

УДК 621.391.27:519.81

В.К. Маригодов, профессор, д-р техн. наук,**В.В. Чмут, доцент, канд. техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***МИНИМАКСНОСТЬ УСЛОВНОГО РИСКА В СИСТЕМАХ
С ОПТИМАЛЬНЫМ ПРЕДЫСКАЖЕНИЕМ СИГНАЛОВ**

На основе аппарата теории игр доказана минимаксность функции условного риска в системах передачи дискретных сообщений с оптимальным адаптивным предсказанием и корректированием сигналов.

Ключевые слова: *условный риск, предсказание, корректирование, вариационная задача, теоретико-игровая оценка, уравнение Эйлера – Лагранжа.*

Постановка задачи и её связь с научно-техническими проблемами. В теории передачи сигналов по каналам связи и в теории информации возникают задачи, связанные с необходимостью определения функций условного или среднего риска операторов системы передачи информации (СПИ) и системы радиопомех (СРП). Для решения этих задач должны быть заданы *вероятностные модели сигналов и помех, а также статистический критерий оптимальности* алгоритма решения [1,2].

Для нахождения условного или среднего риска необходимо располагать знаниями о распределениях процесса на входе и выходе канала связи, а также задать функцию потерь или штрафов, которая определяет разность между оценкой сигнала и действительным значением этого параметра.

В системах с оптимальным адаптивным предсказанием и корректированием представляется целесообразным исследовать *минимаксность условного риска*, которая в известной литературе ранее не доказывалась.

Обзор публикаций и анализ нерешенных задач. Для решения задач нахождения экстремальности среднего риска используются известные вариационные методы, которые изложены в фундаментальных работах [1–3]. *Теоретико-игровая оценка* функции среднего риска в системах передачи информации с адаптивным линейным предсказанием и корректированием сигналов исследована в [4]. Представляет интерес решить эту же задачу для оценки минимаксности функции условного риска для тех же систем.

Цель исследований. Она состоит в том, чтобы определить цену игры как функцию условного риска в системах передачи дискретных сообщений, в которых применяется оптимальное адаптивное предсказание и корректирование сигналов.

Изложение основных результатов исследования.

Функцию условного риска можно представить в виде

$$\rho = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m C[q(y_j), x_i] p(y_j | x_i), \quad (1)$$

где $C[q(y), x]$ – функция потерь; $q(y)$ – оценочное значение сигнала x_i ; $p(y_j | x_i)$ – условная плотность распределения аддитивной смеси сигнала x_i и помехи на выходе оптимального корректирующего фильтра при известном сигнале на его входе.

Можно записать для условной плотности

$$p(y_j | x_i) = p(x_i, y_j) / p(x_i), \quad (2)$$

где $p(x_i, y_j)$ – совместное распределение сигнала и смеси его с помехой; $p(x_i)$ – распределение оптимально предсказанного сигнала на входе канала.

На основе теоретико-игрового подхода будем решать так называемую *третью вариационную задачу теории информации* [1]. При этом предположим, что стратегия игрока I (оператора СПИ) состоит в минимизации (1) выбором $q(y)$, а стратегия игрока II заключается в максимизации (1) выбором $p(x_i, y_j)$. В качестве дополнительных ограничений примем фиксацию энтропии H_1 совместного распределения и условие нормировки последнего, т.е.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \ln p(x_i, y_j) = H_1 = \text{const}, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p(x_i y_j) = 1, \quad p(x_i, y_j) \geq 0. \quad (4)$$

Поскольку рассматриваются рандомизированные стратегии игроков, то можно записать игровое равенство, определяющее цену игры, в виде:

$$\max_{p(y|x)} \min_{q(y)} \rho = \min_{q(y)} \max_{p(y|x)} \rho. \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем для упрощения записи целесообразно не учитывать индексы при x и y .

Определяем $\max \rho$ с учетом (1) – (4). Для этого составим уравнение Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial p(y|x)} \{C[q(y), x] p(y|x) - \lambda [p(x, y) \ln p(x, y)] - \mu p(x, y)\} = 0. \quad (6)$$

В (6) λ, μ – лагранжевы множители, которые определяются соответственно из (3) и (4).

