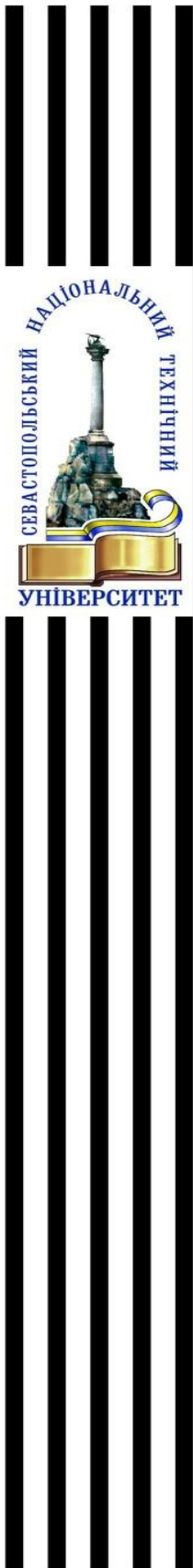


Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Методические указания
к выполнению курсового проекта по дисциплине
«Современные методы теоретических и экспери-
ментальных исследований»
для магистрантов специальности 7.091501
«Компьютерные системы и сети»
дневной формы обучения

Анализ систем на основе полумарковских процес-
сов с дискретным пространством состояний

Севастополь
2014

УДК 681.31/07

Методические указания к выполнению курсового проекта по дисциплине «Современные методы теоретических и экспериментальных исследований» для магистрантов специальности 7.091501 «Компьютерные системы и сети» дневной формы обучения. Анализ систем на основе полумарковских процессов с дискретным пространством состояний / Сост. Мащенко Е.Н. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2014. - 30 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в изучении основ теории полумарковских процессов и методики построения полумарковских моделей сложных систем.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники (протокол № 11 от 25 июня 2014 г.)

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент:

Обжерин Ю.В., профессор кафедры высшей математики, доктор технических наук.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	4
1. Сложные системы как стохастические полумарковские системы	5
2. Определение, способы задания, основные характеристики полумарковского процесса с дискретным пространством состояний	8
3. Методика построения полумарковской модели	10
4. Сравнительный анализ марковской и полумарковской моделей дублированной системы с ненагруженным резервом	10
5. Примеры полумарковских моделей систем с восстановлением	15
5.1. Система с облегченным резервом	15
5.2. Система с последовательным соединением по надежности	17
6. Оценка математического ожидания времени выполнения многоэтапного задания в вычислительной системе при последовательной стратегии функционирования	19
7. Алгоритм имитационного моделирования полумарковских систем	23
8. Задания для расчета	26
9. Содержание отчета	26
Обозначения и сокращения	27
Библиографический список	28
Приложение А. Варианты задания 1	29
Приложение Б. Варианты задания 2	30

ВВЕДЕНИЕ

Сложные системы – особый вид систем, вопросы их анализа и синтеза до настоящего времени полностью не разработаны и продолжают развиваться по двум основным направлениям: повышение адекватности существующих моделей и методов и расширение класса систем, для которых возможно построение математических моделей.

При исследовании вычислительных систем как сложных систем наиболее часто используемым математическим аппаратом является аппарат теории массового обслуживания, позволяющий решать задачи анализа и синтеза данных систем. Однако модели теории массового обслуживания при их относительной простоте обладают следующими недостатками: допущения об экспоненциальности распределений параметров системы и независимости функционирования ее элементов; в качестве результата моделирования возможно получить только средние значения выходных характеристик системы.

Поэтому были проведены исследования, направленные на расширение возможностей моделей, и, соответственно, класса моделируемых систем. Одно из направлений исследований связано с использованием случайных процессов более сложной структуры, а именно полумарковских процессов [1, 2, 5, 6].

В данных методических указаниях для решения задач анализа сложных стохастических систем предлагается математический аппарат теории полумарковских процессов (ПМП) с дискретным (конечным) пространством состояний. Аппарат сложен, для использования требует математического образования. Целью указаний является дать первоначальные конструктивные сведения по теории полумарковских процессов и методике построения полумарковских моделей сложных систем, как аналитических, так и имитационных. Для повышения доступности изложения приводится множество примеров.

