

**Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный
технический университет**



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторной работы №2
«Приближение функций»**
по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений»
для студентов дневной формы обучения
направления подготовки «Компьютерная инженерия»

**Севастополь
2014**

УДК 519.61

Методические указания к выполнению лабораторной работы №2 «Приближение функций» по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений» для студентов направления подготовки «Компьютерная инженерия» дневной формы обучения /Сост. Е.В. Козлова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2014.– 16с.

Цель методических указаний – методическая помощь в самостоятельном изучении раздела «Приближение функций» и выполнении лабораторной работы.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники (протокол № 11 от 25 июня 2014г.).

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Обжерин Ю.Е., доктор технических наук, зав. кафедрой высшей математики.

Ответственный за выпуск:

Брюховецкий А.А., кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой кибернетики и вычислительной техники.

УДК 519.61

Методические указания к лабораторной работе на тему «Приближение функций» по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений» для студентов направления подготовки «Компьютерная инженерия» дневной формы обучения /Сост. Е.В. Козлова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2014.– 16с./ Сост. Е.В. Козлова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2014.– 16с.

Цель методических указаний – методическая помощь в самостоятельном изучении раздела «Приближение функций» и выполнении лабораторной работы.

Содержание

1	Цель работы	4
2	Основные теоретические положения и расчетные формулы	4
3	Порядок выполнения работы	6
4	Содержание отчета о выполнении работы	10
5	Контрольные вопросы	10
	Библиографический список	10
	Приложение А. Использование Mathcad для решения задачи интерполяции	11
A.1	Примеры решения задачи интерполяции с использованием формулы Лагранжа	12
A.1.1	Пример реализации вычислений по интерполяционной формуле Лагранжа на основе программного блока	12
A.1.2	Пример реализации линейной интерполяции на основе программного блока	14
A.1.3	Примеры реализации локальной интерполяции с использованием встроенных функций	14
A.2	Пример решения задачи интерполяции с использованием многочлена Ньютона	15

1. Цель работы

Целью данной лабораторной работы является изучение и практическое применение методов приближения функций.

2. Основные теоретические положения и расчетные формулы

Решение задачи приближения функций заключается в замене заданной функции $f(x)$ некоторой функцией $F(x)$ так, чтобы отклонение функции $F(x)$ от $f(x)$ в заданной области было бы в каком-то смысле наименьшим.

Необходимость решения задачи приближения функций в основном связана с двумя причинами:

1. Функция $f(x)$ имеет сложное аналитическое описание, вызывающее определенные трудности при его использовании (например, $f(x)$ является специальной функцией: гамма-функцией, эллиптической функцией и др.).
2. Аналитическое описание функции $f(x)$ не известно, т.е. $f(x)$ задана таблично. При этом необходимо иметь аналитическое описание, приближенно представляющее $f(x)$ (например, для вычисления: значений $f(x)$ в произвольных точках, вычисления интегралов и производных от $f(x)$ и т. п.)

Типичной задачей приближения функций является задача интерполяции.

Задача интерполирования функций состоит в приближенной замене функции $f(x)$ более простой интерполирующей функцией $F(x)$, значения которой в узлах интерполирования x_i ($i=1, 2, \dots, n$) совпадают с соответствующими значениями $f(x)$, т.е. справедливо равенство

$$f(x_i)=F(x_i). \quad (1)$$

На практике чаще всего интерполируют функции $f(x)$, заданные таблично, в точках x_i ($i=1, 2, \dots, n$), если необходимо узнать значения $f(x)$ при $x \neq x_i$.

