

**Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный
технический университет**



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторной работы №5
«Численное решение нелинейных уравнений»
по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений»
для студентов дневной формы обучения
направления подготовки «Компьютерная инженерия»

**Севастополь
2014**

УДК 519.61

Методические указания к выполнению лабораторной работы «Численное решение нелинейных уравнений» по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений» для студентов направления подготовки «Компьютерная инженерия» дневной формы обучения /Сост. Е.В. Козлова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2014.– 12с.

Цель методических указаний – методическая помощь в самостоятельном изучении теоретического материала по теме «Численное решение уравнений и систем» и выполнении лабораторной работы.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники (протокол № 11 от 25 июня 2014г.).

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Обжерин Ю.Е., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики.

Ответственный за выпуск:

Брюховецкий А.А., кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой кибернетики и вычислительной техники.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Цель работы	3
2.	Краткие теоретические сведения и примеры решения типовых задач	3
3.	Порядок выполнения лабораторной работы	7
4.	Варианты индивидуальных заданий к выполнению лабораторной работы	9
5.	Контрольные вопросы	12
	Библиографический список	12

1. Цель работы – получить практические навыки численного решения алгебраических и трансцендентных уравнений на основе использования методов вычислительной математики.

2. Краткие теоретические сведения и примеры решения типовых задач

В общей постановке уравнение с одним неизвестным может быть записано в виде:

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные функции.

Любое уравнение с одним неизвестным может быть записано и в ином виде:

$$f(x) = 0, \quad (2)$$

где $f(x) \equiv \varphi(x) - \psi(x)$.

Число $\bar{x}$ называется корнем уравнения, если при подстановке вместо x числа $\bar{x}$ уравнение превращается в верное числовое равенство.

Все уравнения подразделяются на два больших класса: алгебраические и трансцендентные. Если функции ($f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$), входящие в уравнения (1) или (2) являются алгебраическими, то уравнение называется алгебраическим, а если в запись уравнения входит хотя бы одна трансцендентная функция, то соответствующее уравнение называется трансцендентным.

В качестве примеров алгебраических уравнений могут быть рассмотрены следующие уравнения:

$$x^3 - x + 4 = 0; \quad \sqrt{2x+1} + \frac{3x}{\sqrt{x-2}} = 5; \quad \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{2x+\sqrt{x}}{4}.$$

Примерами трансцендентных уравнений могут служить:

$$2^x = \sin(x-1); \quad \operatorname{tg}(x) + \cos(x) = 3x; \quad \lg(x) = \frac{1}{x^3}.$$

Любое алгебраическое уравнение после несложных преобразований может быть приведено к виду:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ – любые действительные числа, а n – натуральное число. В такой записи функция $f(x)$ представляет собой многочлен.

На практике многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Также доказано, что нельзя получить аналитическое решение произвольного алгебраического уравнения степени выше четвертой. Однако такие уравнения могут решаться численными

методами с заданной точностью (в среде MATHCAD не более значения заданного системной переменной TOL).

2.1 Численное решение нелинейного уравнения

Для простейших уравнений вида $f(x)=0$ решение в Mathcad находится с помощью функции **root**. Функция **root**($f(x_1, x_2, \dots)$, x_1 , a , b) возвращает значение x_1 , принадлежащее отрезку $[a, b]$, при котором значение функции $f(x)$ обращается в 0.

Аргументами функции **root** являются:

$f(x_1, x_2, \dots)$ – функция, определенная где-либо в рабочем документе, или выражение. Выражение должно возвращать скалярные значения.

x_1 – имя переменной, которая используется в выражении.

Этой переменной перед использованием функции **root** необходимо присвоить числовое значение. Mathcad использует его как начальное приближение при поиске корня.

a , b – необязательны, если используются, то должны быть вещественными числами, причем $a < b$.

Пример использования функции **root** показан на рисунке 1.

