

УДК 519.873

С.Г. Глеч, доцент, канд. тех. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: glech2004@ukr.net***Filliger Roger, professor***Bern University of applied Sciences**Quellgasse Str. 21, Biel/Bienne, Switzerland, CH-2501***СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ С НЕИЗВЕСТНЫМ ПАРАМЕТРОМ**

Изложена общая концепция нахождения оптимального управления для системы с неизвестным параметром. Использован статистический подход для определения неизвестного параметра.

Ключевые слова: стохастическая динамика, неизвестный параметр, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Введение. В современном производстве особое значение имеет автоматизация всех уровней технического обслуживания, контроля продукции и диагностики оборудования. Обработанная информация контрольно-измерительной системы поступает к диспетчеру вместе с данными по учету изготавливаемой продукции. Она же используется и в автоматических системах управления ходом технологического процесса. Однако нередко в функционировании технологического процесса вмешивается некоторый неизвестный параметр, от скорости и стоимости определения которого зависит нормальная работа всего производства в целом.

Цель статьи. Произвести нахождение оптимального управления для некоторого технологического процесса с неизвестным параметром. Для этого описать динамику системы с помощью стохастического уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана и затем решить его, составив для него соответствующую систему дифференциальных уравнений Рикатти.

Обзор литературы и постановка задачи. Современная практика показывает, что достаточно часто встречаются простои оборудования в результате поломки инструмента [1, 2], что обусловлено влиянием различных неизвестных параметров на технологический процесс. Возникает необходимость разработки моделей стохастического функционирования системы с неизвестным параметром. Постановка данной задачи сформулирована в [3], там же приведены некоторые подходы к ее решению. Найдена оптимальная динамика системы без неизвестного параметра, однако решение при наличии неизвестного параметра не находилось.

Основная часть. Рассмотрим управляемую стохастическую динамику с $X \in R$, $u \in R$.

$$dX_t = \alpha u dt + d\xi, \quad X_0 = 0 \quad (1)$$

где α – неизвестный параметр, $\alpha \in [-1; 1]$.

Хоть α и не наблюдается, можно связать его значение с последовательностью X_t , u_t . И, зная в каждый момент времени dX_t и u_t , можно улучшить уверенность в значении α , используя формулу Байеса [3]:

$$p_{t+dt}(\alpha | dX_t, u_t) \propto p(dX_t | \alpha u_t) p_t(\alpha),$$

где $p(dX_t | \alpha u_t) \sim N(\alpha u_t, \sigma^2 dt)$ белый шум и $p_t(\alpha)$ – вероятность, выражающая уверенность в значении параметра α в момент времени t .

Решение состоит в параметризации уверенности с некоторой известной статистикой θ_t

$$p_t(\alpha) = p_t(\alpha | \theta_t) = \frac{1}{2} (1 + \tanh(\alpha \theta_t)),$$

где θ_0 – начальное распределение.

Можно связать динамику θ_t с состоянием системы X_t следующим образом:

$$d\theta_t = \frac{u_t}{\sigma^2} dX_t = \frac{u_t}{\sigma^2} (\alpha u_t dt + d\xi). \quad (2)$$

Необходимо найти оптимальное управление u с финальной стоимостью $\phi(X_T) = X_T^2$ и текущей стоимостью $R(u) = \frac{\varepsilon}{2} u$, $\varepsilon > 0$ (как можно более близкую к нулю, при небольшом управлении).

Стохастическое уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ) для этой задачи принимает вид

$$-j_t = \min_u \left[\frac{\varepsilon}{2} u^2 + \bar{\alpha} u j_x + \frac{\bar{\alpha} u^2}{\sigma^2} j_\theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \ddot{j}_{xx} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{\sigma^2} \ddot{j}_{\theta\theta} + u \ddot{j}_{x\theta} \right], \quad (3)$$

где $\bar{\alpha} = M(\alpha|\theta_t) = th(\theta)$.

Откуда находится оптимальное управление:

$$u_{\min} = -\sigma^2 \frac{\bar{\alpha} j_x + \ddot{j}_{x\theta}}{\varepsilon \sigma^2 + 2\bar{\alpha} j_\theta + \ddot{j}_{\theta\theta}}. \quad (4)$$

Решение данного уравнения будем искать как линейную квадратическую функцию $J(t, X, \theta) = \frac{1}{2} P(t) X^2 + a(t) X + b(t) + K(t) \theta$. Находя соответствующие производные, подставляя их в (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях X , получаем систему уравнений Ракатти:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = 0 \\ \dot{P}(t) = \sigma^2 \bar{\alpha}^2 \frac{P^2(t)}{\varepsilon \sigma^2 + 2\bar{\alpha} K(t)} \\ \dot{a}(t) = \sigma^2 \bar{\alpha}^2 \frac{P(t) a(t)}{\varepsilon \sigma^2 + 2\bar{\alpha} K(t)} \\ \dot{b}(t) = \frac{\sigma^2 \bar{\alpha}^2}{2} \frac{a^2(t)}{\varepsilon \sigma^2 + 2\bar{\alpha} K(t)} - \frac{1}{2} \sigma^2 P(t) \end{cases}. \quad (5)$$

