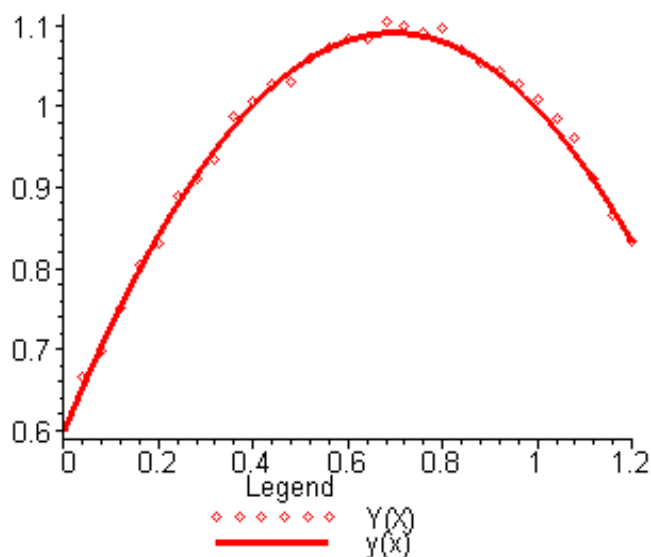
$$Rez := y = .597 + 1.42 x - 1.02 x^2$$

```

> #4.Иллюстрация результатов MNK- приближения
k:='k':
Gp:=plot([X[k],Y[k],
k=1..m],style=point,legend="Y(X)"):
Gy:=plot(y,x=0..h*m,thickness=3,legend="y(x)"):
plots[display](Gp,Gy,title="РЕЗУЛЬТАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ");

```

РЕЗУЛЬТАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ

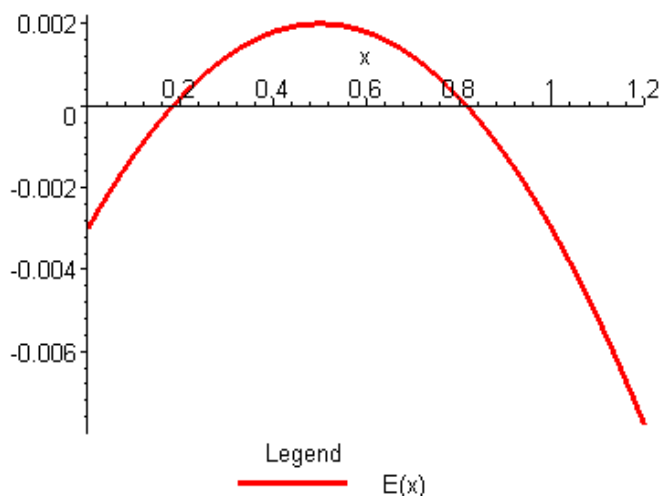


> #5. Погрешность приближения

$E := y - F$ :

```
plot(E, x=0..h*m, thickness=3, legend="E(x)",
      title="ГРАФИК ПОГРЕШНОСТИ");
```

ГРАФИК ПОГРЕШНОСТИ



```

> #6. Вычисленные коэффициенты Лейдермана
A:=evalf[3](coeff(y,x,0));
B:=evalf[3](coeff(y,x,1));
C:=evalf[3](coeff(y,x,2));
      A:= .597
      B:= 1.42
      C:= -1.02

> #7. Максимальная погрешность приближения
Emax:=evalf[3](maximize(abs(E),x=0..h*m));
      Emax:= .0078

```

ANAL-G.mws

### ЗАНЯТИЕ №6

**ДИСЦИПЛИНА:** Основы математического моделирования  
ТП на автотранспорте

**ТЕМА ЗАНЯТИЯ:** Моделирование процессов поршневых ДВС

**ЦЕЛЬ ЗАНЯТИЯ:** Анализ характеристики расхода топлива

Ст. гр. АВ-41д Фамилия И.О.

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Среди двигателей внутреннего сгорания (ДВС), применяемых на автотранспорте, наиболее широко распространены поршневые двигатели. Основной целью при управлении режимом работы ДВС является обеспечение минимального расхода топлива[2,3,6]. В качестве модели, позволяющей решить эту задачу, применяют полиномиальную модель Лейдермана.