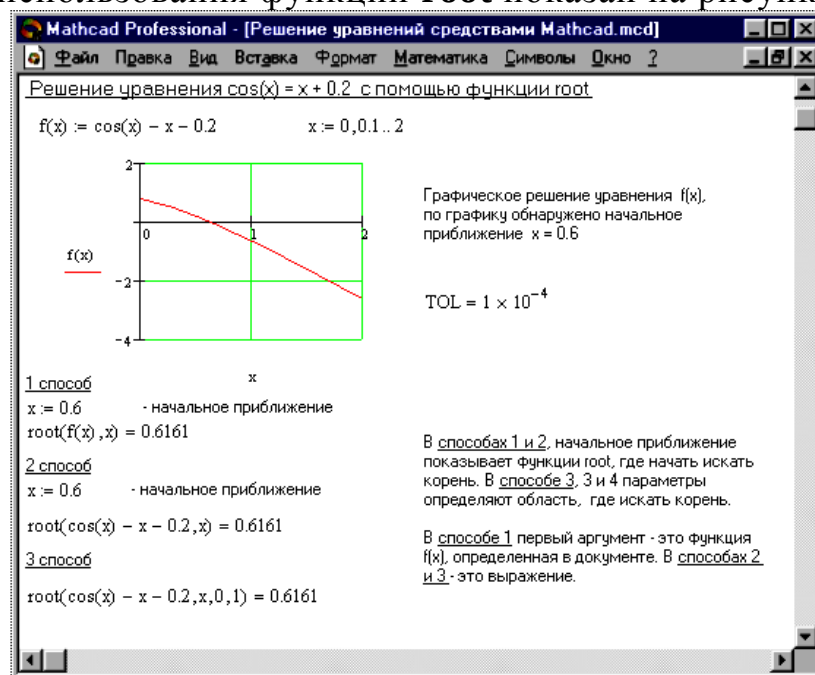


Рисунок 1. Пример использования функции **root** для решения нелинейного алгебраического уравнения

Приближенные значения корней (начальные приближения) могут быть:

- Известны из физического смысла задачи;

- Известны из решения аналогичной задачи при других исходных данных;
- Найдены графическим способом.

Наиболее распространен графический способ определения начальных приближений.

Принимая во внимание, что действительные корни уравнения $f(x) = 0$ – это точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, достаточно построить график функции $f(x)$ и отметить точки пересечения $f(x)$ с осью Ox , или отметить на оси Ox отрезки, содержащие только один корень.

Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение $f(x) = 0$ равносильным ему уравнением $f_1(x) = f_2(x)$, где функции f_1 и f_2 – более простые, чем функция $f(x)$.

Тогда, построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример. Графически отделить корни уравнения

$$x \cdot \lg(x) = 1. \quad (3)$$

Уравнение (3) удобно переписать в виде равенства:

$$x \cdot \lg(x) = \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Корни уравнения (3) могут быть найдены как абсциссы точек пересечения логарифмической кривой $y = \lg(x)$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$.

Построив эти кривые, приближенно найдем единственный корень $\xi \approx 2,5$ уравнения (3) или определим содержащий его отрезок – $[2, 3]$.

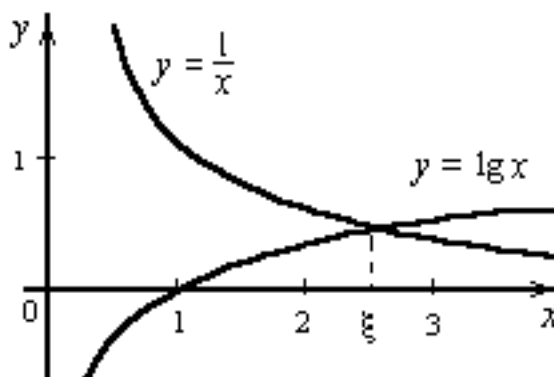


Рисунок 2. Пример графического отделения корней уравнения.

2.2 Отсутствие сходимости функции root

Если после многих итераций Mathcad не находит подходящего приближения, то появляется сообщение Can't converge to a solution.

(отсутствует сходимость). Эта ошибка может быть вызвана следующими причинами:

- уравнение не имеет корней;
- корни уравнения расположены слишком далеко от начального приближения;
- функции $f(x)$ имеет локальные максимумы или минимумы между начальным приближением и корнями;
- функции $f(x)$ имеет разрывы между начальными приближениями и корнями;
- уравнение имеет комплексный корень, но начальное приближение было вещественным.

Чтобы установить причину ошибки, исследуйте график $f(x)$.

Это поможет выяснить наличие корней уравнения $f(x) = 0$ и, если они есть, то определить приблизительно их значения. Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее будет сходиться решение уравнения с использованием функции `root`.

2.3 Рекомендации по использованию функции `root`

1. Для изменения точности, с которой ведётся поиск корня, нужно изменить значение системной переменной **TOL**.