Обычно $F(x)$ отыскивают в виде обобщенного многочлена степени n

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad (2)$$

где φ_i ($i=1, 2, \dots, n$) – линейно-независимая система функций,

а c_i – действительные коэффициенты, определяемые из линейной алгебраической системы:

$$\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x_k) = f(x_k) = y_k, \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Пусть $\varphi_i(x) = x^{i-1}$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Тогда c_i определяется единственным образом и $F(x)$ совпадает с интерполяционным многочленом Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \quad (4)$$

При вычислении коэффициентов Лагранжа разности удобно расположить следующим образом:

$\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$	x_0-x_1	x_0-x_2	...	x_0-x_n
x_1-x_0	$\mathbf{x}-\mathbf{x}_1$	x_1-x_2	...	x_1-x_n
x_2-x_0	x_2-x_1	$\mathbf{x}-\mathbf{x}_2$	...	x_2-x_n
...	...	...	...	...
x_n-x_0	x_n-x_1	x_n-x_2	...	$\mathbf{x}-\mathbf{x}_n$

Если обозначить произведение элементов соответствующих строк через D_i ($i=1, 2, \dots, n$), а произведение элементов главной диагонали – через $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$, то формула (4) будет иметь вид:

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{D_i}. \quad (5)$$

Для оценки погрешности интерполяционной формулы Лагранжа можно использовать следующее соотношение:

$$|L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1} |\Pi_{n+1}(x)|}{(n+1)!}, \quad (6)$$

где $M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$, $[a,b]$ – интервал интерполирования.

Существенным недостатком интерполяции с использованием метода Лагранжа является тот факт, что при известном значении многочлена $L_n(x)$, построенного по значениям y_i ($i=1, 2, \dots, n$) в узлах интерполяции x_i – введение нового $(n+1)$ -го узла требует проведения всех вычислений заново.

Этого недостатка лишен метод приближения функций с использованием интерполяционного многочлена Ньютона.

Интерполяционная формула Ньютона для неравноотстоящих значений аргумента:

$$P_n(x) = f(x_0) + A_{10}(x - x_0) + A_{20}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + A_{n0}(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}), \quad (7)$$

где A_{mi} – разделенные разности m -того порядка.

Отношения $A_{1i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ называются разделенными разностями 1-го порядка.

Отношения $A_{2i} = \frac{A_{1,i+1} - A_{1i}}{x_{i+2} - x_i}$ – разделенными разностями 2-го порядка.

Разделенные разности порядка m вычисляются как:

$$A_{mi} = \frac{A_{m-1,i+1} - A_{m-1,i}}{x_{i+m} - x_i}. \quad (8)$$

Для равноотстоящих узлов разделенные разности порядка m вычисляются по формуле:

$$A_{mi} = \frac{A_{m-1,i+1} - A_{m-1,i}}{mh}, \quad m = \overline{1, n-1}, \quad (9)$$

где $h = x_{i+1} - x_i$ – шаг интерполирования, $i = \overline{0, n}$.

В точке $x \neq x_i$ погрешность интерполяции

$$f(x) - P_n(x) \approx A(x_0, x_1, \dots, x_n) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

При введении дополнительного $(n+1)$ -го узла интерполяции разность вычисленных значений соответствующих многочленов для аргумента x также может характеризовать погрешность интерполяции:

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = A(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \cdot \omega_{n+1}(x),$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$.

Если функция $f(x)$ достаточно гладкая и величина $|x_{n+1} - x_n|$ мала, то справедливо приближённое равенство:

$$A(x_0, x_1, \dots, x_n) \approx A(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$$

и тогда $f(x) - P_n(x) \approx P_{n+1}(x) - P_n(x)$,

т.е. погрешность интерполяции в точке $x \neq x_i$ для интерполяционного многочлена Ньютона

$$\Delta_{\text{Ньютона}} = |P_{n+1}(x) - P_n(x)|. \quad (10)$$

3. Порядок выполнения работы

1. Изучить раздел 2 и Приложение А настоящих указаний.

2. Выполнить задания 1–5 для вариантов, представленных в таблице вариантов индивидуальных заданий. Номер варианта выдаётся преподавателем.

Задание 1. Вычислить значения заданной функции $y_i = f(x_i)$ в узлах интерполяции $x_i = a + h \cdot i$, где $h = (b - a)/10$, $i = 0, 1, \dots, 10$, на отрезке $[a, b]$ (ПРИЛОЖЕНИЕ А.1).

Таблица 1 Варианты индивидуальных заданий к заданиям 1-3.