**Таблица 1 - Значения коэффициентов функции Лейдермана**

| Двигатели                   | A    | B   | C | A <sub>1</sub> | B <sub>1</sub> | C <sub>1</sub> |
|-----------------------------|------|-----|---|----------------|----------------|----------------|
| Карбюраторные               | 1    | 1   | 1 | 1.2            | 1              | 0.8            |
| Дизельные                   |      |     |   |                |                |                |
| с непосредственным впрыском | 0.87 | 1.4 | 1 | 1.55           | 1.55           | 1              |
| предкамерные                | 0.6  | 1.4 | 1 | 1.2            | 1.2            | 1              |
| форкамерные                 | 0.7  | 1.3 | 1 | 1.35           | 1.35           | 1              |

Функция расхода топлива является полиномом второго порядка [2,3]

$$G_e = G_{e\max} \left( A_1 - B_1 \frac{n}{n_e} + C_1 \left( \frac{n}{n_e} \right)^2 \right), \quad (1)$$

где  $n$  - текущее значение частоты вращения коленчатого вала, об/мин;  
 $n_e$  - частота вращения, соответствующая максимальной мощности, об/мин;

$G_e$  - текущий удельный расход топлива, г/кВт·ч;

$G_{e\max}$  - удельный расход топлива при максимальной мощности, г/кВт·ч.

Для удобства анализа упростим формулу (1), введя относительную частоту вращения коленчатого вала  $x = n/n_e$ ,

$$G_e = G_{e\max} (A_1 - B_1 x + C_1 x^2). \quad (2)$$

Введем нормированную функцию расхода топлива

$$F_g = A_1 - B_1 x + C_1 x^2, \quad (3)$$

где  $F_g = G_e / G_{e\max}$ .

Функции (2) и (3) испытывают минимум, положение которого можно найти в результате ее исследования на экстремум. Для этого найдем производную

$$F'_g = -B_1 + 2xC_1, \quad (4)$$

приравняв ее нулю и решив относительно  $x$ , получим значение абсциссы положения точки минимума

$$X_{\min} = B_1 / 2C_1 \quad (5)$$

Подставив найденное значение в формулу (3), определим ординату положения точки минимума

$$F_{g\min} = A_1 - B_1 X_{\min} / 2. \quad (6)$$

Выполненный анализ позволяет по формуле (2) построить характери-

стику удельного расхода топлива двигателя и по формулам (5) и (6) определить положение и значение минимального расхода топлива.

## ЗАДАНИЕ

Для двигателя по варианту курсового проекта "Автомобильные двигатели" определить значение минимального расхода топлива  $G_{\min}$ , соответствующую ему частоту вращения коленчатого вала двигателя  $X_{\min}$ , построить характеристику эффективного расхода топлива  $G_e$  и нанести точку его минимального значения  $G_{\min}$ .

Сформулировать вывод, указав для выбранного типа двигателя значения  $X_{\min}$  и  $G_{\min}=F_{g\min}G_{\max}$ .

## СТРУКТУРА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. Описание конфигурации вычислительной системы
2. Вычисление координат точки минимального расхода топлива
3. Ввод параметров функции расхода топлива
4. Вывод графика функции (1)
5. Значения вычисленных параметров
6. Выводы
7. Библиографический список

## ВЕРСИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ

> #1. Описание конфигурации вычислительной системы

with(plots):

with(stats):

№:=050015;

# НОМЕР ЗАЧЕТНОЙ КНИЖКИ

randomize(№);

50015

> #2. Координаты точки минимального расхода топлива

$F_g := A_1 - B_1 \cdot x + C_1 \cdot x^2$ ; # Функция расхода топлива (3)

$D_g := \text{diff}(F_g, x)$ ; # Производная функции (4)

$X_{\min} := \text{solve}(D_g, x)$ ; # Абсцисса точки максимума (5)

$F_{g\min} := \text{subs}(x=X_{\min}, F_g)$ ; # Алгоритмическое решение (6)

