

**Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный
технический университет**



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторной работы №6
**«Численное решение систем линейных алгебраических
уравнений»**
по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений»
для студентов дневной формы обучения
направления подготовки «Компьютерная инженерия»

**Севастополь
2014**

Методические указания к выполнению лабораторной работы «Решение систем линейных алгебраических уравнений» по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений» для студентов направления подготовки «Компьютерная инженерия» дневной формы обучения /Сост. Е.В. Козлова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2014.– 12с.

Цель методических указаний – методическая помощь в самостоятельном изучении теоретического материала по теме «Решение систем линейных алгебраических уравнений» и выполнении лабораторной работы.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники (протокол № 11 от 25 июня 2014г.).

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Обжерин Ю.Е., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики.

Ответственный за выпуск:

Брюховецкий А.А., кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой кибернетики и вычислительной техники.

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1.	Основные теоретические сведения	3
2.	Задания к выполнению лабораторной работы	9
3	Варианты индивидуальных заданий к выполнению лабораторной работы	11
4	Контрольные вопросы	12
	Библиографический список	12

где $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_n^n$ – вещественная $n \times n$ матрица коэффициентов

данной системы;

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор неизвестных (вектор-решение);

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ – вектор свободных членов.

Необходимо получить значение вектора $\mathbf{x}$ при известных матрицах $\mathbf{b}$ и $\mathbf{A}$ в предположении, что матрица $\mathbf{A}$ является невырожденной.

Численное решение системы (1) будем искать в виде приближённого вектора

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T,$$

для которого погрешность $\mathbf{E} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ мала (количественная характеристика «величины» погрешности в векторном пространстве будет введена далее).

Эффективность методов решения системы (1) существенно зависит от структуры и свойств матрицы $\mathbf{A}$, а именно: размерности, симметричности, разреженности, обусловленности и т. п. Размерность системы (n) является основным фактором, который заставляет при решении практических задач отказаться от известных из математического анализа *формул Крамера*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где $\det \mathbf{A}$ – определитель матрицы коэффициентов системы,

а $\det A_i$ – определитель матрицы A_i , полученной из $\mathbf{A}$ заменой столбца коэффициентов при вычисляемом неизвестном x_i столбцом свободных членов.

Функция сложности алгоритма вычисления определителя характеризуется факториальным ростом, т.е. для вычисления определителя n -того порядка требуется $n!$ операций умножения. Поэтому задача решения САЛУ «в лоб» относится к классу NP-сложных задач, т.е. таких, решение которых не может быть получено за полиномиальное время.

Если же производить решение (2) на основе вычисления обратной матрицы по формуле

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}, \quad (4)$$

то это фактически равнозначно применению формул Крамера и непригодно по уже перечисленным выше причинам.

1.2. Метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений

Наиболее известным методом решения СЛАУ вида (1) является **метод Гаусса** (метод последовательного исключения неизвестных), суть которого заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Решение системы с помощью метода Гаусса состоит из двух основных этапов: **прямого хода** и **обратного хода** (обратной подстановки).

Прямой ход заключается в последовательном исключении неизвестных из системы (1) для преобразования её к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений с верхней треугольной матрицей коэффициентов

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Непосредственное вычисление значений неизвестных производится на этапе обратного хода.

Рассмотрим этап **прямого хода** решения системы n линейных алгебраических уравнений, который состоит из $(n-1)$ -го шага исключения неизвестных.

1-й шаг. Целью этого шага является исключение неизвестного x_1 из уравнений с номерами $i=2, 3, \dots, n$. Предположим, что коэффициент $a_{11} \neq 0$. Будем называть его **главным** или **ведущим элементом** первого шага.

Найдём величины $\mu_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ ($i = \overline{2, n}$), называемые **множителями 1-го шага**.

Вычтем последовательно из 2-го, 3-го, ..., n -го уравнений системы (1) первое уравнение, умноженное соответственно на $\mu_{21}, \mu_{31}, \dots, \mu_{n1}$. Это позволит обратить в нуль коэффициенты при неизвестном x_1 во всех уравнениях системы, кроме первого уравнения.

В результате получим эквивалентную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{array} \right. \quad (5)$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \mu_{i1} \cdot a_{1j}$, $b_i^{(1)} = b_i - \mu_{i1} \cdot b_1$.