№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$	№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$
1	$\sin^2(x)$	$[0, 2]$	15	$e^{\cos x} \cos x^2$	$[0, 2]$
2	$\cos^2(x)$	$[0, 2]$	16	$\cos(x+x^2)$	$[0, 1]$
3	$e^{\sin(x)}$	$[0, 5]$	17	$\text{sh}(x)$	$[-3, 3]$
4	$1/(0.5 + x^2)$	$[0, 2]$	18	$\text{tg}(x+\sqrt{x})$	$[0.1, 0.4]$
5	$e^{-(x + \sin x)}$	$[2, 5]$	19	$\ln(\sin(\sqrt{x}))$	$[2.5, 3.5]$
6	$1/(1 + e^{-x})$	$[0, 4]$	20	$4^{\cos(x)}$	$[0.5, 1.5]$
7	$\sin(x + e^{\sin x})$	$[0, 3]$	21	$x^3 \cos(x^2)$	$[0, 3]$
8	$e^{-(x + 1/x)}$	$[1, 3]$	22	$x^2 \cos(x)$	$[\pi/2, \pi]$
9	$x \cdot \cos(x + \ln(1+x))$	$[1, 5]$	23	$x \sin(x^2)$	$[0, \pi/2]$
10	$10 \cdot \ln(2x)/(1+x)$	$[1, 5]$	24	$(x-0.5)^3 \ln(x)$	$[0.3, 0.8]$
11	$\sin(x^2) \cdot e^{-(x/2)}$	$[0, 3]$	25	$0.4^{x \sin(x)}$	$[1, 1.4]$
12	$\cos(x + \cos^3 x)$	$[0, 2]$	26	$x^{-3} e^x$	$[0.5, 1.5]$
13	$\cos(x + e^{\cos x})$	$[3, 6]$	27	$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$
14	$\cos(2x+x^2)$	$[0, 1]$	28	$\arccos(x)$	$[-1, 1]$

Задание 2. Для вычисленной табличной функции провести линейную интерполяцию с помощью встроенной интерполяционной функции **linterp**. Построить график функции **linterp** и отметить на нем узловые точки (x_i, y_i).

Задание 3. Провести сплайн-интерполяцию с помощью функций **lspline**, **pspline**, **cspline** и **interp**. Построить график функции **interp** и отметить на нем узловые точки (x_i, y_i). Примеры решения типовых задач см. в Приложении А.2.

Задание 4. Для функции, заданной таблично (Таблица 2), решить задачу приближения функции с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, используя программный блок. Пример решения типовой задачи см. в Приложении А.3. Построить график интерполяционного многочлена и отметить на нем узловые точки (x_i, y_i).

Таблица 2. Варианты индивидуальных заданий к заданию 4.

х	у	№ вар	$X_{\text{инт}}$
0,43	1,63597	1	0,702
0,48	1,73234	7	0,512
0,55	1,87686	13	0,645
0,62	2,03345	19	0,736
0,70	2,22846	25	0,608
0,75	2,35973		

х	у	№ вар	$X_{\text{инт}}$
0,02	1,02316	2	0,102
0,08	1,09590	8	0,114
0,12	1,14725	14	0,125
0,17	1,21483	20	0,203
0,23	1,30120	26	0,154
0,30	1,40976		

х	у	№ вар	$X_{\text{инт}}$
0,35	2,73951	3	0,526
0,41	2,30080	9	0,453
0,47	1,96864	15	0,482
0,51	1,78776	21	0,552
0,56	1,59502	27	0,436
0,64	1,34310		

х	у	№ вар	$X_{\text{инт}}$
0,41	2,57418	4	0,616
0,46	2,32513	10	0,478
0,52	2,09336	16	0,665
0,60	1,86203	22	0,537
0,65	1,74926	28	0,673
0,72	1,62098		

x	y	№ вар	X _{инт}	x	y	№ вар	X _{инт}
0,68	0,80866	5	0,896	0,11	9,05421	6	0,314
0,73	0,89492	11	0,812	0,15	6,61659	12	0,235
0,80	1,02964	17	0,774	0,21	4,69170	18	0,332
0,88	1,20966	23	0,955	0,29	3,35106	24	0,336
0,93	1,34087	29	0,715	0,35	2,73951	30	0,352
0,99	1,52368			0,40	2,36522		

Задание 5. Провести интерполирование заданной функции (таблица3) с помощью 1^{ой} и 2^{ой} интерполяционных формул Ньютона. Построить графики интерполяционных многочленов и отметить на нем узловые точки (x_i , y_i). Пример решения типовой задачи см. в Приложении А.4.