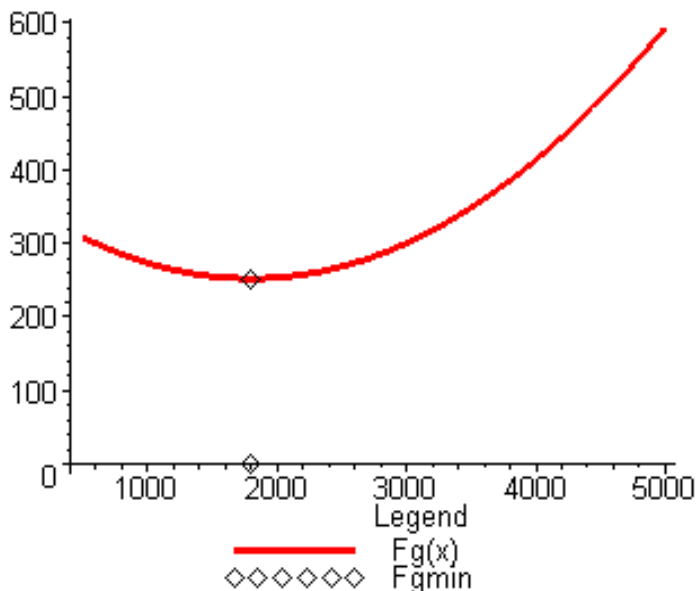
$F_{g\min} := A_1 - B_1 \cdot X_{\min} / 2$ ; # Ордината точки минимума (6)

$$\begin{aligned}
 F_g &:= 1.2 - 1.2x + x^2 \\
 D_g &:= -1.200000000 + 2. x \\
 X_{\min} &:= .6000000000 \\
 F_{g\min} &:= .8400000000
 \end{aligned}$$

$F_{gmin} := .8400000000$

```
> #3. Параметры функции расхода топлива
Ge:=Fg*Gemax:      # Текущий расход топлива
Gemax:=300:        # Расход при максимальной мощности
Gemin:=Fgmin*Gemax:# Минимальный расход топлива
nj:=500:           # Обороты холостого хода двигателя
n0:=5000:          # Максимальные обороты двигателя
x0:=n0/ne:         # Относительная максимальная частота
xj:=nj/ne:         # Относительная частота холостого хода
ne:=3000:          # Номинальная частота вращения
A1:=1.2:B1:=1.2:C1:=1:# Коэффициенты функции Лейдермана
```

```
> #4. График функции Ge(n)
Gp:=plot([x*ne,Ge,
x=xj..x0],thickness=3,legend="Fg(x)"):
Ge:=pointplot({[Xmin*ne,Gemin],[Xmin*ne,0]},
symbolsize=16,legend="Fgmin"):
plots[display](Gp,Ge,
title="ХАРАКТЕРИСТИКА РАСХОДА ТОПЛИВА");
ХАРАКТЕРИСТИКА РАСХОДА ТОПЛИВА
```



```

> #5. Значения вычисленных параметров
Gemin:=evalf[4](Gemin); # Минимальный расхода топлива
Xmin:=evalf[4](Xmin*ne);# Абсцисса точки максимума(1)
Gemin := 252.0
Xmin := 1800.

```

> #6.

Библиографический список

ANAL-M.mws

### ЗАНЯТИЕ №7

ДИСЦИПЛИНА: Основы математического моделирования

ТП на автотранспорте

ТЕМА ЗАНЯТИЯ: Моделирование процессов поршневых ДВС

ЦЕЛЬ ЗАНЯТИЯ: Анализ характеристики крутящего момента

Ст. гр. АВ-41з Фамилия И.О.

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Управление режимом работы и решение задач диагностики поршневых ДВС возможно по результатам измерения его параметров, представленных в форме коэффициентов функции Лейдермана [2-4], которые могут изменяться в процессе эксплуатации. Стандартные значения коэффициентов функции Лейдермана приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Значения коэффициентов функции Лейдермана

| Двигатели                   | A    | B   | C | A <sub>1</sub> | B <sub>1</sub> | C <sub>1</sub> |
|-----------------------------|------|-----|---|----------------|----------------|----------------|
| Карбюраторные               | 1    | 1   | 1 | 1.2            | 1              | 0.8            |
| Дизельные                   |      |     |   |                |                |                |
| с непосредственным впрыском | 0.87 | 1.4 | 1 | 1.55           | 1.55           | 1              |
| предкамерные                | 0.6  | 1.4 | 1 | 1.2            | 1.2            | 1              |
| форкамерные                 | 0.7  | 1.3 | 1 | 1.35           | 1.35           | 1              |

