

**Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный
технический университет**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторной работы №3
«Численное дифференцирование функций»
по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений»
для студентов направления подготовки «Компьютерная инженерия»
дневной формы обучения**

**Севастополь
2014**

УДК 519.61

Методические указания к выполнению лабораторной работы №3 «Численное дифференцирование функций» по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений» для студентов направления подготовки «Компьютерная инженерия» дневной формы обучения /Сост. Е.В. Козлова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2014.– 16с.

Цель методических указаний – методическая помощь в самостоятельном изучении разделов «Сглаживание наблюдений» и «Численное дифференцирование» дисциплины и выполнении лабораторной работы.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники (протокол № 11 от 25 июня 2014г.).

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Обжерин Ю.Е., доктор технических наук, зав. кафедрой высшей математики.

Ответственный за выпуск:

Брюховецкий А.А., кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой кибернетики и вычислительной техники.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Цель работы	3
2.	Основные теоретические положения и расчетные формулы	3
3.	Порядок выполнения лабораторной работы	7
4.	Примеры решения типовых задач	8
5.	Содержание отчета о выполнении работы	9
6.	Контрольные вопросы	9
	Библиографический список	9
	Приложение А. Образец оформления титульного листа отчета о выполнении лабораторной работы	10
	Приложение В. Варианты индивидуальных заданий для выполнения лабораторной работы	11
	Приложение С. Пример выполнения лабораторной работы	13

1. Цель работы

Целью данной лабораторной работы является овладение студентами практическими навыками применения простейших алгоритмов линейного и нелинейного сглаживания данных (функций, заданных табличным способом) и их численного дифференцирования, а также получение навыков проведения оценок полученных результатов относительно погрешностей и коэффициентов обусловленности.

2. Основные теоретические положения и расчетные формулы

Численное дифференцирование применяется тогда, когда функцию трудно или невозможно продифференцировать аналитически. Например, необходимость в численном решении задачи дифференцирования возникает в том случае, когда функция задана таблицей.

Чаще всего результаты измерений, рассматриваемые как исходные данные, для задач вычислительной математики содержат «экспериментальный шум» – случайные ошибки измеряемой величины. Важно устранить «шум» эксперимента, сохранив при этом информацию об истинной функции. «Экспериментальный шум» оказывает очень большое влияние на результаты численного дифференцирования. Даже относительно небольшие ошибки в измерении исходной величины $y=y(x)$ могут привести к большим ошибкам при вычислении ее производной. Важно понимать, что действительная причина подобного искажения результатов связана отнюдь не с несовершенством методов вычисления производных, а с тем обстоятельством, что сама процедура **численного дифференцирования приближенно заданной функции** является **плохо обусловленной**.

Поэтому при наличии случайных ошибок в исходных данных необходимо предварительно провести их предварительную обработку, а затем уже применять те или иные методы численного дифференцирования к «улучшенным» данным.

Для этой цели применяется процедура сглаживания эмпирических данных, т. е. замена исходной таблицы опытных измерений другой таблицей близких к ним значений функции, график которой является достаточно гладким.

При сглаживании чаще всего используется метод наименьших квадратов и аппроксимирующие многочлены различных степеней. Если используется многочлен первой степени, сглаживание называется **линейным**, в противном случае – **нелинейным**.

Число точек (пар значений аргумента и функции в исходной таблице) для сглаживания берут нечетным, а группы точек – «скользящими» вдоль всей таблицы.

Например, при линейном сглаживании по пяти значениям последовательность действий такова. Сначала выбираются первые пять значений функции из исходной таблицы: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$, по которым находится линейный

многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения, вычисляется значение этого многочлена $\tilde{y}_3(x_3)$ в средней точке и значение y_3 заменяется сглаженным значением $\tilde{y}_3$.

Затем выбирается следующая группа значений функции: $(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_6, y_6)$, и после соответствующих вычислений производится сглаживание среднего в данной группе значения y_4 (т. е. значение y_4 заменяется на $\tilde{y}_4$) и т. д.

После этого сглаживаются значения функции для двух первых и двух последних значений аргумента по особым (менее точным) формулам.

Линейное сглаживание по трем точкам приводит к формулам:

$$\tilde{y}_i = \frac{1}{3}(y_{i-1} + y_i + y_{i+1}), \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{6}(5y_1 + 2\tilde{y}_2 - \tilde{y}_3),$$

$$\tilde{y}_n = \frac{1}{6}(5y_n + 2\tilde{y}_{n-1} - \tilde{y}_{n-2}).$$

Формулы **линейного сглаживания по пяти точкам** имеют вид:

$$\tilde{y}_i = \frac{1}{5}(y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}), \quad i = 3, 4, \dots, n-2,$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{1}{10}(4y_1 + 3y_2 + 2\tilde{y}_3 + \tilde{y}_4),$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{5}(3y_1 + 2\tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 - y_5),$$

$$\tilde{y}_{n-1} = \frac{1}{10}(4y_n + 3y_{n-1} + 2\tilde{y}_{n-2} + \tilde{y}_{n-3}),$$

$$\tilde{y}_n = \frac{1}{5}(3y_n + 2\tilde{y}_{n-1} + \tilde{y}_{n-2} - \tilde{y}_{n-4}).$$