Таблица 3. Варианты индивидуальных заданий к заданию 5.

x	y	№ вар	X _{инт}	x	y	№ вар	X _{инт}
1,375	5,04192	1	1,3832	0,115	8,65729	2	0,1264
1,380	5,17744	7	1,3926	0,120	8,29329	8	0,1315
1,385	5,32016	13	1,3862	0,125	7,95829	14	0,1232
1,390	5,47069	19	1,3934	0,130	7,64893	20	0,1334
1,395	5,62968	25	1,3866	0,135	7,36235	26	0,1285
1,400	5,79788			0,140	7,09613		

x	y	№ вар	X _{инт}	x	y	№ вар	X _{инт}
0,150	6,61659	3	0,1564	0,180	5,61543	4	0,1838
0,155	6,39989	9	0,1615	0,185	5,46693	10	0,1875
0,160	6,19658	15	0,1632	0,190	5,32634	16	0,1944
0,165	6,00551	21	0,1634	0,195	5,19304	22	0,1976
0,170	5,82558	27	0,1685	0,200	5,06649	28	0,2038
0,175	5,65583			0,205	4,94619		

x	y	№ вар	X _{инт}	x	y	№ вар	X _{инт}
0,210	4,83170	5	0,2121	1,415	0,888551	6	1,4179
0,215	4,72261	11	0,2165	1,420	0,889599	12	1,4258
0,220	4,61855	17	0,2232	1,425	0,890637	18	1,4396
0,225	4,51919	23	0,2263	1,430	0,891667	24	1,4236
0,230	4,42422	29	0,2244	1,435	0,892687	30	1,4315
0,235	4,33337			1,440	0,893698		

3. Рассчитать погрешности интерполяции для всех рассматриваемых случаев.

4. Сделать анализ полученных результатов и обосновать полученные решения, дать рекомендации по использованию рассмотренных методов.

3. Составить отчет о выполнении работы.

5. Содержание отчета о выполнении работы

1. Цель работы.
2. Постановка задачи.
3. Краткое описание рассматриваемых методов приближения функций.
4. Результаты вычислительного эксперимента.
5. Анализ полученных результатов и выводы об их соответствии теоретически ожидаемым.
6. Приложения.

6. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте постановку задачи приближения функций. Приведите примеры практического применения решения подобных задач.
2. Что собой представляет задача интерполяции и чем она отличается от задачи аппроксимации?
3. Приведите геометрическую интерпретацию этих задач.
4. Какие методы интерполяции Вы знаете?
5. Перечислите достоинства и недостатки известных Вам методов.
6. Как оценить точность решения задачи интерполяции различными методами?
7. Зависит ли точность полученных результатов интерполяции от равномерности размещения узлов интерполяции по числовой оси? Если да, то почему?
8. Что собой представляет задача экстраполяции функции? Чем она отличается от задачи интерполяции?