Функция эффективного крутящего момента является полиномом второго порядка [2,3]

$$M_e = K_m N_m \left( A + B \frac{n}{n_e} - C \left( \frac{n}{n_e} \right)^2 \right), \quad (1)$$

где

$n$  - текущее значение частоты вращения коленчатого вала, об/мин;  
 $n_e$  - частота вращения, соответствующая максимальной мощности, об/мин;  
 $M_e$  - текущее значение крутящего момента, Н·м;  
 $N_{e\max}$  - максимальное значение эффективной мощности, кВт;  
 $K_m$  - масштабный коэффициент;  $K_m = 3 \cdot 10^4 / n_e \pi$ .

Упростим формулу (1), введя относительную частоту вращения коленчатого вала  $x = n/n_e$ ,

$$M_e = K_m N_{e\max} (A + Bx - Cx^2) = F_m K_m N_{e\max}, \quad (2)$$

где  $F_m = A + Bx - Cx^2$  - нормированная функция крутящего момента.

Исследуем нормированную функцию крутящего момента

$$F_m = A + Bx - Cx^2. \quad (3)$$

Функция (2) испытывает максимум, положение которого можно найти в результате исследования на экстремум нормированной функции крутящего момента  $F_m$  (3). Для этого найдем её производную

$$F'_m = B - 2xC, \quad (4)$$

приравняв ее нулю и решив относительно  $x$ , получим значение абсциссы положения точки максимума

$$x_{\max} = B/2C \quad (5)$$

Подставив найденное значение в формулу (3), определим ординату точки максимума

$$F_{\max} = A + Bx_{\max} / 2. \quad (6)$$

В результате выполненного анализа по формуле (2) можно построить характеристику эффективного крутящего момента двигателя, а по формулам (5) и (6) определить положение и значение максимального эффективного крутящего момента двигателя  $M_{\max} = F_{\max} \cdot K_m \cdot N_{e\max}$ .

## ЗАДАНИЕ

Для двигателя по варианту курсового проекта "Автомобильные двигатели" определить максимальное значение эффективного крутящего момента  $M_{\max}$ , соответствующую ему частоту вращения коленчатого вала двигателя  $X_{\max}$ , построить характеристику эффективного крутящего момента  $M_e$  и нанести точку его максимального значения  $M_{\max}$ .

Сформулировать вывод, указав для выбранного типа двигателя значения  $X_{\max}$ ,  $M_{\max}$  и коэффициента приспособляемости  $K = M_{\max}/M_{ne}$ , где  $M_{ne} = M_e|_{x=1}$  - момент вращения при номинальной мощности.

### СТРУКТУРА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. Описание конфигурации вычислительной системы
2. Вычисление координат точки максимального эффективного крутящего момента  $M_{\max}$
3. Ввод параметров функции крутящего момента
4. Вывод графика функции (1)
5. Значения вычисленных параметров
6. Выводы
7. Библиографический список

### ВЕРСИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ

> #1. Описание конфигурации вычислительной системы

restart:

with(plots):

with(stats):

№:=050015; # НОМЕР ЗАЧЕТНОЙ КНИЖКИ

randomize(№);

50015

> #2. Координаты точки максимального момента  $M_{\max}$

$F_m := A + B \cdot x - C \cdot x^2$ ; # функция момента (3)

$D_m := \text{simplify}(\text{diff}(F_m, x))$ ; # Производная функции (4)

$X_{\max} := \text{solve}(D_m, x)$ ; # Абсцисса максимума (5)

$F_{\max} := \text{subs}(x = X_{\max}, F_m)$ ; # Алгоритмическое решение (6)

