

УДК 620.53:623.97

А.И. Бохонский, Н.И. Варминская*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ОПТИМАЛЬНОЕ ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОГО ОБЪЕКТА**

Исследованы оптимальное переносное и относительное движения упругого объекта (с одной степенью свободы) с учетом линейно-вязкого сопротивления и сухого трения.

Ключевые слова: оптимальное управление, переносное движение, относительное движение (колебания), сопротивление движению.

Задачам обоснования оптимального управления переносным движением упругих объектов с конечным и бесконечным числом степеней свободы посвящены работы [1 – 3], в которых приведены результаты исследований колебаний упругих систем на временном интервале движения без учета сил сопротивления различной природы. При переходе к практическому применению идеальных кососимметричных управлений необходимо учитывать сопротивления движению.

Цель исследований – учет сопротивлений движению при использовании одного заданного типа идеального кососимметричного управления переносным движением упругой системы.

Обоснование кососимметричных законов оптимального управления переносным движением упругих объектов без учета сопротивлений движению дано, например, в [1]. При учете сопротивлений (внешнего – линейно-вязкого и сухого трения и внутреннего – линейно-вязкого) могут быть использованы функционалы в виде принципа действия, являющиеся по существу критериями оптимальности переносного и относительного движений. В общем виде для единичной массы функционалы записываются таким образом:

$$J_e = \int_0^T \left(\frac{\dot{S}_e^2}{2} + U_e S_e - F_* S_e \right) e^{nt} dt, \quad J_r = \int_0^T \left(\frac{\dot{x}_r^2}{2} - \frac{k^2 x_r^2}{2} + U_e x_r \right) e^{n_1 t} dt. \quad (1)$$

Здесь S_e – координата переносного движения основания объекта (или его центра масс); U_e – управление переносным движением; F_* – сила сухого трения на единицу массы ($F_* = fg$, где f – коэффициент трения скольжения; g – ускорение силы тяжести); n – коэффициент внешнего линейно-вязкого сопротивления; x_r – упругое перемещение (системы с одной степенью свободы), обусловленное деформациями упругого элемента; k – частота собственных колебаний системы; n_1 – коэффициент внутреннего линейно-вязкого сопротивления.

Для функционалов (1) уравнения Эйлера в переносном и относительном движении соответственно имеют вид:

$$\frac{d^2 S_e}{dt^2} + 2n \frac{dS_e}{dt} = U_e - F_*; \quad \frac{d^2 x_r}{dt^2} + 2n_1 \frac{dx_r}{dt} + k^2 x_r = -U_e.$$

В [1] установлен класс идеальных кососимметричных управлений (без учета сопротивления). Одним из наиболее простых управлений является

$$\ddot{S}_e = U_e = A \sin pt, \quad (2)$$

где параметры A и p подлежат определению (из краевых условий).

Чтобы обеспечить относительное движение как идеальное (без трения) из исходного состояния абсолютного покоя в конечное состояние абсолютного покоя, необходимо найти такое управляющее воздействие, прикладываемое к основанию упругого объекта, которое создаст известное идеальное (как бы в отсутствие сопротивления) переносное ускорение.

Учет сопротивления движению важен при практической реализации законов управления переносным движением упругих систем. Если сухое трение естественно рассматривать как внешнее, то линейно-вязкое можно учитывать как внешнее (например, сопротивление воздуха), так и внутреннее, т.е. молекулярное трение между частицами материала упругого объекта.

В наиболее простом идеальном кососимметричном законе оптимального переносного движения единичной массы (2) параметры означают: A – максимальное ускорение; p – частота. Движение начинается из состояния покоя. Следовательно, при $t=0$, $S_e(0)=0$, $\dot{S}_e(0)=V_e(0)=0$. После двукратного интегрирования с учетом заданных начальных условий получено:

$$S_e = \frac{At}{p} - \frac{A \sin pt}{p^2}; \quad V_e = \frac{A}{p} - \frac{A \cos pt}{p}.$$

Для определения максимального значения ускорения A использовано условие на правом конце: необходимо за время T в переносном движении переместить объект на расстояние L (при $t = T$, $S_e(T) = L$). Из этого условия следует:

$$A = \frac{Lp^2}{pT - \sin pT}.$$

Наиболее естественно установить зависимость между T и p следующим образом: $p = \frac{2\pi}{T}$. Тогда закон ускорения приобретает вид «разгон-торможение» без учета сопротивления движению, т.е.

$$U_e = \frac{2\pi L}{T^2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \quad V_e = \frac{L}{T} - \frac{L}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \quad S_e = \frac{Lt}{T} - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Графики функций $S_e(t)$, $V_e(t)$ и $U_e(t)$ при $L = 1$ м и $T = 1$ с изображены на рисунке 1. В момент времени $t = T$, $S_e(T) = L$ наступает покой переносного движения (если, конечно, дальше отключается U_e).