Из решения вариационного уравнения (6) находим

$$p(y|x)_{extr} = \exp \left[\frac{\alpha - \lambda - \mu - \lambda \ln p(x)}{\lambda} \right], \quad (7)$$

где $\alpha = [q(y) - x]^2$ – квадратичная функция потерь, которая наиболее распространена в инженерной практике.

После определения лагранжианов λ и μ получаем [4]

$$\lambda = \frac{1}{\pi} [hq^2(y) - h^2 - 0,25q^4(y)] = \beta / \pi,$$

где $h = H_1 - H_2$, $H_2 = -\sum_{i=1}^m p(x_i) \ln p(x_i)$ – дифференциальная энтропия оптимально предсказанного сигнала.

Далее находим

$$p(y|x)_{extr} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[q(y) - x]^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (8)$$

где $\sigma^2 = \frac{\beta}{2\pi}$ – дисперсия сигнала $x(t)$.

Подставляя (8) в функционал (1), находим

$$\max_{p(y|x)} \rho [q(y), p(y|x)] = \beta^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [q(y_j) - x_i]^2 \cdot p(x_i) \exp \left\{ -\frac{\pi [q(y_j) - x_i]^2}{\beta} \right\}. \quad (9)$$

Если учесть в (9) условие нормировки распределения $p(x_i)$, т.е. $\sum_{i=1}^m p(x_i) = 1, \quad p(x_i) \geq 0$, то очевидно, что экстремальной для оператора СПИ будет оценка

$$q(y)_{extr} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i p(x_i | y_j) = M[x | y] = \hat{x}, \quad (10)$$

где $M(\cdot)$ – математическое ожидание; $\hat{x}$ – условное среднее ожидаемого значения x при заданной выборке y , т.е. апостериорное математическое ожидание сигнала $x(t)$.

Подставляя (10) в (1), получаем

$$\min_{q(y)} \max_{p(y|x)} \rho [q(y), p(y|x)] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^m (\hat{x} - x_i) \exp \left[-\frac{(\hat{x} - x_i)^2}{2\sigma^2} \right] = \sigma^2. \quad (11)$$

В многомерном случае можно записать

$$p(y_1, \dots, y_n | x_1, \dots, x_n)_{extr} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[q_k(y_k) - x_k]^2}{2\sigma_k^2} \right\}, \quad (12)$$

$$q_k(y_k)_{extr} = \sum_{k=1}^m \sum_{k=1}^m p(x_k | y_1, \dots, y_n) = \hat{x}_k, \quad (13)$$

$$U = \min_{q_k(y_k)} \max_{p(y_k | x_k)} \rho[q_k(y_k), p(y_k | x_k)] = \prod_{k=1}^m \sigma_k^2. \quad (14)$$

Можно доказать, что минимакс (14) определяет искомую функцию выигрыша оператора СПИ или *цену игры*, поскольку справедливы равенства:

$$U = \max_{p(y|x)} \min_{q(y)} \rho[q(y), p(y|x)] = \min_{q(y)} \rho[q(y), p(y|x)_{extr}],$$

$$U = \min_{q(y)} \max_{p(y|x)} \rho[q(y), p(y|x)] = \max_{p(y|x)} \rho[q(y)_{extr}, p(y|x)].$$

Рассмотрим игровую ситуацию, в которой имеет место конфликтное взаимодействие оператора СПИ и СРП (“природы”). При нормальной форме игры оператор СПИ имеет право свободного выбора среди m различных комплексных частотных характеристик (КЧХ) $K_1(j\omega), \dots, K_m(j\omega)$ адаптивного предсказывающего фильтра или различных фильтров в случае дискретной их коммутации. Удобно предположить, что АЧХ адаптивного корректирующего фильтра приёмника или m различных корректирующих фильтров взаимнообратны по отношению к аналогичным характеристикам предсказания. Пусть СРМ (или “природа”) имеет возможность выбора среди n типов аддитивных помех $N_1(\omega), \dots, N_n(\omega)$.