$F_{\max} := A + B \cdot X_{\max} / 2$ ; # Ордината точки максимума (6)

$$F_m := A + Bx - Cx^2$$

$$D_m := B - 2Cx$$

$$X_{\max} := \frac{1}{2} \frac{B}{C}$$

$$F_{max} := A + \frac{\frac{1}{4} B^2}{C}$$

$$F_{max} := A + \frac{\frac{1}{4} B^2}{C}$$

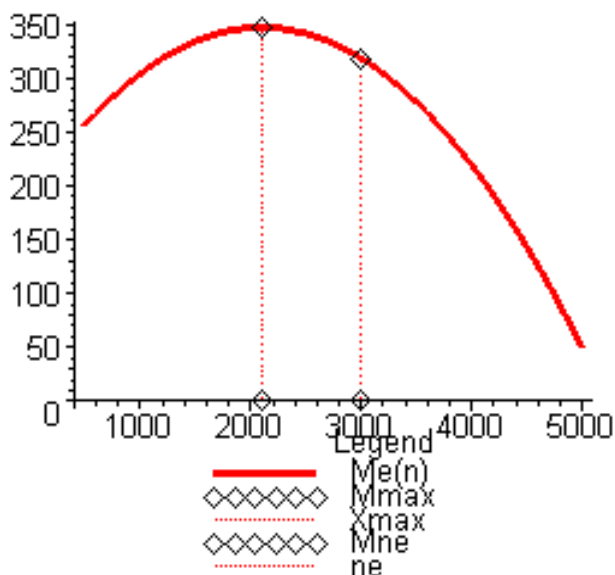
```

> #3. Параметры характеристики крутящего момента
nj:=500:      # Обороты холостого хода двигателя
n0:=5000:     # Максимально допустимые обороты двигателя
x0:=n0/ne:    # Относительная максимальная частота
xj:=nj/ne:    # Относительная частота холостого хода
Me:=Fm*Km*Nemax:  # Текущее значение момента
Mmax:=Fmax*Km*Nemax: # Максимальное значение момента
Mne:=subs (x=1, Me): # Момент при номинальной мощности
Nemax:=100:    # Максимальное значение мощности
Km:=3e4/ne/Pi: # Масштабный коэффициент
A:=.6: B:=1.4: C:=1: # Коэффициенты функции Лейдермана
K:=Mmax/Mne:   # Коэффициент приспособляемости
ne:=3000:      # Частота вращения при максимальной мощности

> #4.График функции (1)
Gp:=plot([x*ne, Me,
          x=xj..x0], thickness=3, legend="Me (n)"):
Ge:=pointplot([Xmax*ne, Mmax], [Xmax*ne, 0],
              symbolsize=16, legend="Mmax"),
plot([Xmax*ne, j, j=0..Mmax], linestyle=2, legend="Xmax"),
pointplot([ne, Mne], [ne, 0], symbolsize=16,
          legend="Mne"),
plot([ne, j, j=0..Mne], linestyle=2, legend="ne"):
plots[display](Gp, Ge,
               title="ХАРАКТЕРИСТИКА КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА");

```

# ХАРАКТЕРИСТИКА КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА



> #5. Значения вычисленных параметров

$M_{max} := \text{evalf}[4](M_{max})$ ; # Максимальное значение момента  
 $M_{ne} := \text{evalf}[4](M_{ne})$ ; # Момент при номинальной мощности

$X_{max} := \text{evalf}[4](X_{max} \cdot n_e)$ ; # Абсцисса максимума (1)

$K := \text{evalf}[4](K)$ ; # Коэффициент приспособляемости

$M_{max} := 346.9$

$M_{ne} := 318.3$

$X_{max} := 2100.$

$K := 1.090$

Библиографический список

ANAL-N.mws

## ЗАНЯТИЕ №8

ДИСЦИПЛИНА: Основы математического моделирования  
 ТП на автотранспорте

ТЕМА ЗАНЯТИЯ: Моделирование процессов поршневых ДВС

## ЦЕЛЬ ЗАНЯТИЯ: Анализ характеристики эффективной мощности

Ст. гр. АВ-41д Фамилия И.О.

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Управление режимом работы и решение задач диагностики поршневых ДВС возможно по результатам измерения его параметров, представленных в форме функции Лейдермана [2,3], коэффициенты которой могут изменяться в процессе эксплуатации. При расчетах параметров применяются значения коэффициентов функции Лейдермана, приведенные в таблице 1.