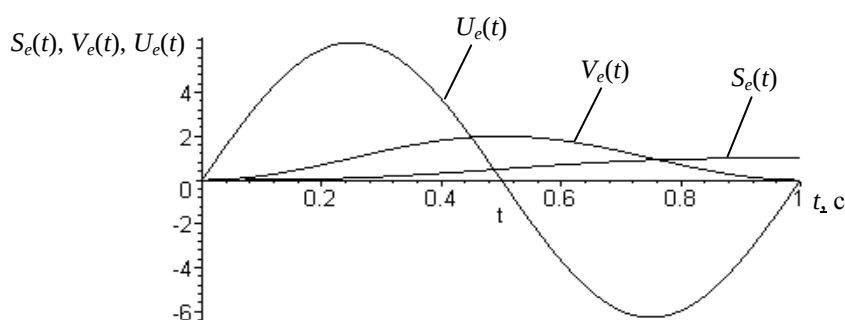


Рисунок 1 – Графики перемещения $S_e(t)$, скорости $V_e(t)$ и ускорения $U_e(t)$ в переносном движении

Выбор времени оптимального переносного движения упругой системы с одной степенью свободы основан на использовании теории моментов [4]. Без учета сопротивления в относительном движении при нулевых начальных условиях ($t = 0$, $x_r(0) = 0$ и $\dot{x}_r(0) = 0$) моментные соотношения, означающие одновременное равенство нулю относительных перемещения и скорости в конце движения, записываются в виде:

$$\int_0^T U_e(t) \cos ktdt = 0, \quad \int_0^T U_e(t) \sin ktdt = 0. \quad (3)$$

Для принятого закона переносного ускорения (2) с учетом условий $T = 2\pi/p$ и $p = k/v$ моментные соотношения (3) преобразуются к трансцендентным уравнениям

$$\cos 2v\pi = 0; \quad \sin 2v\pi = 0,$$

которые в данном случае выполняются одновременно при $v = 2, 3, 4, \dots$, т.е. время движения и период собственных колебаний упругой системы должны отличаться в целое число раз ($T = vT_* = v \cdot 2\pi/k$). В исследованиях принято $v = 2$.

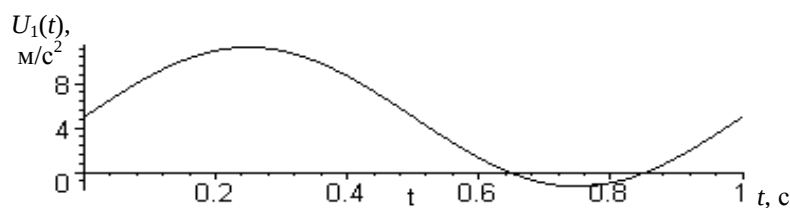
Практическая реализация идеального закона (2) связана с использованием приводов перемещения (двигателей переменного либо постоянного тока) и с учетом реального сопротивления движению.

Учет сопротивления в переносном движении

Учет сопротивления связан с определением силы, которую необходимо приложить к перемещаемой единичной массе, чтобы она двигалась по известному идеальному закону, несмотря на наличие сопротивления движению. В соответствии с алгоритмом решения обратной задачи динамики причина, которая обеспечит такое движение, равна:

$$U_1(t) = \frac{d^2 S_e}{dt^2} + 2n \frac{dS_e}{dt} + F \quad \text{или} \quad U_1(t) = U_e + 2nV_e + F. \quad (4)$$

Здесь n – коэффициент линейно-вязкого сопротивления; F – сила трения, знак которой не меняется на всем интервале движения в связи с $V_e(t) > 0$ при $T \geq t \geq 0$. В (4) производные от $S_e(t)$ известны из предыдущих преобразований. При исходных данных ($n = 1$, $F = 5$ и $L = 1$ м) график $U_1(t)$ изображен на рисунке 2.