Формулы **нелинейного сглаживания** (многочленом третьей степени) по семи точкам имеют вид:

$$\tilde{y}_i = \frac{1}{21}(-2y_{i-3} + 3y_{i-2} + 6y_{i-1} + 7y_i + 6y_{i+1} + 3y_{i+2} - 2y_{i-3}), \quad i = 4, 5, \dots, n-3,$$

$$\tilde{y}_3 = \frac{1}{42}(-4y_1 + 16y_2 + 19y_3 + 12\tilde{y}_4 + 2\tilde{y}_5 - 4\tilde{y}_6 + \tilde{y}_7),$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{1}{42}(8y_1 + 19y_2 + 16\tilde{y}_3 + 6\tilde{y}_4 - 4\tilde{y}_5 - 7\tilde{y}_6 + 4\tilde{y}_7),$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{42}(39y_1 + 8\tilde{y}_2 - 4\tilde{y}_3 - 4\tilde{y}_4 + \tilde{y}_5 + 4\tilde{y}_6 - 2\tilde{y}_7),$$

$$\tilde{y}_{n-2} = \frac{1}{42}(-4y_n + 16y_{n-1} + 19y_{n-2} + 12\tilde{y}_{n-3} + 2\tilde{y}_{n-4} - 4\tilde{y}_{n-5} + \tilde{y}_{n-6})$$

$$\tilde{y}_{n-1} = \frac{1}{42}(8y_n + 19y_{n-1} + 16\tilde{y}_{n-2} + 6\tilde{y}_{n-3} - 4\tilde{y}_{n-4} - 7\tilde{y}_{n-5} + 4\tilde{y}_{n-6})$$

$$\tilde{y}_n = \frac{1}{42}(39y_n + 8\tilde{y}_{n-1} - 4\tilde{y}_{n-2} - 4\tilde{y}_{n-3} + \tilde{y}_{n-4} + 4\tilde{y}_{n-5} - 2\tilde{y}_{n-6}).$$

Применительно к экспериментальным данным задача численного дифференцирования наиболее просто решается в том случае, когда значения функции $y = y(x)$ измерены в равноотстоящих точках:

$$y_i = y(x_i), \quad x_i = x_1 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Требуется вычислить значения производной y'_i в тех же точках. Другими словами, по таблице функции с постоянным шагом h требуется составить таблицу ее производных с тем же шагом.

Наиболее часто при решении задачи численного дифференцирования применяются следующие формулы:

– формула центральной разностной производной

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad i=2, 3, \dots, n-1,$$

где в начальной и конечной точках применяются формулы односторонних производных

$$y'_1 = \frac{-3y_1 + 4y_2 - y_3}{2h}, \quad y'_n = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}.$$

Эти формулы имеют **второй порядок точности** по h .

- формулы четвертого порядка точности для равноотстоящих точек X_i имеют вид:

$$y'_i = \frac{y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}}{12h}, \quad i = 3, 4, \dots, n-2,$$

$$y'_1 = \frac{-25y_1 + 48y_2 - 36y_3 + y_4 - 3y_5}{12h},$$

$$y'_2 = \frac{-19y_1 - y_2 + 12y_3 + 13y_4 - 5y_5}{42h},$$

$$y'_{n-1} = \frac{19y_n + y_{n-1} - 12y_{n-2} - 13y_{n-3} + 5y_{n-4}}{42h},$$

$$y'_n = \frac{25y_n - 48y_{n-1} + 36y_{n-2} - y_{n-3} + 3y_{n-4}}{12h}.$$

- формулы, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} (\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12} \Delta^4 y_0 + \\ + \frac{5q^4-40q^3+105q^2-100q+24}{120} \Delta^5 y_0 + \dots),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 + (q-1) \Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12} \Delta^4 y_0 + \frac{2q^3-12q^2+21q-10}{12} \Delta^5 y_0 + \dots),$$

$$\text{где } q = \frac{(x-x_0)}{h}, \quad h = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$\Delta^i y_0$ – конечная разность i -го порядка, причем

$$\Delta^i y_0 = \Delta^{i-1} y_1 - \Delta^{i-1} y_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

- формулы, основанные на первой формуле Гаусса:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} (\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{2q^3-3q^2-q+1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \dots),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_{-1} + q \Delta^3 y_{-1} + \frac{6q^2-6q+1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \dots);$$