Если значение **TOL** увеличивается, решение будет найдено быстрее, но ответ будет менее точен. Если значение **TOL** уменьшается, то решение будет сходиться медленнее, но ответ будет более точен.

Чтобы изменить значение **TOL** в определенной точке рабочего документа, используйте определение вида **TOL:=0.01**.

Чтобы изменить значение **TOL** для всего рабочего документа, выберите команду

Математика⇒Параметры...⇒Переменные⇒Допуск сходимости (TOL).

2. Если два корня расположены очень близко друг от друга, следует уменьшить значение **TOL**, чтобы различать их.

3. Если функция $f(x)$ имеет малый наклон около искомого корня, т.е. значение первой производной функция $f'(x)$ велико, решение может сходиться к значению **r**, отстоящему от корня достаточно далеко. В таких случаях для нахождения более точного значения корня необходимо уменьшить значение **TOL**.

2.4 Нахождение корней полинома

Для нахождения корней полинома, имеющего вид:

$$v_n x^n + \dots + v_2 x^2 + v_1 x + v_0,$$

лучше использовать функцию **polyroots**, нежели **root**.

В отличие от функции **root**, функция **polyroots** не требует начального приближения и возвращает сразу все корни, как вещественные, так и комплексные.

Функция **polyroots(v)** возвращает значения корней полинома степени n , содержащихся в векторе длины n .

Аргументом функции **polyroots** является вектор v длины $n+1$, содержащий коэффициенты полинома.

Вектор v удобно создавать используя команду

Символы $\Rightarrow$ Коэффициенты полинома.

Рисунок 3 иллюстрирует решение задачи поиска корней полинома средствами Mathcad.

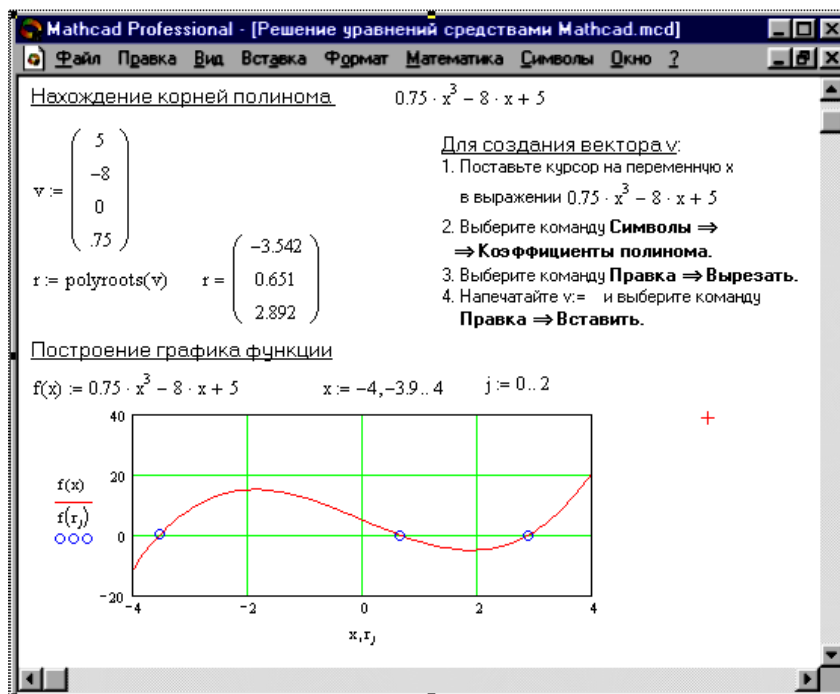


Рисунок 3. Пример нахождения корней полинома средствами Mathcad.

3. Порядок выполнения лабораторной работы

1. Изучить раздел 2 настоящих указаний.
2. Для варианта, выбранного из таблиц 1, 2, 3, выполнить задания 1–3. Номер варианта индивидуального задания выдаётся преподавателем.
3. Сделать анализ полученных результатов и составить отчет о проделанной работе.

Задание 1. Используя средства Excel, решить задачу локализации корней нелинейного уравнения $f(x)=0$ путём построения графика функции $f(x)$ (таблица 1).

Найти все корни уравнения $f(x) = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ с помощью встроенной функции **root**.