Библиографический список

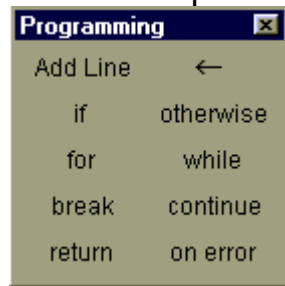
1. А.А., Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие./А.А. Амосов, Ю.А.Дубинский, Н.В. Копченова. – М.: Изд-во МЭИ, 2003.–596с.
2. Бахвалов А.С. Численные методы в задачах и упражнениях. / А.С. Бахвалов. – М.: Высш. шк., 2000.–190с.
3. Бахвалов А.С. Численные методы. Учебное пособие./А.П. Жидков, Г.М. Кобельков. 4-е изд. М.-СПб.: Физматлит, Невский диалект, Лаборатория базовых знаний, 2003. – 624с.
4. Воробьева Г.А. Практикум по вычислительной математике. / Г.А.Воробьева, А.Н.Данилова. – М.: Высш. шк., 1990.–208с.
5. Демидович Б.П. Численные методы анализа./ Б.П.Демидович, И.А.Марон, Э.З.Шувалова. – М.: Наука, 1967.–534с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Использование Mathcad для решения задачи интерполяции

В среде Mathcad решение задачи интерполяции может производиться путём написания соответствующих программных блоков, либо с использованием встроенных функций. Рассмотрим оба подхода к решению поставленной задачи.

А.1 Обзор программных операторов

В используемой версии MathCAD 2001 PRO возможности реализации программных блоков сосредоточены в наборной панели программных элементов



включаемой кнопкой  на панели Math.

Заметим, что возможность составлять программы реализована только в версии Professional. Все эти MathCAD-программы с точки зрения программиста представляют собой подпрограммы-функции, которые могут возвращать в качестве результата число, вектор или матрицу.

Функции могут вызывать сами себя (рекурсивно определенные функции) или другие подпрограммы-функции, определенные выше в том же MathCAD-документе.

При организации программного блока необходимо пользоваться командами панели **Symbolic** (символы), описание которых приведено ниже:

Команда	Функция	Пример
Add Line	Добавляет новую строку под/над (зависит от выделения) текущей строкой.	
	Присваивание значения локальной переменной.	$y \leftarrow 0$
if	Условный оператор (оператор ветвления) if. Условие должно стоять после if, а оператор, который выполняется, если выполнено заданное условие, - перед if.	$f(x) := \begin{cases} -x & \text{if } x < 0 \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$ $f(-3) = 3 \qquad f(4) = 4$
otherwise	Обозначает оператор, который должен быть исполнен, если условие оператора if не выполняется.	$f(x) := \begin{cases} -x & \text{if } x < 0 \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$ $f(-3) = 3 \qquad f(4) = 4$
for	Цикл for. За ключевым словом for следует переменная-счетчик, а после символа принадлежности вводится промежуток	$\text{Sum}(n) := \begin{cases} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ s \leftarrow s + i \end{cases}$ $\text{Sum}(4) = 10$

	изменения этой переменной. Внутренние операторы цикла сдвинуты немного вправо.	
while	Цикл while. Внутренние операторы цикла будут исполняться до тех пор, пока будет истинным условие, следующее за ключевым словом while. Пример показывает применение цикла для нахождения нулей функции методом касательных Ньютона.	$N(x, f, f_x) := \text{while } f(x) > 10^{-6}$ $x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f_x(x)}$ $N(2, \sin, \cos) = 3.142$
break	Служит для преждевременного завершения цикла, чтобы, например, избежать заикливания или слишком продолжительных вычислений.	break if $i \geq 10$
continue	Служит для преждевременного завершения текущей итерации цикла; сам цикл при этом продолжается.	continue if $x \geq 10$
return	Преждевременное завершение программы; указанное в ячейке значение будет возвращено.	return y
on error	Если при вычислении выражения expr2 возникла ошибка, вычисляется выражение expr1.	expr1 on error expr2

Приведем примеры простейших вариантов программных блоков, описывающих функции интерполяции рассмотренными методами.

В примерах, представленных ниже, x , y – векторы табличных значений аргумента и функции (узлы); xf – значение аргумента, при котором требуется вычислить значение функции.

А.2 Примеры реализации локальной интерполяции с использованием встроенных функций

В среде Mathcad для решения задачи локальной интерполяции есть соответствующий инструментарий: средства линейной интерполяции (функция **linterp**) и интерполяции сплайном (функция **interp**) – линейным (**lspline**), параболическим (**pspline**) и кубическим (**cspline**).