- формулы, основанные на второй формуле Гаусса:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} (\Delta y_{-1} + \frac{2q+1}{2} \Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{6} \Delta^3 y_{-2} + \frac{2q^3+3q^2-q-1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \dots),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_{-1} + q \Delta^3 y_{-2} + \frac{6q^2-6q+1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \dots);$$

- формулы, основанные на формуле Стирлинга:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} (\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + q \Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{6} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \frac{2q^3}{12} \Delta^4 y_{-2} + \dots),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_{-1} + q \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{6q^2-1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \dots);$$

- формулы, основанные на формуле Бесселя:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} (\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3q^2 - 3q + \frac{1}{2}}{6} \Delta^3 y_{-1} + \\ + \frac{2q^3 - 3q^2 - q + 1}{12} \cdot \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \dots), \\ y''(x) \approx \frac{1}{h^2} (\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{2q-1}{2} \Delta^3 y_{-1} + \frac{6q^2 - 6q - 1}{12} \cdot \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} \dots);$$

Под **обусловленностью** вычислительной задачи понимают чувствительность ее решения к малым изменениям погрешностей исходных данных.

Задачу называют **хорошо обусловленной**, если малым погрешностям исходных данных отвечают малые погрешности решения, и **плохо обусловленной**, если возможны существенные изменения решения.

Мерой степени обусловленности вычислительной задачи является **число обусловленности**. Эту величину можно интерпретировать как коэффициент возможного возрастания погрешностей в решении по отношению к вызвавшим их погрешностям входных данных.

Пусть между абсолютными погрешностями исходных данных x и решения y установлено неравенство:

$$\Delta(y^*) \leq \nu_{\Delta} \cdot \Delta(x^*).$$

Тогда величина ν_{Δ} называется **абсолютным числом обусловленности**.

Если же установлено неравенство:

$$\delta(y^*) \leq \nu_{\delta} \cdot \delta(x^*),$$

то величину ν_{δ} называют **относительным числом обусловленности**.

Для **плохо** обусловленной задачи $\nu > 1$.

Несмотря на внешнюю простоту формул численного дифференцирования, их применение требует особой осторожности. Используемые при численном дифференцировании приближенные значения $y^*(x)$ функции $y(x)$ непременно содержат ошибки измерения или вычисления. Поэтому к погрешности аппроксимации формул численного дифференцирования добавляется неустраняемая погрешность, вызванная погрешностями вычисления (измерения) функции y .

Для того чтобы погрешность приближения функции была достаточно малой, требуется использование таблиц с **малым** шагом h . Однако при малых значениях шага h формулы численного дифференцирования становятся плохо обусловленными.

Поясним это на примере.

Полная погрешность для простейшей формулы численного дифференцирования (первой разностной производной $y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$) равна:

$$r^*(x, h) = y'(x) - \frac{y^*(x) - (y^*(x+h) - y^*(x))}{h}$$

и представляет собой сумму погрешности аппроксимации

$$r_A(x, h) = y'(x) - \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

и неустраняемой погрешности

$$r_H(x, h) = \frac{[y(x+h) - y^*(x+h)] - [y(x) - y^*(x)]}{h}.$$

Если $\bar{\Delta}$ – верхняя граница абсолютной погрешности $\Delta(y^*(x)) = |y(x) - y^*(x)|$ при вычислении функции $y(x)$.

Тогда неустраняемая погрешность оценивается как

$$|r_n(h)| \leq \frac{2 \times \bar{\Delta}}{h}$$

Эта оценка означает, что абсолютное число обусловленности $v_{\Delta}=2/h$, и так как $v_{\Delta} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$, исследуемая формула численного дифференцирования при малых значениях h становится плохо обусловленной.

Формулы для вычисления производных порядка $k>1$ обладают еще большей чувствительностью к ошибкам задания функций.

3. Порядок выполнения лабораторной работы

Постановка задачи.

Имеется ряд экспериментальных измерений функции $y = y(x)$ в равноотстоящих узлах x_i . Результаты измерений содержат «экспериментальный шум» - случайные ошибки существенной величины.

Требуется:

1. Изучить раздел 2 настоящих методических указаний.
2. В соответствии с вариантом индивидуального задания (Приложение В, таблица В1) произвести сглаживание результатов измерений, представленных таблично. Для этого использовать алгоритмы линейного и нелинейного сглаживания.
3. Выполнить численное дифференцирование для исходных и сглаженных данных, используя формулы численного дифференцирования в соответствии с вариантом индивидуального задания.
4. Для заданных формул численного дифференцирования вычислить коэффициенты обусловленности, сравнить полученные значения и сделать рекомендации по применению соответствующих методов.
5. Определить оптимальное значение шага численного дифференцирования для достижения заданного значения точности решения. Сравнить полученное значение оптимального шага с заданным шагом аргумента в табличном представлении функции и сделать соответствующие рекомендации по изменению процедуры проведения последующих измерений значений функции.
6. Сделать **развёрнутый** анализ полученных результатов.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
2. Из таблицы В1 введите исходные данные и разместите их в массивах (x), (y).
3. Используя алгоритм линейного сглаживания данных по трем точкам, постройте таблицу сглаженных данных; изобразите на одном графике исходные (y) и сглаженные данные.
4. Проведите линейное сглаживание данных по пяти точкам, постройте графики исходных и сглаженных данных.
5. Используя алгоритм нелинейного сглаживания по семи точкам, постройте таблицу сглаженных данных; изобразите на одном графике исходные и сглаженные данные.
6. Сравните (графически) качество сглаживания с использованием линейного и нелинейного алгоритмов.
7. Проведите сглаживание данных с использованием встроенных функций системы Mathcad – **medsmooth(y,m)** и **supsmooth(x,y)**; сравните эти результаты с результатами, полученными ранее. **medsmootht(y,m)** – возвращает m-мерный вектор, созданный сглаживанием y с помощью скользящей медианы, y есть m-мерный вектор вещественных чисел, n — ширина окна, по которому происходит сглаживание. m должно быть нечетным числом меньшим, чем число элементов в y. **supsmooth(x,y)** – возвращает n-мерный вектор, созданный локальным использованием симметричной линейной процедуры сглаживания методом наименьших квадратов по правилу k-

- ближайших соседей, в которой k выбирается адаптивно, y и x есть n -мерные векторы вещественных чисел. Элементы x должны быть расположены в порядке возрастания.
8. Используя формулы второго порядка точности, выполните численное дифференцирование исходных и сглаженных данных. Сравните полученные результаты с производной «незашумленной» функции.
 9. Выполните дифференцирование, используя различные шаги; сравните результаты.
 10. Используя формулы четвертого порядка точности, выполните численное дифференцирование данных, сглаженных различными алгоритмами; сравните результаты.
 11. Сохраните рабочий документ.

4. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Определить абсолютное число обусловленности для следующей формулы численного дифференцирования:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} (\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6} \Delta^3 y_0),$$

$$\text{где } q = \frac{(x - x_0)}{h}, \quad h = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Значения дифференцируемой функции $y(x)$ заданы с предельной абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-3}$ и $h = 0,05$.

Решение задачи 1.

В соответствии с правилом учета абсолютных погрешностей при выполнении алгебраического суммирования можно утверждать, что абсолютная погрешность при вычислении конечной разности первого порядка Δy_0 не превышает 2ε .

Так как конечная разность второго порядка в узле x_0 вычисляется как

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,$$

то её абсолютная погрешность не превышает величины $2(2\varepsilon) = 4\varepsilon$.

Аналогично, абсолютная погрешность при вычислении конечной разности третьего порядка не превышает величины $2(2(2\varepsilon)) = 8\varepsilon$.

Таким образом, погрешность вычисления первой производной по предложенной формуле удовлетворяет неравенству:

$$\Delta(y'(x)) \leq \frac{1}{h} (\Delta(\Delta y_0) + \Delta(\frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0) + \Delta(\frac{3q^2 - 6q + 2}{6} \Delta^3 y_0)),$$

$$\text{то есть } \Delta(y'(x)) \leq \frac{1}{h} (2\varepsilon + 4\varepsilon + 8\varepsilon) = \frac{14}{h} \varepsilon = \frac{14}{0,05} \varepsilon = 280\varepsilon.$$

Коэффициент, связывающий погрешность результата вычисления первой производной $\Delta(y'(x))$ и погрешность представления исходных данных ε , является абсолютным числом обусловленности (ν_Δ) решения данной задачи численного дифференцирования. Его значение равно $280 \gg 1$, что свидетельствует о плохой обусловленности этой задачи.

Задача 2.

В условиях задачи 1 определить, каким должен быть оптимальный шаг дифференцирования, и является ли заданный шаг изменения аргумента ($h = 0,05$) таблицы значений дифференцируемой функции близким к оптимальному.

Решение задачи 2.

Оценка максимальной погрешности интерполяции исходной функции на всем отрезке дифференцирования $[a, b]$ для четырёх узлов интерполяции ($n=3$) удовлетворяет условию:

$$\max_{[a,b]}(\Delta_{\text{инт}}) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |W_n(x)| = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1},$$

где $M_{n+1} = \max_{[a,b]} f^{(n+1)}(x)$.

Полная погрешность для формулы в задаче 1 представляет собой сумму вычислительной погрешности и погрешности интерполяции на интервале дифференцирования и не превосходит величины:

$$\varepsilon_1(h) = \frac{14\varepsilon}{h} + \frac{h^4}{24} \overline{M}_4.$$

Минимизация по h функции $\varepsilon_1(h)$ приводит к следующей формуле для вычисления оптимального значения шага дифференцирования:

$$h = h_{\text{оптим}} = \left(\frac{14\varepsilon \times 24}{4\overline{M}_4} \right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{84\varepsilon}{\overline{M}_4} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

Вычислив максимальное значение производной четвёртого порядка (используя простейшие формулы численного дифференцирования) для заданного представления исходной функции, можно легко получить значение оптимального шага численного дифференцирования для заданной постановки задачи.

