



**Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный
технический университет**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторной работы №4
«Численное интегрирование функций»
по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений»
для студентов направления подготовки «Компьютерная инженерия»
дневной формы обучения**

**Севастополь
2014**

УДК 519.61

Методические указания к выполнению лабораторной работы №3 «Численное интегрирование функций» по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений» для студентов направления подготовки «Компьютерная инженерия» дневной формы обучения /Сост. Е.В. Козлова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2014.– 8с.

Цель методических указаний – методическая помощь в самостоятельном изучении раздела «Численное интегрирование» дисциплины и выполнении лабораторной работы.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники (протокол № 11 от 25 июня 2014г.).

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Обжерин Ю.Е., доктор технических наук, зав. кафедрой высшей математики.

Ответственный за выпуск:

Брюховецкий А.А., кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой кибернетики и вычислительной техники.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Цель работы	3
2.	Основные теоретические положения и расчетные формулы	3
3.	Порядок выполнения лабораторной работы	5
4.	Содержание отчета о выполнении работы	6
5.	Контрольные вопросы	6
	Приложение А. Варианты индивидуальных заданий для выполнения лабораторной работы	7

1. Цель работы

Целью данной лабораторной работы является овладение студентами практическими навыками применения алгоритмов численного интегрирования, а также получение навыков проведения оценок полученных результатов.

2. Основные теоретические положения и расчетные формулы

В прикладных исследованиях часто возникает необходимость вычисления значений определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ – заданная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ задана аналитически и ее первообразную $F(x)$ можно выразить через известные функции, то для вычисления интеграла (1) можно воспользоваться формулой Ньютона – Лейбница:

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b). \quad (2)$$

К сожалению, в подавляющем большинстве случаев получить значение определенного интеграла с помощью формулы (2) или других аналитических методов не удастся, например, когда функция $y=f(x)$ задается таблицей своих значений или графически. В таких случаях для вычисления определённого интеграла применяют приближённые формулы.

Идея приближённого вычисления интеграла состоит в следующем. Подынтегральную функцию $y=f(x)$ заменяют достаточно близкой к ней функцией $y=f_1(x)$ такой, что интеграл от этой функции можно вычислить сравнительно легко. Интеграл $\int_a^b f(x) dx$ заменяется интегралом $\int_a^b f_1(x) dx$ и его значение принимается за приближенное значение искомого интеграла.

Применительно к экспериментальным данным задача численного интегрирования наиболее просто решается в том случае, когда значения функции $f=f(x)$ измерены в равноотстоящих точках: $f_i=f(x_i)$, $x_i=x_1+ih$, $i=1, 2, \dots, n$.

Наиболее часто при решении задачи численного интегрирования применяются следующие формулы:

а) формулы прямоугольников.

Пусть отрезок интегрирования $[a, b]$ разбит на n частей с шагом $h = \frac{(b-a)}{n}$.

Тогда простейшие формулы численного интегрирования имеют вид:

– формула левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad (3)$$

–формула правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (4)$$

–формула средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \quad (5)$$

где $x_i = a + i \cdot h$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Остаточные члены этих формул соответственно равны

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi), \\ R_n(f) &= -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi), \\ R_n(f) &= \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

где $a \leq \xi \leq b$.

б) формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right), \quad (7)$$

где $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$),

причем $R_n(f) = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$, $a \leq \xi \leq b$;

в) формула Симпсона (число узлов n обязательно четное):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})], \quad (8)$$

причем $R_n(f) = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{IV}(\xi)$, $a \leq \xi \leq b$

г) формула Ньютона-Котеса для многочлена степени k :

$$\int_{x_0}^{x_i} f(x)dx \approx B_k h \sum_{i=0}^k a_i^{(k)} f(x_i) + r_k(h) \quad (9)$$

где $x_i = x_0 + i \cdot h$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), $x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Коэффициенты B_k , $a_i^{(k)}$ и остаточные члены $r_k(h)$ определяют заранее и для них составлена таблица 1:

Таблица 1. Параметры некоторых частных формул Ньютона-Котеса

k	B _k	a ^(k) ₀	a ^(k) ₁	a ^(k) ₂	a ^(k) ₃	a ^(k) ₄	a ^(k) ₅	r _k (h)
1	1/2	1	1					$-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$
2	1/3	1	4	1				$-\frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi)$
3	3/8	1	3	3	1			$-\frac{3h^5}{80}f^{IV}(\xi)$
4	2/45	7	32	12	32	7		$-\frac{8h^7}{945}f^{VI}(\xi)$
5	5/288	19	75	50	50	75	19	$-\frac{275h^7}{12096}f^{VI}(\xi)$
6	1/140	41	216	27	272	27	216	$-\frac{9h^9}{1400}f^{VIII}(\xi)$
7	7/17280	751	3577	1323	2989	2989	1323	$-\frac{8183h^9}{518400}f^{VIII}(\xi)$
8	4/14175	989	5888	-928	10496	-4540	10496	
9	9/89600	2857	15741	1080	19344	5778	5778	
10	5/299376	16067	106300	-48525	272400	-260550	427368	