2-й шаг. Целью этого шага является исключение неизвестного x_2 из уравнений с номерами $i=3, 4, \dots, n$. Множители второго шага исключения вычисляются по формулам:

$$\mu_{i2} = \frac{a_{i2}}{a_{22}} \quad (i = \overline{3, n})$$

Далее вычтем последовательно из 3-го, 4-го, ..., n -го уравнений системы (5) второе уравнение, умноженное соответственно на $\mu_{32}, \mu_{42}, \dots, \mu_{n2}$.

В результате получим преобразованную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \quad \quad a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \quad \quad \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}, \end{array} \right. \quad (6)$$

где $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \mu_{i2} \cdot a_{2j}^{(1)}$, $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \mu_{i2} \cdot b_2^{(1)}$.

Аналогично производятся шаги последовательного исключения остальных неизвестных (кроме последнего – x_n). Опишем очередной k-й шаг. В предположении, что главный элемент k-го шага $a_{kk}^{(k-1)}$ отличен от нуля, вычислим соответствующие множители:

$$\mu_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (i = k+1, n)$$

и вычтем из (k+1)-го, (k+2)-го, ..., n-го уравнений полученной на предыдущем шаге системы k-ое уравнение, умноженное соответственно на $\mu_{k+1, k}$; $\mu_{k+2, k}$; ... ; μ_{nk} .

После (n-1)-го шага преобразований СЛАУ примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \quad \quad a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \quad \quad \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{array} \right. \quad (7)$$

Как видно из (7), преобразованная матрица коэффициентов системы является треугольной, к чему мы и стремились на этапе прямого хода.

В процессе реализации этапа **обратного хода** из последнего уравнения системы (7) находим значение неизвестного x_n . Подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение, получаем значение неизвестного x_{n-1} . Осуществляя аналогичную обратную подстановку, далее последовательно находим значения неизвестных x_{n-2} , x_{n-3} , ..., x_1 .

В общем виде формулы для вычислений значений неизвестных:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \quad x_k = \frac{b_k^{(k-1)} - a_{k, k+1}^{(k-1)}x_{k+1} - \dots - a_{kn}^{(k-1)}x_n}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = \overline{n-1, 1}. \quad (8)$$

1.3 Оценка погрешности решения систем линейных алгебраических уравнений

Нормы вектора и матрицы

Решением системы линейных алгебраических уравнений $A \cdot x = b$ является вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, который мы будем рассматривать, как элемент векторного пространства R^n . Приближённое решение системы уравнений $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ и погрешность решения $E = x - x^* = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, \dots, x_n - x_n^*)^T$ также являются элементами векторного пространства R^n .

Для того, чтобы анализировать и сравнивать различные методы решения СЛАУ, необходимо уметь количественно оценивать «величины» векторов x^* ,

$(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)$, а также векторов $\mathbf{b}$ и $(\mathbf{b}-\mathbf{b}^*)$, где $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, $\mathbf{b}^*=(b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*)^T$ – векторы точно и приближённо заданных правых частей системы, соответственно.

Удобной для этой цели характеристикой является широко используемое понятие **нормы вектора**.

Определение 1. Говорят, что в векторном пространстве R^n задана **норма**, если каждому вектору $\mathbf{x}$ из R^n сопоставлено вещественное число $\|\mathbf{x}\|$, называемое **нормой вектора $\mathbf{x}$** и обладающее следующими свойствами:

- 1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, причём $\|\mathbf{x}\|=0$ только для $\mathbf{x}=0$;
- 2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$ для любого вектора $\mathbf{x}$ и любого числа α ;
- 3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

В вычислительных методах наиболее употребительными являются следующие три способа введения норм:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|; \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}; \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.\end{aligned}$$

Первые два способа являются частными случаями нормы общего вида:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Норма $\|\mathbf{x}\|_2$ является естественным обобщением на случай n -мерного пространства понятия «длина вектора» в двух и трехмерных геометрических пространствах. Поэтому её называют **евклидовой нормой**.

Справедливы неравенства $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty$, указывающие на то, что все три нормы эквивалентны, а именно: каждая из них оценивается любой из двух других норм с точностью до множителя, зависящего от n .

Определение 2. Величина

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A \cdot \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

называется **нормой матрицы A** , подчинённой введённой норме векторов.