5. Содержание отчета о выполнении работы

1. Цель работы.
2. Постановка задачи.
3. Краткое описание рассматриваемых методов сглаживания и численного дифференцирования функций.
4. Анализ обусловленности задач численного дифференцирования.
5. Определение оптимального шага для решения задачи численного дифференцирования предложенным методом.
6. Результаты вычислительного эксперимента.
7. Анализ полученных экспериментальных результатов и выводы об их соответствии теоретически ожидаемым.
8. Приложения.

6. Контрольные вопросы

1. Зачем необходимо производить сглаживание наблюдений?
2. Какие алгоритмы сглаживания Вы знаете?
3. Сформулируйте постановку задачи численного дифференцирования.
4. Какие простейшие формулы численного дифференцирования Вы знаете?
5. Дайте определение понятию «хорошо обусловленная задача». Является ли задача численного дифференцирования хорошо обусловленной?
6. Как вычислить абсолютное число обусловленности для заданного метода численного дифференцирования?
7. Как выбрать оптимальный шаг численного дифференцирования?

Библиографический список

1. А.А., Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие./А.А. Амосов, Ю.А.Дубинский, Н.В. Копченова. – М.: Изд-во МЭИ, 2003.–596с.
2. Бахвалов А.С. Численные методы в задачах и упражнениях. / А.С. Бахвалов. – М.: Высш. шк., 2000.–190с.
3. Бахвалов А.С. Численные методы. Учебное пособие./А.П. Жидков, Г.М. Кобельков. 4-е изд. М.-СПб.: Физматлит, Невский диалект, Лаборатория базовых знаний, 2003. – 624с.
4. Воробьева Г.А. Практикум по вычислительной математике. / Г.А.Воробьева, А.Н.Данилова. – М.: Высш. шк., 1990.–208с.
5. Демидович Б.П. Численные методы анализа./ Б.П.Демидович, И.А.Марон, Э.З.Шувалова. – М.: Наука, 1967.–534с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А Образец оформления титульного листа отчета о выполнении лабораторной работы

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра кибернетики и
вычислительной техники

ОТЧЁТ

о выполнении лабораторной работы № 3
на тему: «Численное дифференцирование»
по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений»
№ варианта **xx**

Выполнил: студент(ка) гр. М-XXЗ

xxxxxxxxxx x.x.

Проверила: Козлова Е.В.

Севастополь

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Варианты индивидуальных заданий**Таблица В1.**

№ вар	Коды методов численного дифференцирования	№ вар	Коды методов численного дифференцирования	№ вар	Коды методов численного дифференцирования
1	1, 2	11	1, 4	21	1, 2
2	2, 3	12	2, 5	22	2, 3
3	3, 4	13	3, 6	23	3, 4
4	4, 5	14	4, 2	24	4, 5
5	5, 6	15	5, 3	25	5, 1
6	1, 7	16	1, 5	26	1, 3
7	2, 4	17	2, 1	27	4, 3
8	3, 5	18	3, 2	28	2, 6
9	4, 1	19	4, 7	29	3, 7
10	5, 2	20	5, 4	30	5, 6

В таблице В1.использованы следующие коды методов численного дифференцирования, основанные:

1– на первой интерполяционной формуле Ньютона; 2– на первой формуле Гаусса; 3– на второй формуле Гаусса; 4– на формуле Стирлинга; 5– на формуле Бесселя; 6– на формуле первой разностной производной; 7– на формуле центрально-разностной производной.