Задание 2. Для полинома $g(x)$ (таблица 2) выполнить следующие действия:

1. С помощью команды

Символы $\Rightarrow$ Коэффициенты полинома

создать вектор **V**, содержащий коэффициенты полинома

2. Решить уравнение $g(x) = 0$ с помощью функции **polyroots**.

3. Решить уравнение $g(x) = 0$ символьно, используя команду

Символы $\Rightarrow$ Переменные $\Rightarrow$ Вычислить.

Задание 3.

1. Проверить условие сходимости и записать расчетные формулы для нахождения корня уравнения заданным методом (таблица 3).
2. Выбрать и обосновать выбор начального приближения из указанного отрезка поиска корня.
3. Написать и отладить программу решения нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. В программе предусмотреть подсчет и вывод числа итераций, за которое удастся найти значение корня с заданной точностью.
4. Сравнить полученное значение корня с истинным значением корня, приведенным в таблице вариантов.

4. Варианты индивидуальных заданий к выполнению лабораторной работы

Таблица 1. Варианты к выполнению задания 1.

№ вар.	Уравнение
1	$3\sin(\sqrt{x}) + 0,35x - 3,8 = 0, \quad x \in [2,3]$
2	$0,25x^3 + x - 1,2502 = 0, \quad x \in [0,2]$
3	$x - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2,2 = 0, \quad x \in [0,4,1]$
4	$x - \frac{1}{3 + \sin(3,6x)} = 0, \quad x \in [0,0.85]$
5	$0,1x^2 - x \ln(x) = 0, \quad x \in [1,2]$
6	$\operatorname{tg}(x) - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3(x) + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5(x) - \frac{1}{3} = 0, x \in [0,0.8]$
7	$\arccos(x) - \sqrt{1 - 0,3x^3} = 0, \quad x \in [0,1]$
8	$3x - 4\ln(x) - 5 = 0, \quad x \in [2,4]$
9	$\cos\left(\frac{2}{x}\right) 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} = 0, \quad x \in [1,2]$
10	$\sqrt{1 - 0,4x^2} - \arcsin(x) = 0, \quad x \in [0,1]$
11	$e^x - e^{-x} - 2 = 0, \quad x \in [0,1]$
12	$\sin(\ln x) - \cos(\ln x) + 2\ln(x) = 0, \quad x \in [1,3]$
13	$x - 2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \quad x \in [1,2,3]$
14	$e^x + \ln(x) - 10x = 0, \quad x \in [3,4]$
15	$\cos(x) - e^{-\frac{x^2}{2}} + x - 1 = 0, \quad x \in [1,2]$
16	$1 - x + \sin(x) - \ln(1+x) = 0, x \in [0,1.5]$
17	$3x - 14 + e^x - e^{-x} = 0, \quad x \in [1,3]$
18	$\sqrt{1-x} - \operatorname{tg}(x) = 0, \quad x \in [0,1]$
19	$x + \cos(x^{0,52} + 2) = 0, \quad x \in [0.5, 1]$
20	$3\ln^2(x) + 6\ln(x) - 5 = 0, \quad x \in [1,3]$
21	$\sin(x^2) + \cos(x^2) - 10x = 0, \quad x \in [0,1]$
22	$x^2 - \ln(1+x) - 3 = 0, \quad x \in [2,3]$
23	$2x\sin(x) - \cos(x) = 0, \quad x \in [0.4,1]$
24	$e^x + \sqrt{1 + e^{2x}} - 2 = 0, \quad x \in [-1,0]$

Таблица 2. Варианты к выполнению задания 2.

№ вар.	$g(x)$
1	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20$
2	$x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 60$
3	$x^4 - 14x^2 - 40x - 75$
4	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$
5	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x - 140$
6	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30$
7	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 55x - 150$
8	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$
9	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$
10	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50$
11	$x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25$
12	$x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$
13	$x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 100$
14	$x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 70x + 75$
15	$x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60$
16	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$
17	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$
18	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50$
19	$x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 60$
20	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$
21	$x^4 - 14x^2 - 40x - 75$
22	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$
23	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20$
24	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x - 140$