Таблица 1 - Значения коэффициентов функции Лейдермана

| <b>Двигатели</b>                   | <b>A</b>    | <b>B</b>   | <b>C</b> | <b>A<sub>1</sub></b> | <b>B<sub>1</sub></b> | <b>C<sub>1</sub></b> |
|------------------------------------|-------------|------------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| <b>Карбюраторные</b>               | <b>1</b>    | <b>1</b>   | <b>1</b> | <b>1.2</b>           | <b>1</b>             | <b>0.8</b>           |
| <b>Дизельные</b>                   |             |            |          |                      |                      |                      |
| <b>с непосредственным впрыском</b> | <b>0.87</b> | <b>1.4</b> | <b>1</b> | <b>1.55</b>          | <b>1.55</b>          | <b>1</b>             |
| <b>предкамерные</b>                | <b>0.6</b>  | <b>1.4</b> | <b>1</b> | <b>1.2</b>           | <b>1.2</b>           | <b>1</b>             |
| <b>форкамерные</b>                 | <b>0.7</b>  | <b>1.3</b> | <b>1</b> | <b>1.35</b>          | <b>1.35</b>          | <b>1</b>             |

Задача оценки значений указанных коэффициентов, может быть решена с помощью методов приближения функций [1], например, метода наименьших квадратов [5]. Функция Лейдермана для расчета эффективной мощности  $N_e$  является полиномиальной [2] вида

$$N_e = N_{e\max} \left( A \frac{n}{n_e} + B \left( \frac{n}{n_e} \right)^2 - C \left( \frac{n}{n_e} \right)^3 \right), \quad (1)$$

где

$n$  - текущее значение частоты вращения коленчатого вала, об/мин;

$n_e$  - частота вращения, соответствующая максимальной мощности, об/мин;

$N_{e\max}$  - максимальная мощность двигателя, кВт.

Для проведения анализа упростим формулу (1), введя относительную частоту вращения коленчатого вала  $x = n/n_e$

$$M_e = K_e N_{e\max} (A + Bx - Cx^2), \quad (2)$$

где

$$F_e = A + Bx - Cx^2, \quad (3)$$

$F_e = M_e / K_e N_{e\max}$  - нормированная функция эффективной мощности.

Функция (3) испытывает максимум, положение которого можно найти в результате ее исследования на экстремум. Для этого найдем производную

$$F'_n = A + 2Bx - 3Cx^2. \quad (4)$$

Приравняв ее нулю и решив относительно  $x$ , получим значение абсциссы положения точки максимума

$$X_{\max} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 3AC}}{3C}. \quad (5)$$

Подставив найденное значение в формулу (3), определим ординату положения точки максимума

$$F_{\max} = \frac{X_{\max} (2A + X_{\max} B)}{3}. \quad (6)$$

В результате выполненного анализа по формуле (2) можно построить характеристику эффективной мощности двигателя, а по формулам (5) и (6) определить положение и значение максимального значения эффективной мощности двигателя.

## ЗАДАНИЕ

Для двигателя по варианту курсового проекта "Автомобильные двигатели" определить максимальное значение эффективной мощности  $N_{e\max}$ , соответствующую ей частоту вращения коленчатого вала двигателя  $X_{\max}$ , построить характеристику эффективной мощности и нанести точку ее максимального значения  $N_{e\max}$ .

Сформулировать вывод, указав для выбранного типа двигателя значения  $X_{\max}$ ,  $N_{e\max}$ .

## СТРУКТУРА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. Описание конфигурации вычислительной системы
2. Вычисление координат точки максимума эффективной мощности
3. Ввод параметров функции эффективной мощности

4. Вывод графика функции (1)
5. Представление значений вычисленных параметров
6. Выводы
7. Библиографический список

## ВЕРСИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ

> #1. Описание конфигурации вычислительной системы

restart:

with(plots):

with(stats):

N:=050015; # НОМЕР ЗАЧЕТНОЙ КНИЖКИ

randomize(N);

50015

> #2. Координаты точки максимума эффективной мощности

$F_n := x * (A + B * x - C * x^2);$  # Функция мощности (3)