Таблица В2

Варианты 1, 11,21		Варианты 2,12,22		Варианты 3,13,23		Варианты 4,14,24		Варианты 5,15,25	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1.415	0.888551	0.101	1.26183	0.180	5.61543	3.50	33.1154	0.115	8.65729
1.420	0.889599	0.106	1.27644	0.185	5.46693	3.55	34.8133	0.120	8.29329
1.425	0.990637	0.111	1.29122	0.190	5.32634	3.60	36.5982	0.125	7.95829
1.430	0.891667	0.116	1.27617	0.195	5.190304	3.65	36.4747	0.130	7.64893
1.435	0.892687	0.121	1.32130	0.200	5.16649	3.70	40.4473	0.135	7.36235
1.440	0.993698	0.126	1.33660	0.205	4.94619	3.75	42.5211	0.140	7.09613
1.445	0.894700	0.131	1.35207	0.210	4.83170	3.80	44.7012	0.145	6.84815
1.450	0.895693	0.136	1.36773	0.215	4.72261	3.85	46.9931	0.150	6.61659
1.455	0.90677	0.141	1.38357	0.220	4.61855	3.90	49.4024	0.155	6.39986
1.460	0.897653	0.146	1.39959	0.225	4.51919	3.95	51.9354	0.160	6.19658
1.465	0.898619	0.151	1.41579	0.230	4.42422	4.00	54.5982	0.165	6.00551
1.470	0.898602	0.156	1.42244	0.235	4.33337	4.05	57.3975	0.170	6.82558
1.475	0.897553	0.161	1.26183	0.240	4.61543	4.10	63.1154	0.175	7.65729
1.480	0.918619	0.166	1.37644	0.245	4.46693	4.15	64.8133	0.180	8.29329
1.485	0.898602	0.171	1.39122	0.250	3.32634	4.20	66.5982	0.185	7.95829
1.490	0.928602	0.176	1.39617	0.255	3.590304	4.25	68.4747	0.190	7.64893
1.495	0.888551	0.181	1.32130	0.260	4.06649	4.30	70.4473	0.195	7.36235
1.500	0.889599	0.186	1.26183	0.265	4.94619	4.35	82.5211	0.200	6.99613
1.505	0.890637	0.191	1.28644	0.270	4.83170	4.40	84.7012	0.205	6.84815
1.510	0.891667	0.196	1.29122	0.275	4.72261	4.45	86.9931	0.210	6.61659
1.515	0.892687	0.201	1.30617	0.280	4.61855	4.50	89.4024	0.215	5.39986
1.520	0.913698	0.206	1.32130	0.285	4.83170	4.55	91.9354	0.220	3.19658
1.525	0.894700	0.211	1.33660	0.290	4.72261	4.60	93.5982	0.225	3.00551
1.530	0.895693	0.216	1.53660	0.295	4.61855	4.65	97.3975	0.230	2.82558

Варианты 6.16.26		Варианты 7.17.27		Варианты 8.18.28		Варианты 9. 19.29		Варианты 10.20.30	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1.340	4.25562	0.01	0.991824	0.15	4.4817	0.45	19.1946	0.15	0.860708
1.345	4.35325	0.06	0.95193	0.16	4.9530	0.46	19.3300	0.20	0.818731
1.350	4.45522	0.11	0.913650	0.17	5.4739	0.47	18.9425	0.25	0.778801
1.355	4.56184	0.16	0.876905	0.18	6.0496	0.48	18.1746	0.30	0.740818
1.360	4.67344	0.21	0.841638	0.19	6.6859	0.49	17.3010	0.35	0.704688
1.365	4.79038	0.26	0.807789	0.20	7.3891	0.50	16.3123	0.40	0.670320
1.370	4.71306	0.31	0.775301	0.21	8.1662	0.51	15.1984	0.45	0.937628
1.375	5.04192	0.36	0.844120	0.22	9.0250	0.52	13.9484	0.50	0.506531
1.380	5.17744	0.41	0.714193	0.23	9.9742	0.53	12.5508	0.55	0.576950
1.385	5.32016	0.46	0.685470	0.24	11.0232	0.54	10.9937	0.60	0.548812
1.390	5.57069	0.51	0.657902	0.25	12.1825	0.55	9.2647	0.65	0.522046
1.395	5.62968	0.56	0.631442	0.26	13.4637	0.56	7.3510	0.70	0.500023
1.400	5.25562	0.61	0.791824	0.27	13.4817	0.57	9.1946	0.75	0.660708
1.410	4.35325	0.66	0.95193	0.28	14.9530	0.58	10.33	0.80	0.618731
1.415	5.45522	0.71	0.813650	0.29	15.4739	0.59	8.9425	0.85	0.778801
1.420	5.56184	0.76	0.876905	0.30	16.0496	0.60	8.1746	0.90	0.740818
1.425	4.67344	0.81	0.841638	0.31	16.6859	0.61	7.3010	0.95	0.704688
1.430	4.79038	0.86	0.807789	0.32	17.3891	0.62	6.3123	1.00	0.670320
1.435	4.91306	0.91	0.675301	0.33	18.1662	0.63	5.1984	1.05	0.637628
1.440	5.04192	0.96	0.744120	0.34	19.0250	0.64	3.9484	1.10	0.626531
1.445	5.17744	1.01	0.714193	0.35	19.9742	0.65	2.5508	1.15	0.576950
1.450	4.32016	1.06	0.685470	0.36	20.0232	0.66	1.9937	1.20	0.548812
1.455	5.47069	1.11	0.657902	0.37	21.1825	0.67	0.2647	1.25	0.522046
1.460	5.62968	1.16	0.631442	0.38	22.4637	0.68	0.3510	1.30	0.500023

Приложение С. Пример выполнения лабораторной работы

ORIGIN:= 1

x:=READPRN("C:\lab3 x.txt")