д) формула Гаусса:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n)], \quad (10)$$

где $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$

Значения t_i, C_i берутся из таблицы 2:

Таблица 2 Узлов и весов квадратурной формулы Гаусса

n	i	t _i	C _i
1	1	t ₁ =0	C ₁ =2
2	1,2	t _{1,2} =±0,577350	C ₁ =C ₂ =1
3	1,3 2	t _{1,3} =±0,774597 t ₂ =0	C ₁ =C ₃ =5/9=0,555556 C ₂ =8/9=0,888889
4	1,4 2,3	t _{1,4} =±0,861136 t _{2,3} =0,339981	C ₁ =C ₄ =0,347855 C ₂ =C ₃ =0,652145
5	1,5 2,4 3	t _{1,5} =±0,906180 t _{2,4} =±0,538469 t ₃ =0	C ₁ =C ₅ =0,236927 C ₂ =C ₄ =0,478629 C ₃ =0,568889

3. Порядок выполнения лабораторной работы

Постановка задачи.

Имеется ряд экспериментальных измерений функции $f=f(x)$ в равноотстоящих узлах x_i . Требуется:

1. Изучить раздел 2 настоящих методических указаний.
2. В соответствии с вариантом индивидуального задания (Приложение А, таблица А1) произвести с использованием средств системы Маткад численное интегрирование таблично заданной функции.
3. Для заданных формул численного интегрирования оценить погрешности полученных результатов и сделать рекомендации по применению соответствующих методов.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Присвойте переменной ORIGIN значение равное единице.
2. Из таблицы А2 введите исходные данные и разместите их в массивах (x), (f)
3. Используя предлагаемые методы (таблица А1) выполните численное интегрирование заданной функции.
4. Сравните полученные результаты для рассматриваемых методов и сделайте выводы.
5. Проведите анализ методической и вычислительной погрешностей решения задачи численного интегрирования предложенными методами
6. Оформите отчет.

5. Содержание отчета о выполнении лабораторной работы

1. Цель работы.
2. Постановка задачи.
3. Краткое описание рассматриваемых методов численного интегрирования функций.
4. Анализ методической и вычислительной погрешностей решения задачи численного интегрирования предложенными методами.
5. Результаты вычислительного эксперимента.
6. Анализ полученных экспериментальных результатов и выводы об их соответствии теоретически ожидаемым.
7. Приложения.

6. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте постановку задачи интегрирования заданной функции?
2. Какова геометрическая интерпретация задачи численного интегрирования?
3. В каких случаях задача интегрирования решается численно?
4. Дайте определение понятию «квадратурная формула».
5. Какие простейшие формулы численного интегрирования Вы знаете?
6. Приведите геометрическую интерпретацию решения задачи численного интегрирования с использованием простейших квадратурных формул.
7. Является ли задача численного интегрирования хорошо обусловленной?
8. Как вычисляется и от чего зависит методическая погрешность при решении задачи численного интегрирования?

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Варианты индивидуальных заданий**Таблица А1.**

№ вар	Коды методов численного интегрирования	№ вар	Коды методов численного интегрирования	№ вар	Коды методов численного интегрирования
1	1, 6	11	1, 4	21	1, 4
2	2, 7	12	2, 4	22	4, 2
3	3, 5	13	3, 6	23	3, 7
4	4, 5	14	4, 2	24	4, 5
5	5, 6	15	5, 7	25	5, 7
6	1, 7	16	1, 5	26	1, 5
7	2, 6	17	2, 6	27	4, 3
8	3, 6	18	3, 7	28	2, 6
9	5, 1	19	4, 6	29	3, 7
10	5, 2	20	5, 4	30	5, 6

В таблице А1.использованы следующие коды методов численного интегрирования, основанные:

1– на формуле левых прямоугольников; 2– на формуле правых прямоугольников; 3– на формуле центральных прямоугольников; 4– на формуле трапеций; 5– на формуле Симпсона; 6– на формуле Ньютона-Котеса; 7– на формуле Гаусса.