$D_f := \text{simplify}(\text{diff}(F, x));$  # Производная функции (4)

$F_{\max} := X_{\max} * (2 * A + B * X_{\max}) / 3;$  # Ордината максимума (6)

$X_{\max} := (B + \sqrt{B^2 + 3 * A * C}) / 3 / C;$  # Абсцисса максимума (5)

$$F_n := x (A + B x - C x^2)$$

$$D_f := 0$$

$$F_{\max} := \frac{1}{3} X_{\max} (2 A + B X_{\max})$$

$$X_{\max} := \frac{1}{3} \frac{B + \sqrt{B^2 + 3 A C}}{C}$$

> #3. Параметры характеристики эффективной мощности

nj:=500: # Обороты холостого хода двигателя

n0:=5000: # Максимально допустимые обороты двигателя

x0:=n0/ne: # Относительная максимальная

xj:=nj/ne: # Относительная частота холостого хода

Ne:=Fn\*Nne: # Текущее значение мощности

Nemax:=Fmax\*Nne: # Максимальное значение мощности

Nne:=100: # Номинальное значение мощности

ne:=3000: # Номинальная частота вращения

A:=.6:B:=1.4:C:=1: # Коэффициенты функции Лейдερмана

> #4. График функции (1)

Gp:=plot([x\*ne, Ne,

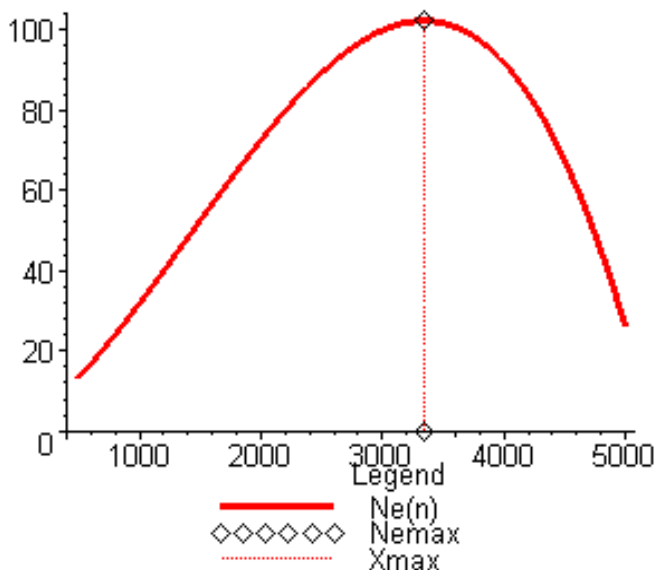
x=xj..x0], thickness=3, legend="Ne (n) ") :

Ge:=pointplot([ [Xmax\*ne, Nemax], [Xmax\*ne, 0] ],

```

        symbolsize=16,legend="Nemax"),
    plot([Xmax*ne,j,j=0..Nemax],linestyle=2,
        legend="Xmax") :
plots[display] (Gp,Ge,
    title="ХАРАКТЕРИСТИКА ЭФФЕКТИВНОЙ МОЩНОСТИ");
ХАРАКТЕРИСТИКА ЭФФЕКТИВНОЙ МОЩНОСТИ

```



> #5. Значения вычисленных параметров

```

Nemax:=evalf[4](Nemax); # Максимальный момент вращения
Xmax:=evalf[4](Xmax*ne);# Абсцисса точки максимума
функции (1)

```

$N_{\max} := 102.3$

$X_{\max} := 3339.$

> #6.

Библиографический список

## ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ СТЕНДОВЫХ ИСПЫТАНИЙ ПОРШНЕВЫХ ДВС

По данным стендовых испытаний могут быть получены основные параметры и характеристики двигателя, к которым относятся

1. Характеристика эффективной мощности  $N_e(n)$  по определению [2]

$$N_e = N_{ne} \left( A \frac{n}{n_e} + B \left( \frac{n}{n_e} \right)^2 - C \left( \frac{n}{n_e} \right)^3 \right),$$

где

$n$  - текущее значение частоты вращения коленчатого вала, об/мин;

$n_e$  - частота вращения, соответствующая номинальной мощности, об/мин;

$N_{ne}$  - номинальная эффективная мощность двигателя, кВт.