Ввод аргументов функции

y:=READPRN("C:\lab3 y.txt")

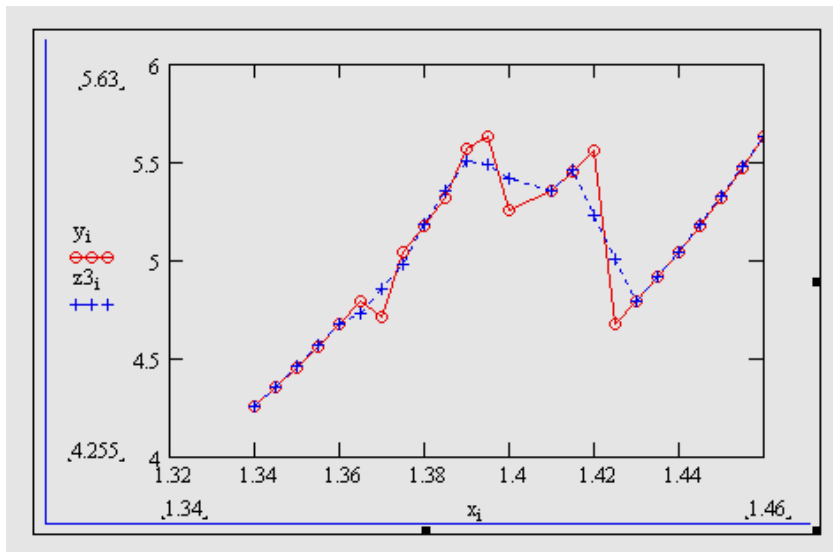
Ввод значений функции

n:=length(y) i:=2..n-1

Сглаживание по трём точкам

$$z3_1 := \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3} \quad z3_1 := \frac{5 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 - y_3}{6} \quad z3_n := \frac{5 \cdot y_n + 2 \cdot y_{n-1} - y_{n-2}}{6}$$

i:=1..n



Линейное сглаживание по пяти точкам

i:=3..n-2

$$z5_1 := \frac{y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{5}$$

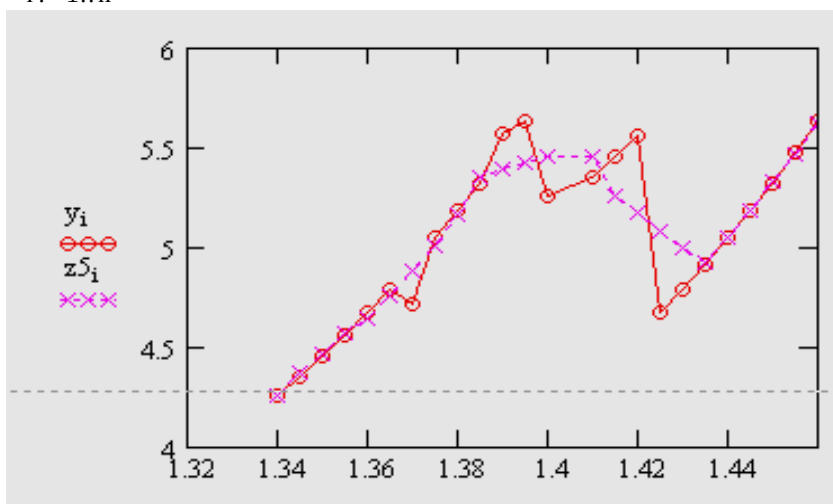
$$z5_2 := \frac{4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 + y_4}{10}$$

$$z5_1 := \frac{3 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + y_3 - y_5}{5}$$

$$z5_{n-1} := \frac{4 \cdot y_n + 2 \cdot y_{n-1} + 3 \cdot y_{n-2} + y_{n-3}}{10}$$