Таблица 3. Варианты к выполнению задания 3

№ вар.	Уравнение	Отрезок, содержащий корни	Метод решения	Приближенное значение корня
1	$3\sin(\sqrt{x}) + 0,35x - 3,8 = 0$	[2;3]	1	2,2985
2	$0,25x^3 + x - 1,2502 = 0$	[0;2]	2	1,0001
3	$x - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2,2 = 0$	[0,4;1]	3	0,7376
4	$x - \frac{1}{3 + \sin(3,6x)} = 0$	[0;0,85]	4	0,2624
5	$0,1x^2 - x \ln(x) = 0$	[1;2]	5	1,1183
6	$\operatorname{tg}(x) - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3(x) + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5(x) - \frac{1}{3} = 0$	[0;0,8]	6	0,3333
7	$\arccos(x) - \sqrt{1 - 0,3x^3} = 0$	[0;1]	1	0,5629
8	$3x - 4\ln(x) - 5 = 0$	[2;4]	2	3,2300
9	$\cos\left(\frac{2}{x}\right)2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} = 0$	[1;2]	3	1,8756
10	$\sqrt{1 - 0,4x^2} - \arcsin(x) = 0$	[0;1]	4	0,7672
11	$e^x - e^{-x} - 2 = 0$	[0;1]	5	0,8814
12	$\sin(\ln x) - \cos(\ln x) + 2\ln(x) = 0$	[1;3]	6	1,3749
13	$x - 2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$	[1,2;3]	1	1,3077
14	$e^x + \ln(x) - 10x = 0$	[3;4]	2	3,5265
15	$\cos(x) - e^{\frac{x^2}{2}} + x - 1 = 0$	[1;2]	3	1,0804
16	$1 - x + \sin(x) - \ln(1 + x) = 0$	[0; 1,5]	4	1,1474
17	$3x - 14 + e^x - e^{-x} = 0$	[1;3]	5	2,0692
18	$\sqrt{1-x} - \operatorname{tg}(x) = 0$	[0;1]	6	0,5768
19	$x + \cos(x^{0,52} + 2) = 0$	[0,5;1]	1	0,9892
20	$3\ln^2(x) + 6\ln(x) - 5 = 0$	[1;3]	2	1,8832
21	$\sin(x^2) + \cos(x^2) - 10x = 0$	[0;1]	3	0,1010
22	$x^2 - \ln(1 + x) - 3 = 0$	[2;3]	4	2,0267
23	$2x\sin(x) - \cos(x) = 0$	[0,4;1]	5	0,6533
24	$e^x + \sqrt{1 + e^{2x}} - 2 = 0$	[-1;0]	6	-0,2877
25	$\ln(x) - x + 1,8 = 0$	[2;3]		2,8459

В таблице 3 метод, соответствующий Вашему варианту, численного решения уравнения определяется следующим образом:

1. Метод простой итерации.
2. Метод Ньютона-Рафсона. Классический.
3. Метод Ньютона-Рафсона. Упрощенный.
4. Метод Ньютона-Рафсона. Метод ложных положений.
5. Метод секущих.
6. Метод половинного деления.

5. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте постановку задачи поиска корня нелинейного алгебраического уравнения.
2. Каковы основные этапы поиска корня нелинейного алгебраического уравнения?
3. Дайте определение понятию «простой корень».
4. Что собой представляет корень кратности k ?
5. Какие основные методы решения задачи поиска корня нелинейного алгебраического уравнения Вы знаете?
6. В чём состоит суть модификации классического метода Ньютона-Рафсона для решения нелинейных алгебраических уравнений?
7. Дайте определение понятию «сходимость» при решении задачи поиска простых корней.
8. Какие методы поиска корней нелинейных уравнений называются многошаговыми? Приведите примеры одношаговых и многошаговых методов.
9. Что такое «интервал неопределенности» при поиске корня?
10. Как определить радиус интервала неопределённости при решении задачи поиска простого корня нелинейного уравнения с заданной точностью?

Библиографический список

1. Амосов А.А., Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие./А.А. Амосов, Ю.А.Дубинский, Н.В. Копченкова. – М.: Изд-во МЭИ, 2003.–596с.
2. Бахвалов А.С. Численные методы в задачах и упражнениях. / А.С. Бахвалов. - М.: Высш. шк., 2000.-190с.
3. Бахвалов А.С. Численные методы. Учебное пособие./А.П. Жидков, Г.М. Кобельков. 4-е изд. М.-СПб.: Физматлит, Невский диалект, Лаборатория базовых знаний, 2003. – 624с.

Заказ № ____ от « ____ » _____ 2014 г. Тираж ____ экз.
Изд-во СевНТУ