Рисунок 2 – График силы $U_1(t)$

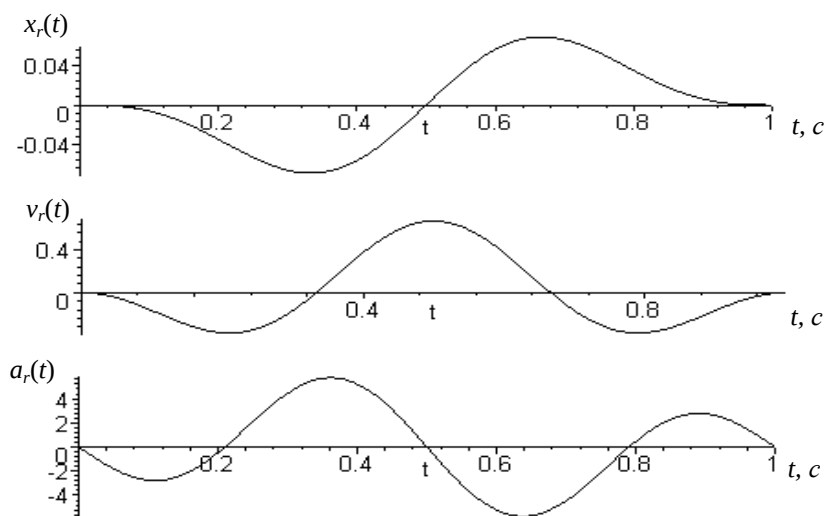
В относительном движении без учета линейно-вязкого сопротивления дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -U_e \quad (5)$$

при нулевых начальных условиях имеет решение (в Maple):

$$\begin{aligned} x(t) &:= -\frac{4 \sin(k t) \pi^2}{k (-k^2 + 4 \pi^2)} + \frac{2 \pi \sin(2 \pi t)}{-k^2 + 4 \pi^2}, & v(t) &:= -\frac{4 \cos(k t) \pi^2}{-k^2 + 4 \pi^2} + \frac{4 \pi^2 \cos(2 \pi t)}{-k^2 + 4 \pi^2}, \\ a(t) &:= \frac{4 \sin(k t) k \pi^2}{-k^2 + 4 \pi^2} - \frac{8 \pi^3 \sin(2 \pi t)}{-k^2 + 4 \pi^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Дальше принято, что период колебаний упругой системы в 2 раза меньше общего времени движения ($T_1 = T/2$) и тогда $k = 2\pi/T_1 = 4\pi \text{ с}^{-1}$. Как и ранее, $L = 1 \text{ м}$. Графики функций (6) изображены на рисунке 3. Принципиально важно, что в момент времени $t = T$ наблюдается не только переносный, но и относительный покой, т.е. фактически имеет место абсолютный покой.

Рисунок 3 – Графики функций $x_r(t)$, $v_r(t)$, $a_r(t)$

Если учесть внутреннее линейно-вязкое сопротивление, то при $t = T$ скорость $v_r(T) \neq 0$.

Учет сопротивлений при использовании алгоритма решения обратной задачи динамики

Примечание 1. Без учета сопротивления движению экстремальное свойство движения может отражаться в функционале вида [1] $J_e^* = \int_0^T \left(\frac{\dot{S}_e^2}{2} - \frac{p^2 S_e^2}{2} + \frac{Lp^3}{2\pi} t \cdot S_e \right) dt$, которому соответствует

уравнение Эйлера $\ddot{S}_e + p^2 S_e = \frac{Lp^3}{2\pi} t$. Его решение при нулевых начальных условиях

$S_e = \frac{L}{2\pi} (pt - \sin pt)$, откуда следует ускорение переносного движения (2).

Примечание 2. Если учесть сопротивление движению (линейно-вязкое и сухое трение), то уравнение переносного движения примет вид:

$$\frac{d^2 S_e}{dt^2} + 2n \frac{dS_e}{dt} + p^2 S_e = \frac{Lp^3}{2\pi} t - F_*$$

В этом случае в переносном и относительном движениях не наступает покой, т.е. не наблюдается абсолютный покой и необходимо искать другие пути поиска управления движением упругой системы. Без учета сопротивления движению закон колебаний в относительном движении имеет вид (6).