Таблица А2

Варианты 1, 11,21		Варианты 2,12,22		Варианты 3,13,23		Варианты 4,14,24		Варианты 5,15,25	
X	f	X	f	X	f	X	f	X	f
1.415	0.888551	0.101	1.26183	0.180	5.61543	3.50	33.1154	0.115	8.65729
1.420	0.889599	0.106	1.27644	0.185	5.46693	3.55	34.8133	0.120	8.29329
1.425	0.990637	0.111	1.29122	0.190	5.32634	3.60	36.5982	0.125	7.95829
1.430	0.891667	0.116	1.27617	0.195	5.190304	3.65	36.4747	0.130	7.64893
1.435	0.892687	0.121	1.32130	0.200	5.16649	3.70	40.4473	0.135	7.36235
1.440	0.993698	0.126	1.33660	0.205	4.94619	3.75	42.5211	0.140	7.09613
1.445	0.894700	0.131	1.35207	0.210	4.83170	3.80	44.7012	0.145	6.84815
1.450	0.895693	0.136	1.36773	0.215	4.72261	3.85	46.9931	0.150	6.61659
1.455	0.90677	0.141	1.38357	0.220	4.61855	3.90	49.4024	0.155	6.39986
1.460	0.897653	0.146	1.39959	0.225	4.51919	3.95	51.9354	0.160	6.19658
1.465	0.898619	0.151	1.41579	0.230	4.42422	4.00	54.5982	0.165	6.00551
1.470	0.898602	0.156	1.42244	0.235	4.33337	4.05	57.3975	0.170	6.82558
1.475	0.897553	0.161	1.26183	0.240	4.61543	4.10	63.1154	0.175	7.65729
1.480	0.918619	0.166	1.37644	0.245	4.46693	4.15	64.8133	0.180	8.29329
1.485	0.898602	0.171	1.39122	0.250	3.32634	4.20	66.5982	0.185	7.95829
1.490	0.928602	0.176	1.39617	0.255	3.590304	4.25	68.4747	0.190	7.64893
1.495	0.888551	0.181	1.32130	0.260	4.06649	4.30	70.4473	0.195	7.36235
1.500	0.889599	0.186	1.26183	0.265	4.94619	4.35	82.5211	0.200	6.99613
1.505	0.890637	0.191	1.28644	0.270	4.83170	4.40	84.7012	0.205	6.84815
1.510	0.891667	0.196	1.29122	0.275	4.72261	4.45	86.9931	0.210	6.61659
1.515	0.892687	0.201	1.30617	0.280	4.61855	4.50	89.4024	0.215	5.39986
1.520	0.913698	0.206	1.32130	0.285	4.83170	4.55	91.9354	0.220	3.19658
1.525	0.894700	0.211	1.33660	0.290	4.72261	4.60	93.5982	0.225	3.00551
1.530	0.895693	0.216	1.53660	0.295	4.61855	4.65	97.3975	0.230	2.82558

Варианты 6,16,26		Варианты 7,17,27		Варианты 8,18,28		Варианты 9, 19,29		Варианты 10,20,30	
X	f	X	f	X	f	X	f	X	f
1.340	4.25562	0.01	0.991824	0.15	4.4817	0.45	19.1946	0.15	0.860708
1.345	4.35325	0.06	0.95193	0.16	4.9530	0.46	19.3300	0.20	0.818731
1.350	4.45522	0.11	0.913650	0.17	5.4739	0.47	18.9425	0.25	0.778801
1.355	4.56184	0.16	0.876905	0.18	6.0496	0.48	18.1746	0.30	0.740818
1.360	4.67344	0.21	0.841638	0.19	6.6859	0.49	17.3010	0.35	0.704688
1.365	4.79038	0.26	0.807789	0.20	7.3891	0.50	16.3123	0.40	0.670320
1.370	4.71306	0.31	0.775301	0.21	8.1662	0.51	15.1984	0.45	0.937628
1.375	5.04192	0.36	0.844120	0.22	9.0250	0.52	13.9484	0.50	0.506531
1.380	5.17744	0.41	0.714193	0.23	9.9742	0.53	12.5508	0.55	0.576950
1.385	5.32016	0.46	0.685470	0.24	11.0232	0.54	10.9937	0.60	0.548812
1.390	5.57069	0.51	0.657902	0.25	12.1825	0.55	9.2647	0.65	0.522046
1.395	5.62968	0.56	0.631442	0.26	13.4637	0.56	7.3510	0.70	0.500023
1.400	5.25562	0.61	0.791824	0.27	13.4817	0.57	9.1946	0.75	0.660708
1.410	4.35325	0.66	0.95193	0.28	14.9530	0.58	10.33	0.80	0.618731
1.415	5.45522	0.71	0.813650	0.29	15.4739	0.59	8.9425	0.85	0.778801
1.420	5.56184	0.76	0.876905	0.30	16.0496	0.60	8.1746	0.90	0.740818
1.425	4.67344	0.81	0.841638	0.31	16.6859	0.61	7.3010	0.95	0.704688
1.430	4.79038	0.86	0.807789	0.32	17.3891	0.62	6.3123	1.00	0.670320
1.435	4.91306	0.91	0.675301	0.33	18.1662	0.63	5.1984	1.05	0.637628
1.440	5.04192	0.96	0.744120	0.34	19.0250	0.64	3.9484	1.10	0.626531
1.445	5.17744	1.01	0.714193	0.35	19.9742	0.65	2.5508	1.15	0.576950
1.450	4.32016	1.06	0.685470	0.36	20.0232	0.66	1.9937	1.20	0.548812
1.455	5.47069	1.11	0.657902	0.37	21.1825	0.67	0.2647	1.25	0.522046
1.460	5.62968	1.16	0.631442	0.38	22.4637	0.68	0.3510	1.30	0.500023

Заказ № ____ от « ____ » _____ 2014 г. Тираж ____ экз.
Изд-во СевНТУ