С учетом финального условия $J(T, X, \theta) = \phi(X)$, которое для системы уравнений (5) принимает вид $P(T) = 2$, $a(T) = 0$, $b(T) = 0$, $K(T) = 0$, получаем решение системы уравнений Ракатти:

$$\begin{cases} K(t) = t - T \\ P(t) = \frac{2}{1 - \frac{\sigma^2 \bar{\alpha}}{2} \ln \left| 1 + \frac{2\bar{\alpha}}{\varepsilon \sigma^2} (t - T) \right|} \\ a(t) = 0 \\ b(t) = \frac{2}{\bar{\alpha}} \int_0^t \frac{ds}{\ln \left| 1 + \frac{2\bar{\alpha}}{\varepsilon \sigma^2} (s - T) \right|} - \frac{2}{\sigma^2 \bar{\alpha}} \end{cases}, \quad (6)$$

Последний интеграл в системе (6) является неберущимся. Оценим его приближенно с помощью разложения в ряд Тейлора, взяв первое слагаемое разложения. Тогда получим:

$$b(t) \approx \frac{\varepsilon \sigma^2}{\bar{\alpha}^2} \ln \left| 1 - \frac{\bar{\alpha}}{\varepsilon} (t - T) \right|.$$

Таким образом, решением уравнения ГЯБ является функция

$$J(t, X, \theta) = \frac{X^2}{1 - \frac{\sigma^2 \bar{\alpha}}{2} \ln \left| 1 + \frac{2\bar{\alpha}}{\varepsilon \sigma^2} (t - T) \right|} + \frac{2}{\bar{\alpha}} \int_0^t \frac{ds}{\ln \left| 1 + \frac{2\bar{\alpha}}{\varepsilon \sigma^2} (s - T) \right|} - \frac{2}{\sigma^2 \bar{\alpha}} - (T - t) \theta, \quad (7)$$

а оптимальным управлением

$$u_{\min} = -\frac{\sigma^2 \bar{\alpha}}{\varepsilon \sigma^2 + 2\bar{\alpha}(T - t)} \frac{X}{1 - \frac{\sigma^2 \bar{\alpha}}{2} \ln \left| 1 + \frac{2\bar{\alpha}}{\varepsilon \sigma^2} (t - T) \right|}. \quad (8)$$

Окончательно получаем оптимальную динамику системы в виде

$$\begin{cases} dX_t = -\frac{2\alpha\sigma^2\bar{\alpha}}{\varepsilon\sigma^2 + 2\bar{\alpha}(T-t)} \frac{X}{1 - \frac{\sigma^2\bar{\alpha}}{2} \ln\left|1 + \frac{2\bar{\alpha}}{\varepsilon\sigma^2}(t-T)\right|} dt + d\xi \\ X_0 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Отметим в заключении, что вмешательство неизвестного параметра α в динамику системы приводит к проблеме определения оптимальной динамики системы при условии нахождения параметра θ , который является нелинейным, исходная динамика dX_t – линейная.

Выводы. Найдено оптимальное управление для технологического процесса с неизвестным параметром. Критерием оптимальности служила скорость и стоимость такого управления. Полученные результаты могут быть использованы при создании автоматических системах управления технологическим процессом.

Перспективы дальнейших исследований. Планируется применить найденное оптимальное управление для уменьшения времени простоя оборудования из-за скрытых отказов, что должно повлечь уменьшение расходов на техническое обслуживание технологических комплексов.

Бibliографический список использованной литературы

1. Влияние простоев на производительность дискретных автоматизированных производственных систем: монография / В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, И.В. Ольшанская, А.И. Песчанский. — Севастополь: СевНТУ, 2009. — 212 с.
2. Балан С.А. Вопросы организации ремонта и технического обслуживания машиностроительного оборудования / С.А. Балан. — Одесса: Астропринт, 1997. — 165 с.
3. Simon Dan. Optimal state estimation: kalman, H_∞ , nonlinear approaches / Dan Simon. — Published by Wiley&sons Inc., Hoboken, New Jersey, 2006. — 525 p.

Поступила в редакцию 15.02.2013 г.

Глеч С.Г., Roger Filliger Стохастична динаміка системи з невідомим параметром

Викладено загальну концепцію знаходження оптимального керування для системи з невідомим параметром. Використано статистичний підхід для визначення невідомого параметра.

Ключові слова: стохастична динаміка, невідомий параметр, рівняння Гамільтона–Якобі–Беллмана.

Glech S.G., Roger Filliger Stochastic dynamics of the system with unknown parameter

A general concept of finding the optimal control for the system with unknown parameter is showed. Statistical approach uses to determine the unknown parameter.

Keywords: stochastic dynamics, unknown parameter, Hamilton–Jacobi–Bellman equation.