Можно найти такой закон $U_e(t)$, при котором будут идеальные колебания упругой системы в относительном движении, т.е.

$$U_e(t) = \frac{d^2 x_r}{dt^2} + 2n_1 \frac{dx_r}{dt} + k^2 x_r. \quad (7)$$

После подстановки (6) в (7) и преобразований получено выражение (в Maple):

$$U_e^* = -\frac{4 \sin(kt) k \pi^2 L}{T(k^2 T^2 - 4 \pi^2)} - \frac{8 \pi^3 L \sin\left(\frac{2 \pi t}{T}\right)}{T^2 (-k^2 T^2 + 4 \pi^2)} + 2n_1 \left(\frac{4 \cos(kt) \pi^2 L}{T(k^2 T^2 - 4 \pi^2)} + \frac{4 \pi^2 L \cos\left(\frac{2 \pi t}{T}\right)}{T(-k^2 T^2 + 4 \pi^2)} \right) + 16 \pi^2 \left(\frac{4 \sin(kt) \pi^2 L}{k T(k^2 T^2 - 4 \pi^2)} + \frac{2 \pi L \sin\left(\frac{2 \pi t}{T}\right)}{-k^2 T^2 + 4 \pi^2} \right). \quad (8)$$

Графики управлений U_e^* и U_e (переносного ускорения) изображены на рисунке 4.

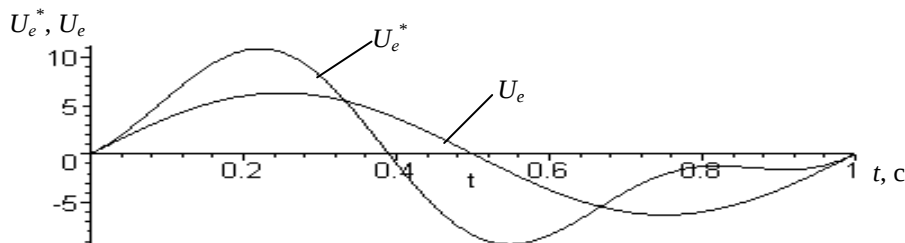


Рисунок 4 – Графики управлений переносным движением

Дважды интегрируя (8) при нулевых начальных условиях в переносном движении, получим (в Maple) закон переносного движения (с учетом линейно-вязкого сопротивления в относительном движении):

$$V_e^* = -\frac{39.47841762 \cos(kt) L}{T(k^2 T^2 - 39.47841762)} - \frac{39.47841762 L \cos\left(\frac{6.283185308 t}{T}\right)}{T(-1. k^2 T^2 + 39.47841762)} - \frac{496.1004272 \sin(kt) L}{k T(k^2 T^2 - 39.47841762)} - \frac{78.95683524 L \sin\left(\frac{6.283185308 t}{T}\right)}{-1. k^2 T^2 + 39.47841762} + \frac{6234.181830 L \cos(kt)}{k^2 T(k^2 T^2 - 39.47841762)} + \frac{157.9136705 L T \cos\left(\frac{6.283185308 t}{T}\right)}{-1. k^2 T^2 + 39.47841762} + t.$$

Теперь воздействие, обеспечивающее оптимальное переносное движение (5) и идеальное относительное движение, при $n = 0,2$ и $F = 2$ примет вид:

$$U_1^* = U_e^* + 2nV_e + F.$$

График $U_1^*(t)$ изображен на рисунке 5.

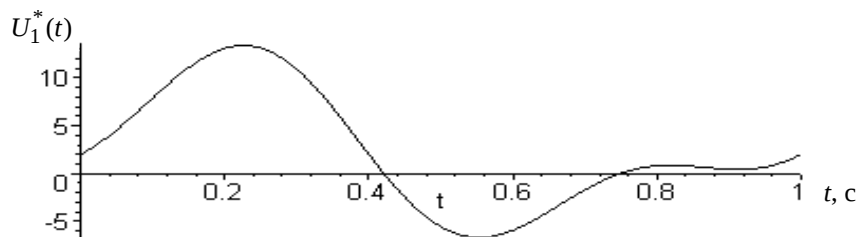


Рисунок 5 – График $U_1^*(t)$

Наиболее существенное влияние на характер управления оказывает сухое трение. Вместе с тем, значительное линейно-вязкое сопротивление может приводить к росту амплитудного значения управляющего воздействия. Дифференциальные уравнения движения объекта составлены с использованием уравнений Лагранжа второго рода и имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_{x_1},$$

где φ – угол поворота ротора электродвигателя; x_1 – перемещение транспортируемой массы в связи с ее колебаниями; $\dot{\varphi}$, $\dot{x}_1$ – обобщенные скорости; Q_{φ} , Q_{x_1} – обобщенные силы.