Функция **linterp(vx, vy, x)** использует векторы данных vx и vy , чтобы возвратить линейно интерполируемое значение y , соответствующее аргументу x .

Функции **lspline(vx, vy)**, **pspline(vx, vy)** и **cspline(vx, vy)** возвращают вектор коэффициентов вторых производных, который мы будем называть vs .

На рисунке А.1 приведён пример решения задачи линейной и кубической интерполяции для функции $f(x)=x^2 e^{-x}$ на отрезке $[0, 2.5]$ для шести узлов интерполяции. Векторы vx и vy задают табличное представление функции,

переменная z – служит для задания значений аргументов, для которых вычисляется значение интерполирующей функции.

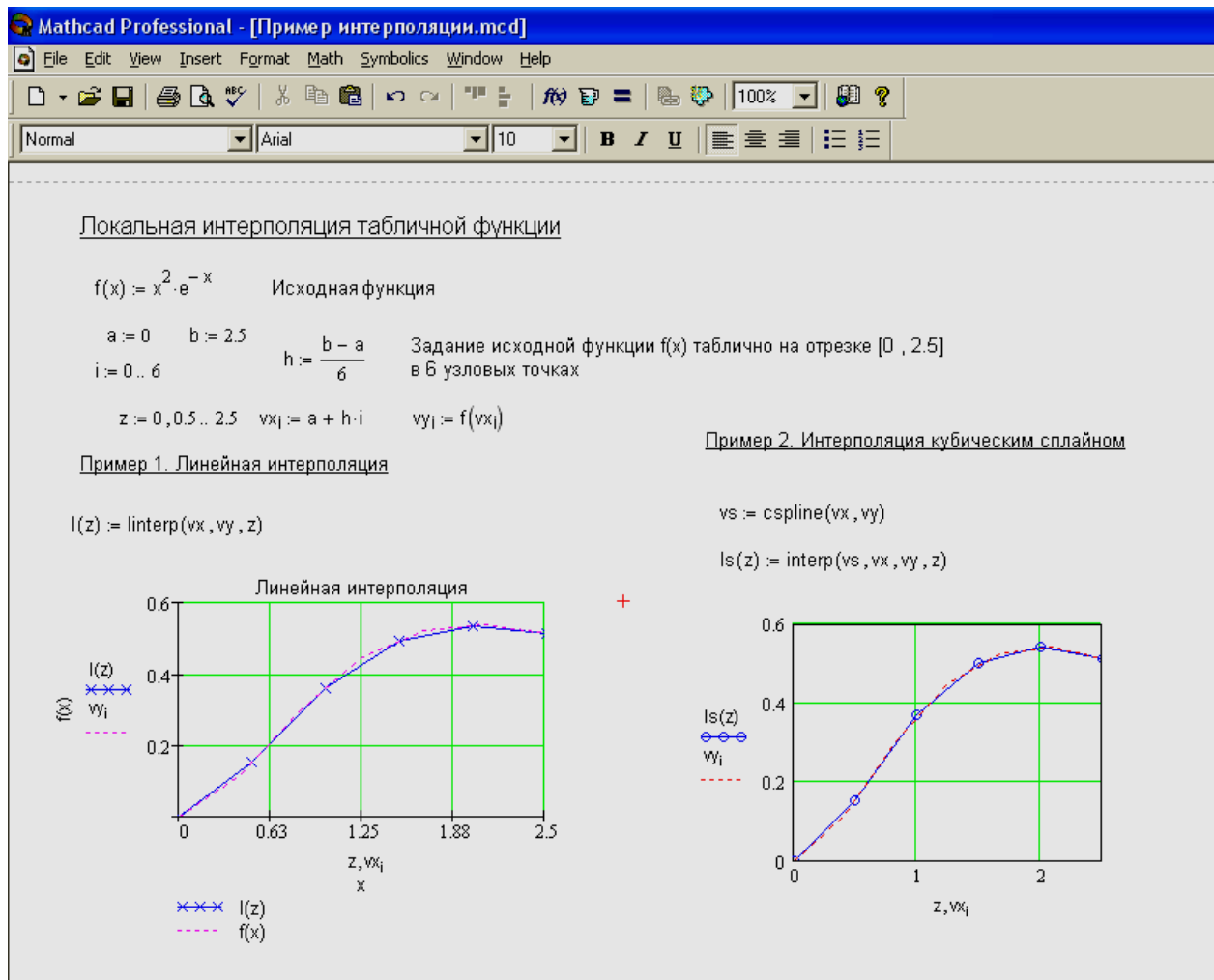


Рисунок А.1.– Примеры решения задачи локальной интерполяции.