Норма (13) обладает следующими свойствами:

- 1) $\|A\| \geq 0$, причём $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$;
- 2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, для любых A и α ;
- 3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- 4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$;
- 5) Для любой матрицы A и вектора $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}\|A \cdot \mathbf{x}\| &\leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|; \\ \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|; \\ \|A\|_2 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\lambda_j(A^T \cdot A)},\end{aligned}$$

где $\lambda_j(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})$ – собственные числа матрицы $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$.

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Норма матрицы имеет простую *геометрическую интерпретацию*. Операцию умножения матрицы $\mathbf{A}$ на вектор $\mathbf{x}$ можно рассматривать, как преобразование, которое переводит вектор $\mathbf{x}$ в новый вектор $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Значение $\|\mathbf{x}\|$ интерпретируется как *длина* вектора $\mathbf{x}$. Величина $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\| / \|\mathbf{x}\|$ есть *коэффициент растяжения* вектора $\mathbf{x}$ под действием матрицы $\mathbf{A}$.

Абсолютная и относительная погрешности вектора решения

Будем считать, что в пространстве n -мерных векторов $\mathbf{R}^n$ введена и фиксирована некоторая норма $\|\mathbf{x}\|$. В этом случае в качестве меры степени близости векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^*$ естественно использовать величину $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$, являющуюся аналогом расстояния между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^*$ в векторном пространстве $\mathbf{R}^n$:

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{x}^*) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|; \\ \delta(\mathbf{x}^*) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| / \|\mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

Выбор той или иной конкретной нормы диктуется требованиями к точности решения. Норма $\|\mathbf{x}\|_1$ выбирается тогда, когда малой должна быть суммарная абсолютная ошибка в компонентах решения; норма $\|\mathbf{x}\|_2$ – соответствует критерию малости среднеквадратичной ошибки, а норма $\|\mathbf{x}\|_{\infty}$ – когда малой должна быть максимальная из абсолютных ошибок в компонентах решения.

Определение 3. Пусть $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Говорят, что последовательность векторов $\mathbf{x}^{(k)}$ сходится к вектору $\mathbf{x}$ при $n \rightarrow \infty$ ($\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}$ при $n \rightarrow \infty$), если $\Delta(\mathbf{x}^{(k)}) = \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Обусловленность задачи решения СЛАУ

Решения различных систем линейных алгебраических уравнений обладают разной чувствительностью к погрешностям входных данных. Так же, как и другие задачи, задача получения решения $\mathbf{x}$ системы уравнений $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ может быть как хорошо, так и плохо обусловленной.

Исследование обусловленности задачи получения решения системы линейных алгебраических уравнений начнём рассмотрения случая, когда элементы матрицы $\mathbf{A}$ считаются заданными точно, а вектор-столбец $\mathbf{b}$ свободных членов в правой части – приближённо.

Для оценки погрешности приближённого решения системы $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ можно воспользоваться неравенством:

$$\Delta(\mathbf{x}^*) \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{r}\|,$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^*$ – невязка, отвечающая $\mathbf{x}^*$.

Теорема 1

Пусть $\mathbf{x}^*$ – точное решение системы $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^*$, в котором вектор $\mathbf{b}^*$ является приближенным по отношению к вектору свободных членов $\mathbf{b}$ системы $\mathbf{A} \mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.

Тогда верны следующие оценки абсолютной и относительной погрешностей:

$$\Delta(\mathbf{x}^*) \leq v_{\Delta} \Delta(\mathbf{b}^*),$$

$$\delta(\mathbf{x}^*) \leq v_{\delta} \delta(\mathbf{b}^*),$$

где $v_{\Delta} = \|\mathbf{A}^{-1}\|$, $v_{\delta} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|}$.

Величина $v_{\delta} = v_{\delta}(\mathbf{x})$ называется **естественным числом обусловленности**.

Максимальное значение естественного числа обусловленности

$$\max_{\mathbf{x} \neq 0} v_{\delta} = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|$$

принято называть **стандартным числом обусловленности** (или просто **числом обусловленности**) матрицы $\mathbf{A}$ и обозначать через $v(\mathbf{A})$ или $\text{cond}(\mathbf{A})$:

$$v(\mathbf{A}) = \text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|$$

В условиях теоремы 1 справедлива оценка

$$\delta(\mathbf{x}^*) \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \cdot \delta(\mathbf{b}^*).$$

Систему уравнений и матрицу $\mathbf{A}$ принято называть плохо обусловленной, если $\text{cond}(\mathbf{A}) \gg 1$.