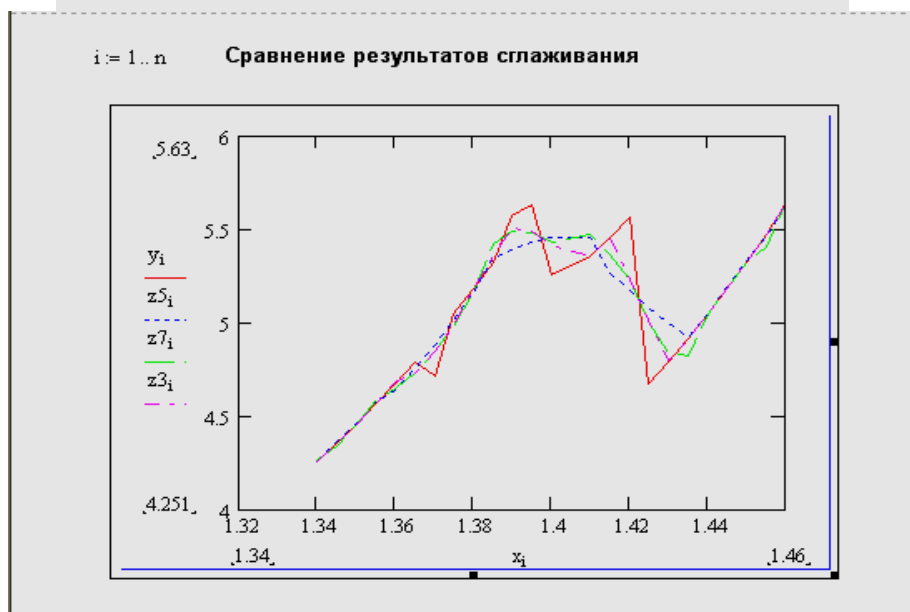
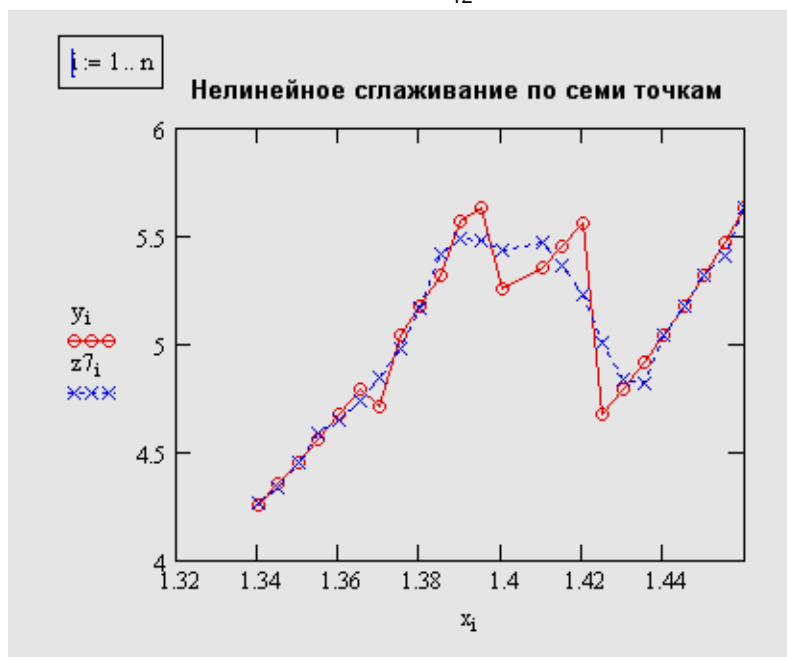
$$z5_n := \frac{3 \cdot y_n + 2 \cdot y_{n-1} + y_{n-2} - y_{n-4}}{5}$$

i:=1..n



Нелинейное сглаживание по семи точкам

$$\begin{aligned}
 i &:= 4..n-3 \\
 z7_i &:= \frac{-2y_{i-3} + (3y)_{i-2} + (6y)_{i-1} + (7y)_i + (6y)_{i+1} + (3y)_{i+2} - 2y_{i+3}}{21} \\
 z7_3 &:= \frac{-4y_1 + 16y_2 + 19y_3 + 12y_4 + 2y_5 - 4y_6 + y_7}{42} \\
 z7_2 &:= \frac{8y_1 + 19y_2 + 16y_3 + (6y)_4 - 4y_5 - 7y_6 + (4y)_7}{42} \\
 z7_1 &:= \frac{39y_1 + 8y_2 - 4y_3 - 4y_4 + y_5 + 4y_6 - (2y)_7}{42} \\
 z7_{n-2} &:= \frac{-4y_n + 16y_{n-1} + 19y_{n-2} + 12y_{n-3} + 2y_{n-4} - 4y_{n-5} + y_{n-6}}{42} \\
 z7_{n-1} &:= \frac{8y_n + 19y_{n-2} + 16y_{n-2} + (6y)_{n-3} - 4y_{n-4} - 7y_{n-5} + (4y)_{n-6}}{42} \\
 z7_n &:= \frac{39y_n + 8y_{n-1} - 4y_{n-2} - 4y_{n-3} + y_{n-4} + 4y_{n-5} - (2y)_{n-6}}{42}
 \end{aligned}$$



Численное дифференцирование

Производная, вычисленная по исходным (dy) и сглаженным (dz3) данным по формулам второго порядка точности

$$h := x_2 - x_1 \quad i := 2..n-1$$

$$dy_1 := \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad dy_1 := \frac{-3 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 - y_3}{2h} \quad dy_n := \frac{-3 \cdot y_n - 4 \cdot y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}$$

$$dz3_i := \frac{z^3_{i+1} - z^3_{i-1}}{2h} \quad dz3_1 := \frac{-3 \cdot z^3_1 + 4 \cdot z^3_2 - z^3_3}{2h} \quad dz3_n := \frac{-3 \cdot z^3_n - 4 \cdot z^3_{n-1} + z^3_{n-2}}{2h}$$