Пусть в упомянутой игровой концепции (K_i, N_j) функция условного риска оценивается величиной $(\rho)_{ij} = (\rho)_{K_i N_j}$. На основании этого запишем рассматриваемую игровую ситуацию в виде матрицы

$$\rho = (\rho)_{ij} = \begin{pmatrix} \rho_{11}, \dots, \rho_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ \rho_{m1}, \dots, \rho_{mn} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Минимальный элемент i -й строки матрицы (15) представляет собой минимальное значение функции условного риска для i -й пары адаптивных предсказывающих и корректирующих фильтров K_i , т.е. $\rho_j = \min_i (\rho_{ij})$.

Естественно, что в конфликтной ситуации взаимодействия СРП (“природа”) выберет такой энергетический спектр помехи N_j , чтобы оператор СПИ получил $\max_j (\rho_{ij})$. Таким образом, получаем следующую запись игры в чистых стратегиях

$$\rho_{\max} = \max_j \min_i \rho_{ij} \leq \rho_{\min} = \min_i \max_j \rho_{ij}, \quad (16)$$

где $\rho_{\max}$ – гарантированный нижний уровень проигрыша СРП (“природы”) или *верхняя цена игры*; $\rho_{\min}$ – гарантированный верхний уровень выигрыша оператора СПИ или *нижняя цена игры*.

Проанализируем неравенство (16). Если операторы СПИ и СРП выбирают свои чистые стратегии одновременно либо не располагают сведениями о выборе стратегий другой стороной, то оператор СПИ может обеспечивать для себя значение функций условного риска не больше $\rho_{\min}$, а СРП может добиться значения не более, чем $\rho_{\max}$.

В том случае, если $\rho_{\max} = \rho_{\min}$ матрица (15) имеет *седловую точку* и неравенство (16) превращается в равенство. При этом выбор КЧХ оптимального предсказывающего фильтра K_i и спектральной плотности мощности аддитивной помехи, действующей в канале связи, N_j образуют систему, для которой величина $\rho_{ij} = \rho_{\max} = \rho_{\min}$ соответствует одновременно наименьшему элементу

в i -й строке и наибольшему элементу в j -м столбце матрицы (15). Последнее означает, что если СПИ использует предсказывающий фильтр K_i , то наихудшей ситуацией для реализации функции условного риска будет использование СРП энергетического спектра аддитивной помехи N_j и наоборот.

В тех случаях, когда $\rho_{\max} < \rho_{\min}$, матрица (15) не имеет седловой точки. Это означает, что в данной игре не существует *устойчивого состояния* в чистых стратегиях и последовательная цепь выбора чистых стратегий игроков может продолжаться фактически бесконечно (при $n, m \rightarrow \infty$). В связи с этим обстоятельством представляется целесообразным переход к рандомизированным (смешанным) стратегиям СПИ и СРП.

Пусть оператор СПИ в качестве своей рандомизированной стратегии использует вероятность выбора функции потерь или штрафов $C[q(y), x]$, вид которой определяется мгновенной КЧХ оптимального предсказывающего фильтра K_i . Обозначим эту вероятность через ξ_i .

Вид спектральной плотности мощности аддитивной помехи определяется вероятностями перехода $p(y|x)$. Пусть СРП ("природа") выбирает спектр помехи с вероятностью $p(y|x)$. Тогда ожидаемое значение минимального условного риска при дискретном выборе рандомизированных стратегий будет равно

$$\rho[\xi, p(y|x)] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \xi_i p_j(y|x) p_{ij}, \quad (17)$$

где должны выполняться условия нормировки

$$\sum_{i=1}^m \xi_i = 1, \quad \sum_{j=1}^n p_j(y|x) = 1.$$

У операторов СПИ и СРП существуют оптимальные рандомизированные стратегии:

$$\begin{cases} \xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_m^*), \\ p^*(y|x) = (p_1^*(y|x), \dots, p_n^*(y|x)). \end{cases} \quad (18)$$

Для минимаксных (оптимальных) рандомизированных стратегий существует цена игры, которая равна:

$$\bar{\rho}^* = \rho[\xi^*, p^*(y|x)] = \max_p \min_{\xi} \bar{\rho}[\xi, p(y|x)] = \min_{\xi} \max_p \bar{\rho}[\xi, p(y|x)]. \quad (19)$$