А.3 Примеры решения задачи интерполяции с использованием формулы Лагранжа

А.3.1 Пример реализации вычислений по интерполяционной формуле Лагранжа на основе программного блока

Непосредственно в математических символах записать **интерполяционную формулу Лагранжа** проблематично из-за сложности вычисления произведений (в обоих случаях исключается один сомножитель), поэтому предлагается следующий программный блок:

```

ORIGEN:= 0
int_lagr(x,y,xf) :=
  n ← length(x)
  yf ← 0
  for i ∈ 0..n - 1
    p1 ← 1
    p2 ← 1
    for j ∈ 0..n - 1
      if i ≠ j
        p1 ← p1 · (xf - xj)
        p2 ← p2 · (xi - xj)
    yf ← yf + yi ·  $\frac{p1}{p2}$ 
  yf

```

Примечания:

- (1) Вставка вертикальной черты (новая строка программы) – клавиша «закрывающая квадратная скобка» `]`, либо кнопка **Add Line** на панели **Programming**;
- (2) Стрелка $\leftarrow$ служит оператором присваивания в теле программы, вводится клавишей «открывающая скобка» `{`, либо выбором кнопки со стрелкой на панели **Programming**.

В качестве аргументов функции **int_lagr** рассматриваются последовательности (массивы) **x** и **y** длиной **n**. Массив **x** интерпретируется как последовательность аргументов таблично задаваемой функции **y(x)**.

Переменная **xf** определяет аргумент (точку интерполяции), для которого необходимо вычислить значение интерполируемой функции с использованием многочлена Лагранжа.

Имена аргументов (**x**, **y**, **xf**) функции **int_lagr** называются формальными параметрами. При каждой конкретной реализации они могут быть заменены на фактические, т.е. на другие имена аналогичных объектов. Например, вместо массива **x** может быть использован массив с именем **τ**, вместо массива **y** – массив с именем **c**, а значение точки интерполяции может быть задано константой.

Пусть табличное представление функции задаётся массивами **τ** и **c**:

$$\tau := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 1.4 \\ 2.1 \\ 2.8 \\ 3.5 \\ 4.2 \\ 4.9 \\ 5.6 \\ 6.3 \\ 7.0 \\ 7.7 \\ 8.4 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} 0 \\ 3.199 \\ 3.654 \\ 3.131 \\ 2.385 \\ 1.703 \\ 1.167 \\ 0.778 \\ 0.508 \\ 0.326 \\ 0.207 \\ 0.101 \\ 0.056 \end{pmatrix}$$

Число элементов в задаваемых массивах **n=12**.

Результаты выполненных расчетов имеют вид:

а) вычисление функции в узле точно совпадает с табличным значением:

$$cr_1 := \text{int_lag}(\tau, c, 4.2) \quad cr_1 = 1.167$$

б) вычисление функции между узлами:

$$cr_2 := \text{int_lag}(\tau, c, 6.1) \quad cr_2 = 0.37$$

$$cr_3 := \text{int_lag}(\tau, c, 3) \quad cr_3 = 2.178$$

Однако интерполяция при большом числе узлов приводит к необходимости работать с многочленами высокой степени (например, 50-й или даже 100-й), что неприемлемо как с точки зрения вычислений, так и из-за склонности таких многочленов к осцилляции (колебаниям) между узлами сетки.

Поэтому на практике часто используют интерполяцию кусочными многочленами (или локальную интерполяцию). При локальной интерполяции между различными узлами выбираются различные многочлены невысокой степени.