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} (J_1 + J_2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (r \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m_1 (r \dot{\varphi} + \dot{x}_1)^2,$$

где m – масса каретки; m_1 – сосредоточенная масса упругой системы; J_1 , J_2 – физические моменты инерции; r – радиус барабана. После преобразований получена система дифференциальных уравнений:

$$(J_1 + J_2 + (m + m_1)r^2)\ddot{\varphi} + m_1 r \ddot{x}_1 = M - M_t, \quad m_1 r \ddot{\varphi} + m_1 \ddot{x}_1 = -c x_1. \quad (9)$$

Здесь M – активный (управляющий) момент, подлежащий определению; c – коэффициент жесткости упругой связи, $c = 3EJ/H^3$; EJ – изгибная жесткость; M_t – момент, учитывающий сухое трение и линейно-вязкое сопротивление.

Наиболее простой вариант решения задачи – определение $M(t)$ при $M_t = 0$. Для нахождения вращающего момента $M(t)$ использован алгоритм решения обратной задачи динамики, т.е. по известным геометрическим (кинематическим) свойствам оптимального движения ($\varphi(t)$ и $x_1(t)$) находится причина, вызывающая такое оптимальное движение – в данном случае определяется вращающий момент. Оптимальное вращательное движение барабана может быть записано в виде

$$\varphi(t) = \frac{L}{2\pi r} (pt - \sin pt), \quad (10)$$

где L – расстояние, на которое перемещается упругий объект из исходного состояния покоя.

Следовательно,

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{Lp}{2\pi r} (1 - \cos pt), \quad \ddot{\varphi}(t) = \frac{Lp^2}{2\pi r} \sin pt, \quad (11)$$

где $p = \omega/n$; $\omega = \sqrt{c/m_1}$. Далее принято $n = 2$.

Для зависимостей (10) и (11) характерно, что при $t = 0$ $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\ddot{\varphi}(0) = 0$, т.е. переносное движение системы начинается из состояния покоя. При $t = T = 2\pi/p$, где T – общее время движения, следует $\varphi(T) = L/r$, $\dot{\varphi}(T) = 0$, $\ddot{\varphi}(T) = 0$, т.е. сосредоточенная масса через время T , преодолев путь L , приходит в переносном движении в состояние покоя. При этом барабан повернется на угол $\varphi_* = L/r$.

Характер колебаний перемещаемой упругой системы с сосредоточенной массой m_1 в относительном движении на временном интервале движения известен:

$$x_1(t) = \frac{Lp^2}{2\pi(\omega^2 - p^2)} \left(\frac{p}{\omega} \sin \omega t - \sin pt \right). \quad (12)$$

Скорость и ускорение в относительном движении соответственно равны:

$$V_1(t) = \frac{Lp^3}{2\pi(\omega^2 - p^2)} (\cos \omega t - \cos pt), \quad a_1(t) = -\frac{Lp^3}{2\pi(\omega^2 - p^2)} (\omega \sin \omega t - p \sin pt). \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует: при $t = 0$, $x_1(0) = 0$; $V_1(0) = 0$, $a_1(0) = 0$, т.е. относительное движение массы m_1 происходит из состояния относительного покоя; при $t = T = 2\pi/p$ и $p = \omega/2$ перемещение, скорость и ускорение в относительном движении отсутствуют ($x_1(T) = 0$, $V_1(T) = 0$, $a_1(T) = 0$). Таким образом, масса m_1 перемещается на расстояние L из исходного состояния *абсолютного покоя* в конечное состояние *абсолютного покоя* с допущением колебаний только во время движения.

После подстановки $\ddot{\varphi}(t)$ и $\ddot{x}_1(t)$ в первое уравнение системы (9) и преобразований, выражение для момента $M(t)$ с учетом $\omega = 2p$ принимает вид:

$$M(t) = \frac{Lp^2}{3\pi} \left[\frac{3(J_1 + J_2) + r^2(3m + 4m_1)}{2r} \sin pt - m_1 r \sin 2pt \right].$$

При этом второе дифференциальное уравнение системы (9) удовлетворяется автоматически. Дифференциальное уравнение вращения якоря двигателя определяется как

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_c,$$

где M , M_c – активный момент двигателя и постоянный момент сопротивления, приведенный к валу двигателя; J – момент инерции всех элементов системы, приведенный к валу электродвигателя, т.е.