В случае непрерывного выбора игроками рандомизированных стратегий цена игры находится как

$$\bar{\rho}[\xi, p(y|x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho[\xi, p(y|x)] \xi p(y|x) d\xi dp(y|x). \quad (20)$$

При этом должны выполняться условия нормировки:

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \xi(x) dx = 1, & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(y|x) dx dy = 1, \\ \xi(x) \geq 0, & p(y|x) \geq 0. \end{cases} \quad (21)$$

Минимаксное (экстремальное) значение функции условного риска $\bar{\rho}$ может быть найдено подстановкой в формулу (20) оптимальных стратегий ξ^* и $p^*(y|x) = p^*(x, y)/p^*(x)$.

Если в качестве функции потерь или штрафов принять квадратичную, т.е. $C[q(x), x] = [q(x) - x]^2$, то после введения в вариационную задачу отыскания экстремального значения функции условного риска дополнительного условия фиксации энтропии совместного распределения

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) p(y|x) \ln[p(x) p(y|x)] dx dy = H = \text{const} \quad (22)$$

и условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) p(y|x) dx dy = 1, \quad p(x) p(y|x) \geq 0,$$

а также при учете нормализующего действия предсказывающего фильтра получаем

$$p(x)_{extr} = p^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(\hat{x} - x)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (23)$$

где $\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}(h^2 - h\hat{x}^2 + 0,25\hat{x}^4)$ – дисперсия случайной величины $x(t)$, распределенной по нормальному закону; $\hat{x}$ – условное среднее значение оцениваемого параметра $x(t)$.

Если в качестве одномерной плотности вероятности принять гауссовскую (23), то получаем минимаксное значение функции условного риска или цену игры

$$\bar{\rho}^* = \frac{1}{2\pi} [1 - 0,5 \ln(2\pi e \sigma_{II}^2)], \quad (24)$$

где σ_{II}^2 – дисперсия аддитивной помехи.

Таким образом, минимаксное значение функции условного риска уменьшается при уменьшении величины дисперсии аддитивной помехи. При выбранных информационных ограничениях эффективность предсказания и корректирования возрастает при использовании для передачи информации систем с высокой помехоустойчивостью.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Таким образом, на основе теоретико-игрового подхода показано, что функция условного риска в системах с оптимальным предсказанием сигналов обладает минимаксными свойствами. То же самое можно утверждать и для функции среднего риска, поскольку последняя находится усреднением условного риска путем введения в (1) распределения $p(x)$.

Задачей перспективных исследований является теоретико-игровой синтез систем массового обслуживания в ситуациях априорной неопределенности и конфликта.

Бibliографический список использованной литературы

1. Стратонович Р.Л. Теория информации / Р.Л. Стратонович. — М.: Сов. радио, 1975. — 475 с.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 2 / Б.Р. Левин. — М.: Сов. радио, 1968. — 504 с.
3. Фомин А.Ф. Помехоустойчивость систем передачи непрерывных сообщений / А.Ф. Фомин. — М.: Сов. радио, 1975. — 352 с.
4. Маригодов В.К. Минимаксные оценки среднего риска в системах с предсказанием / В.К. Маригодов // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. — 1982. — Т. 25. — № 5. — С. 47–51.

Поступила в редакцию 12.11.2012г.

Марігодов В.К., Чмут В.В. Мінімаксність умовного ризику в системах із оптимальним передспотворенням сигналів

На основі апарату теорії ігор визначено мінімаксність функції умовного ризику в системах передачі дискретних повідомлень із оптимальним адаптивним передспотворенням та корегуванням сигналів.

Ключові слова: умовний ризик, передспотворення, корегування, варіаційна задача, теоретико-ігрова оцінка, рівняння Ейлера – Лагранжа.

Marigodov V.K., Chmut V.V. On the minimax property of relative risk in the systems with optimal predistortion of signals

On the basis of the apparatus of a game theory minimax property of relative risk function in the systems, translation of discrete communications with optimal adaptive predistortion and correction of signals has been demonstrated.

Keywords: relative risk, predistortion, correction, variation task, theory of a game estimation, Euler – Lagrange equation.