Теорема 2

Пусть $\mathbf{x}^*$ – решение системы $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{b}$ с приближённо заданной матрицей коэффициентов $\mathbf{A}^*$. Тогда верна следующая оценка относительной погрешности приближённого решения:

$$\delta^*(\mathbf{x}^*) \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \cdot \delta(\mathbf{A}^*),$$

где $\delta^*(\mathbf{x}^*) = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}\|}$, $\delta(\mathbf{A}^*) = \frac{\|\mathbf{A} - \mathbf{A}^*\|}{\|\mathbf{A}\|}$.

2. Задания к выполнению лабораторной работы

Задача 1. Дана система уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ порядка n . Исследовать зависимость погрешности решения $\mathbf{x}$ от погрешностей правой части системы $\mathbf{b}$.

Порядок решения задачи

1. Задать матрицу системы $\mathbf{A}$ и вектор правой части $\mathbf{b}$. Используя встроенную функцию `lsolve(A, b)` пакета `MATNCAD`, найти решение $\mathbf{x}$ системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ с помощью метода Гаусса.

2. С помощью встроенной функции `condi(A)` пакета

`MATNCAD` вычислить число обусловленности матрицы $\mathbf{A}$.

3. Принимая решение $\mathbf{x}$, полученное в п. 1, за точное решение, вычислить вектор

$$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)^T, \quad d_i = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}}, \quad i = 1, \dots, n, \text{ относительных погрешностей решений } \mathbf{x}^i$$

систем $Ax^i = b^i$, $i=1, \dots, n$, где компоненты векторов b^i вычисляются по формулам:

$$b_k^i = \begin{cases} b_k + \Delta, & k=i, \\ b_k, & k \neq i, \end{cases} \quad k=1, \dots, n, \quad (\Delta - \text{произвольная величина погрешности}).$$

4. На основе вычисленного вектора d построить гистограмму. По гистограмме определить компоненту b_m вектора b , которая оказывает наибольшее влияние на погрешность решения.

5. Оценить теоретически погрешность решения x^m по формуле:

$$\delta(x^m) \leq \text{cond}(A) \cdot \delta(b^m).$$

Сравнить значение $\delta(x^m)$ со значением практической погрешности d_m . Объяснить полученные результаты.

Указание. Функция **condi**(A) возвращает число обусловленности матрицы A , основанное на ∞ -норме. Для вычисления $\|\cdot\|_\infty$ вектора удобно воспользоваться встроенной функцией **max**(v) пакета MATHCAD, возвращающей максимальную компоненту вектора v .

Задача 2. Для системы уравнений $Ax=b$ из задачи 1 исследовать зависимость погрешности решения системы от погрешностей коэффициентов матрицы A (аналогично задаче 1).

Теоретическая оценка погрешности в этом случае имеет вид:

$$\delta(x^*) \leq \text{cond}(A) \cdot \delta(A^*),$$

где x^* - решение системы с возмущенной матрицей A^* .

Задача 3. Дана матрица A . Найти число обусловленности матрицы, используя вычислительный эксперимент.

Порядок решения задачи

1. Выбрать последовательность линейно независимых векторов $b^i, i=1, \dots, k$. Решить k систем уравнений $Ax^i = b^i$, $i=1, \dots, k$, используя встроенную функцию **lsolve** пакета MATHCAD.

2. Для каждого найденного решения x^i вычислить отношение $\frac{\|x^i\|}{\|b^i\|}$, $i=1, \dots, k$.

3. Вычислить норму матрицы A^{-1} по формуле $\|A^{-1}\| \approx \max_{1 \leq i \leq k} \frac{\|x^i\|}{\|b^i\|}$, вытекающей из неравенства $\|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|$.

4. Вычислить число обусловленности матрицы A по формуле $\text{cond}(A) \approx \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