А.4 Пример решения задачи интерполяции с использованием многочлена Ньютона

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблично с равноотстоящими значениями аргумента ($h_i = x_{i+1} - x_i = \text{const}$).

Для удобства работы в среде Маткад введем понятие и обозначения конечных разностей:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, (i = 0, 1, \dots, n-2)$$

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, (i = 0, 1, \dots, n-k)$$

С учетом введенных обозначений первая интерполяционная формула Ньютона имеет вид:

$$t = \frac{x - x_0}{h},$$

$$P_{n1}(x) = P_{n1}(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots \\ \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0.$$

Вторая интерполяционная формула имеет вид:

$$t = \frac{x - x_n}{h},$$

$$P_{n2}(x) = P_{n2}(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots \\ \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0.$$

Пример реализации интерполяции по методу Ньютона

$$z := a, a+0.1..b \quad h := x_1 - x_0$$

Вычисление конечных разностей:

$$n := 0..9 \quad k := 0..8 \quad m := 0..7 \quad s := 0..6 \quad \Delta y_n := y_{n+1} - y_n$$

$$\Delta^2 y_k := \Delta y_{k+1} - \Delta y_k \quad \Delta^3 y_m := \Delta^2 y_{m+1} - \Delta^2 y_m \quad \Delta^4 y_s := \Delta^3 y_{s+1} - \Delta^3 y_s$$

$\Delta y_n =$	$\Delta^2 y_k =$	$\Delta^3 y_m =$	$\Delta^4 y_s =$
0.112	-0.778	0.591	0.086
-0.665	-0.186	0.678	-0.86
-0.851	0.492	-0.183	-0.042
-0.36	0.309	-0.225	0.177
-0.051	0.084	-0.048	-0.03
0.033	0.036	-0.078	0.042
0.07	-0.042	-0.036	0.083
0.028	-0.077	0.048	
-0.049	-0.03		
-0.079			

Вычисление по первой интерполяционной формуле Ньютона (интерполирование вперед):

$$q(z) := \frac{z - x_0}{h}$$

$$d(z) := y_0 + q(z) \cdot \Delta y_0 + q(z) \cdot \frac{q(z) - 1}{2!} \cdot \Delta^2 y_0 + q(z) \cdot (q(z) - 1) \cdot \frac{q(z) - 2}{3!} \cdot \Delta^3 y_0 + q(z) \cdot (q(z) - 1) \cdot (q(z) - 2) \cdot \frac{q(z) - 3}{4!} \cdot \Delta^4 y_0$$

Вычисление по второй интерполяционной формуле Ньютона (интерполирование назад):

$$t(z) := \frac{z - x_{10}}{h}$$

$$g(z) := y_{10} + t(z) \cdot \Delta y_9 + t(z) \cdot \frac{t(z) + 1}{2!} \cdot \Delta^2 y_8 + t(z) \cdot (t(z) + 1) \cdot \frac{t(z) + 2}{3!} \cdot \Delta^3 y_7 + t(z) \cdot (t(z) + 1) \cdot (t(z) + 2) \cdot \frac{t(z) + 3}{4!} \cdot \Delta^4 y_6$$

$$\text{newton}(z) := \text{if} \left(\frac{x_0 + x_5}{2} - z > 0, d(z), g(z) \right)$$

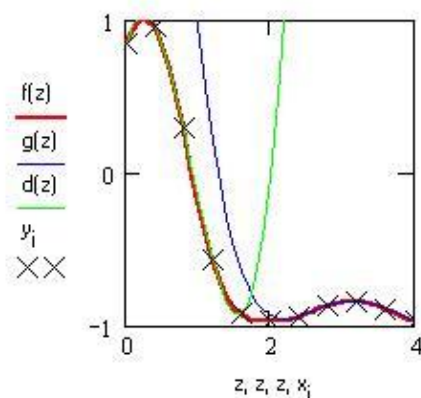


Рисунок А.2. – Пример решения задачи интерполяции с использованием первой и второй интерполяционной формул Ньютона.