Для получения параметров функции  $N_e(n)$  необходимо по таблице экспериментальных данных с помощью метода аппроксимации, например МНК, найти коэффициенты Лейдермана, приняв в качестве приближающей функции полином третьей степени. Затем по результатам анализа, изложенным в теоретических сведениях к занятию №8, найти значения абсциссы (формула (5)), ординаты (формула (6)) положения точки максимума

$$X_{\max} = B/2C; F_{\max} = A + BX_{\max}/2$$

и оценить максимальную величину эффективной мощности  $N_{e\max}$  по методике [4].

2. Характеристика эффективного крутящего момента

$$M_e = K_e N_{e\max} \left( A + B \frac{n}{n_e} - C \left( \frac{n}{n_e} \right)^2 \right)$$

может быть найдена по результатам анализа при оценке параметров характеристики эффективной мощности.

3. Характеристика удельного эффективного расхода топлива [3]

$$G_e = G_{ne} \left( A_1 - B_1 \frac{n}{n_e} + C_1 \left( \frac{n}{n_e} \right)^2 \right)$$

требует применения процедуры приближения для получения значений коэффициентов Лейдермана  $A_1, B_1, C_1$ . После чего представляется возможным вычислить координаты положения точки минимального расхода

$$X_{\min} = B_1 / 2C_1 ; F_{g \min} = A_1 - B_1 X_{\min} / 2 .$$

4. Характеристика часового расхода топлива [3] может быть получена как произведение удельного эффективного расхода топлива  $G_e$  и эффективной мощности  $N_e$

$$G_h = 10^{-3} G_e N_e .$$

5. Характеристика среднего эффективного давления [3] вычисляется по известной эффективной мощности  $N_e$ , объему двигателя  $V_e$  и его тактности  $T$

$$P_e = \frac{30 N_e T}{V_e n}$$

Перечисленные характеристики являются составляющими внешней скоростной характеристики поршневых ДВС.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем состоит принцип приближения функций?
2. Перечислите методы приближения функций
3. Назовите методы интерполяции
4. В чем состоит принцип интерполяции?
5. Когда применима интерполяция?
5. Перечислите методы аппроксимации
6. В чем состоит принцип аппроксимации?
7. Когда применима аппроксимация?
8. Что такое экстраполяция?

9. Что собой представляют функции Лейдермана?
10. Когда применяются функции Лейдермана?
11. Перечислите основные параметры ДВС
12. Что такое коэффициент приспособляемости?

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Hamming R.W. Numerical methods for scientists and engineers.- N.Y.: McGraw-Hill Book Company, 1973. (Хемминг Р.В. Численные методы / Р.В. Хемминг.- М.: Наука, 1972.- 400 с.)
2. <http://www.studhelp.org.ua/dvs1/dvs1.html>
3. Расчет и конструирование автомобильного двигателя внутреннего сгорания. Методические указания к выполнению курсового проекта /П.К. Соппин, С.В. Огрызков, А.А. Ветрогон. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2005. – 104 с.
4. Купач Р.С., Долгин И.В., Ксенофонтова В.А. Модель оценки коэффициентов Лейдермана по результатам стендовых испытаний // Материалы междунар. науч.-техн. конф. студ., асп. и молодых ученых Прогрессивные направления развития машино-приборостроительных отраслей и транспорта, 17-19 апреля 2012 г. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2012.– С. 80-82.
5. Богомольный Б.С., Долгин В.П. Процедура локализации максимума функции эффективной мощности поршневых ДВС // Материалы междунар. науч.-техн. конф. студ., асп. и молодых ученых Прогрессивные направления развития машино-приборостроительных отраслей и транспорта, 17-19 апреля 2012 г. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2012.– С. 63-64.
6. Гавран Е.И. , Долгин В.П. Процедура поиска минимума функции удельного расхода топлива поршневых ДВС // Материалы междунар. науч.-техн. конф. студ., асп. и молодых ученых Прогрессивные направления развития машино-приборостроительных отраслей и транспорта, 17-19 апреля 2012 г. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2012.– С. 64-66.