$J = J_\partial + J_1 + \frac{J_2}{i^2} + \frac{mh^2}{4i^2\pi^2}$, где J_∂ – момент инерции вращающихся частей двигателя; J_1 , J_2 – моменты инерции шестерен передачи; i – передаточное число; m – масса каретки; h – шаг ходового винта.

Активный момент двигателя $M = cI_\alpha$; $c = \frac{U_n - I_{\alpha n} R_\alpha}{\omega_n}$, где U_n , $I_{\alpha n}$, ω_n – номинальные значения напряжения, тока якоря и частоты вращения; R_α – сопротивление якорной цепи. Момент сопротивления, приведенный к валу электродвигателя, равен

$$M_c = \frac{(F_{cm} + F_{mp})h}{2\pi i \eta},$$

где $\eta = \eta_1 \eta_2$ – КПД передач системы; F_{cm} – сила сопротивления, приложенная к каретке; $F_{mp} = f_{mp} mg$ – сила трения; f_{mp} – коэффициент трения. Управляющее воздействие (напряжение) вычисляется как

$U = E + R_\alpha I_\alpha + L_\alpha \frac{dI_\alpha}{dt}$, где $E = c\omega$ – э.д.с. двигателя; I_α – ток якоря; L_α – индуктивность якорной цепи. После преобразований выражение для управления принимает вид:

$$U = \frac{R_\alpha}{c} M_c + c\omega + \frac{R_\alpha J}{c} \frac{d\omega}{dt} + \frac{L_\alpha J}{c} \frac{d^2\omega}{dt^2}.$$

При учете линейно-вязкого сопротивления использовалась зависимость $M_c = M_c^* + k_1\omega$, где k_1 – коэффициент линейно-вязкого сопротивления. При известном законе движения каретки $V = f(t)$ угловая скорость находится как $\omega(t) = \frac{2\pi i}{h} V(t)$.

Выводы

1. Для рассмотренного типа кососимметричного оптимального переносного движения упругой системы из исходного в конечное состояние абсолютного покоя найдено такое силовое воздействие с учетом сопротивлений движению, которое обеспечивает реализацию идеального переносного движения.
2. Силовые управляющие воздействия, учитывающие сопротивления движению, реализуемы с помощью двигателей постоянного тока.

Предметом дальнейших исследований является распространение предложенной методики конструирования оптимальных силовых воздействий на другие типы идеальных кососимметричных управлений, а также на управление переносным движением систем с конечным числом степеней свободы (например, в случае упругих подвесов).

Библиографический список использованной литературы

1. Бохонский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.М. Мозолевский; под. ред. А.И. Бохонского. — Севастополь: СевНТУ, 2007. — 296 с.
2. Bokhonsky A.I. Modelling and analysis of elastic system in motion / A.I. Bokhonsky, S.J. Zobkiewski. — Gliwice: Wydawnictwo Politechniki, 2011. — 171 p.

3. Бохонский А.И. Оптимальное переносное движение объекта на упругом подвесе / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская // Вісник СевНТУ. Сер. Механіка, енергетика, екологія: сб. науч.тр. — Севастополь, 2012. — Вып. 133. — С. 223–229.

4. Карновский И.А. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем / И.А. Карновский, Ю.М. Почтман. — К.: Вища шк., 1982. — 116 с.

Поступила в редакцию 18.01.2013 г.

Бохонський О.І., Вармінська Н.І. Оптимальний переносний рух пружного об'єкта

Досліджено оптимальний переносний та відносний рухи пружного об'єкта з одним ступенем свободи і з урахуванням лінійно-грузлого опору та сухого тертя.

Ключові слова: оптимальне управління, переносний рух, відносний рух (коливання), опір руху.

Bohonsky A.I., Varminska N.I. Optimum transfer movement of an elastic object

Optimum transfer and relative movements of an elastic object (with one degree of freedom) with the linear-viscous resistance and dry friction are investigated.

Keywords: optimum control, transfer movement, relative movement (fluctuations), resistance to movement.