3. Варианты индивидуальных заданий к выполнению лабораторной работы

Таблица индивидуальных заданий к задаче 1

N	n	a_{ij}	N	n	a_{ij}
1	6	$\frac{15}{4c^5 + 6c + 1}$	16	5	$\frac{15}{4c^5 + 6c + 1}$
2	6	$\frac{125}{(4c + 0,25c)^6}$	17	4	$\frac{115}{3c + 4c^3}$
3	6	$\frac{12}{4c + 4}$	18	5	$\frac{123}{2c^3 + 5c^2}$
4	7	$\frac{55}{c^2 + 3c + 100}$	19	5	$\frac{100}{(11 + c)^5}$
5	7	$\frac{135}{(2 + 0,3c)^5}$	20	6	$\cos(\frac{c}{25})$
6	7	$\frac{3}{c^4 - 4c^3}$	21	6	$\frac{1000}{3c^2 + c^3}$
7	6	$\frac{256}{(5 + 0,256c)^5}$	22	5	$\frac{150}{13c^3 + 777c}$
8	6	$\frac{1}{\sqrt{c^2 + 0.58c}}$	23	5	$\frac{11.7}{(1 + c)^7}$
9	5	$\frac{3}{(1 + c)^2}$	24	4	$\frac{159}{10c^3 + c^2 + 25}$
10	5	$\sin(\frac{c}{8})$	25	5	$\frac{321}{(1 + c)^6}$
11	4	$\frac{1}{67 + c^4}$	26	5	$\frac{31}{\sqrt{c^2 + 6c}}$
12	4	$\frac{111}{c^4 + 3c + 13}$	27	6	$\frac{350}{(5 + 0.35c)^3}$
13	5	$\frac{1}{(1 + c)^3}$	28	5	$\frac{500}{(8c - 5)^2}$
14	7	$\frac{1.5}{0.001c^3 - 2.5c}$	29	6	$\frac{10}{0.3c^3 + 10c}$
15	6	$\frac{88.5}{c + 0.03c^2}$	30	5	$\frac{1}{0.4c^3 + 20c}$

Компоненты вектора b во всех вариантах задаются формулой:

$b_i = N$, $\forall i = 1, \dots, n$, коэффициенты $c = c_{ij} = 0.1 \cdot N \cdot i \cdot j$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, N – номер варианта.

Таблица индивидуальных заданий к задаче 3

№ вар.	А	№ вар.	А
1	1 2 3 4 5 1 1 2 3 4 1 2 1 2 3 1 3 2 1 2 1 4 3 2 1	6	1 1 1 1 1 16 8 4 2 1 81 27 9 3 1 256 64 16 4 1 625 125 25 5 1
2	3 1 0 0 0 1 2 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1	7	611 196 -192 407 196 899 113 -192 -192 113 899 196 407 -192 196 611
3	1 1 1 1 1 1 2 3 4 5 1 3 6 10 15 1 4 10 20 35 1 5 15 35 70	8	1 0.5 0.333 0.25 0.2 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 0.333 0.25 0.2 0.167 0.143 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111
4	1 1 1 1 8 4 2 1 27 9 3 1 64 16 4 1	9	1 1 1 1 1 2 3 4 1 3 6 10 1 4 4 20
5	1 2 3 4 5 1 1 2 3 4 1 2 1 2 1 1 3 2 1 4 1 4 5 2 1	10	3 1 0 0 0 1 2 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 2 0 0 0 1 1

4. Контрольные вопросы

1. Что собой представляет система линейных алгебраических уравнений?
2. Какие методы решения СЛАУ Вы знаете?
3. Охарактеризуйте с точки зрения достоинств и недостатков эти методы.
4. В чём отличие прямых и итерационных методов решения СЛАУ?
5. Какова основная идея метода Гаусса для решения СЛАУ?
6. Что такое «норма» и как это понятие используется при вычислении погрешности решения СЛАУ?
7. В чём заключается геометрический смысл понятия «норма матрицы»?
8. Является ли задача решения СЛАУ хорошо обусловленной?
9. Как вычислить числа обусловленности для этой задачи, если известны погрешности задания элементов матрицы коэффициентов?
10. Как вычислить числа обусловленности, если известны погрешности задания свободных членов?

Библиографический список

1. Амосов А.А., Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие. / А.А. Амосов, Ю.А.Дубинский, Н.В. Копченкова. – М.: Изд-во МЭИ, 2003.–596с.
2. Бахвалов А.С. Численные методы. Учебное пособие. / А.С. Бахвалов, А.П. Жидков, Г.М. Кобельков. 4-е изд. М.-СПб.: Физматлит, Невский диалект, Лаборатория базовых знаний, 2003. – 624с.
3. Воробьева Г.А. Практикум по вычислительной математике. / Г.А.Воробьева, А.Н.Данилова. – М.: Высш. шк., 1990. –208с.

Заказ № ____ от « ____ » _____ 2014 г. Тираж ____ экз.
Изд-во СевНТУ