Для интересующихся более полным и систематическим изложением рассматриваемых методов рекомендуем следующие источники: общие вопросы теории полумарковских процессов [1,6], полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания [2], применение полумарковских процессов при исследовании надежности [5], главы 1-3, полумарковские модели систем вычислительной техники и автоматизированного управления [8].

Указания предназначены для студентов 5 курса специальности «Компьютерные системы и сети», рекомендованы студентам старших курсов других специальностей, магистрантам, аспирантам, могут быть использованы при выполнении курсовых и дипломных проектов.

1. СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ КАК СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПОЛУМАРКОВСКИЕ СИСТЕМЫ

Начнем описание математических моделей стохастических систем с изложения основных характерных свойств систем, которые позволяют выделить среди многочисленного разнообразия реальных систем класс стохастических систем, для анализа которых можно использовать математический аппарат теории ПМП [1].

Прежде всего, при математическом описании реальных систем необходимо определить основные количественные параметры (характеристики) системы, которые полностью характеризуют поведение системы в рассматриваемых условиях.

Выбор тех или иных параметров системы в качестве основных – важная первоначальная задача построения математической модели. Прежде всего, необходимо учитывать возможности наблюдения изменений параметров системы, а также конечную цель анализа математической модели – получение объективных количественных характеристик, определяющих существенные свойства эволюции системы.

Для одной и той же реальной системы в зависимости от условий наблюдений с учетом количественных измерений и конечной цели анализа выбор основных параметров, характеризующих поведение системы, может быть различным, более или менее детализированным или укрупненным.

При построении математической модели системы мы предполагаем, что такой выбор уже сделан. Нам остается лишь описать совокупность возможных значений основных параметров системы.

Фиксированное значение основных параметров системы определяет состояние системы.

Совокупность возможных различных состояний системы называется фазовым пространством состояний (ФПС).

Математическая модель реальной системы содержит в качестве исходного объекта описания ФПС системы.

В качестве ФПС может служить любое множество элементов произвольной природы (например, алфавит – цифровой, буквенный или символьный), элементов которого достаточно для описания (кодирования) различных состояний системы, которые мы можем или должны наблюдать и измерять.

Функционирование системы состоит в том, что с течением времени происходит изменение состояний системы – система эволюционирует (функционирует).

Рассмотрим основные предположения о характере функционирования системы, позволяющие строить полумарковские модели стохастических систем [1]:

1) Скачкообразное изменение состояний: состояния стохастических систем изменяются дискретно (скачком) – в каждом из возможных состояний система пребывает конечное время и затем скачком мгновенно переходит в другое состояние.

На самом деле в реальной системе переход из одного наблюдаемого состояния в другое занимает какое-то время. Если при этом промежуточные состояния не наблюдаемы или не используются в анализе, тогда время перехода можно включить во время пребывания в состоянии (в исходном), а сам переход считать мгновенным. Кроме того, имеют место ситуации, когда время изменения состояния мало

и его учет не осуществлен в анализе. В этом случае переход из одного состояния в другое также можно считать мгновенным.

2) Стохастичность системы: случайный характер изменения состояний системы и случайность времен пребывания в состояниях. Изменение состояний системы происходит в соответствии с определенными вероятностями переходов, а времена пребывания в состоянии есть случайные величины.

3) Временная однородность системы: независимость вероятностей перехода между состояниями, а также распределений времен пребывания в состояниях от числа уже осуществленных переходов системы.

4) Полумарковское свойство системы: полумарковость переходов и состояний, что означает независимость вероятностей перехода из данного состояния от всей предыдущей эволюции системы до попадания в это состояние и независимость распределений времен пребывания в состояниях от всей предыдущей данному состоянию эволюции системы.

Полумарковское (ПМ) свойство системы означает, что система обладает марковским свойством в моменты изменения состояний. В такие моменты система полностью «забывает» свою предысторию и ее дальнейшая эволюция зависит только от данного состояния.

В случаях, когда реальные (физические) состояния системы обладают марковским свойством, наиболее просто строится математическая модель системы с дискретным (конечным) пространством состояний: реальные и фазовые (состояния модели) состояния совпадают.

Тогда же, когда реальные состояния не являются ПМ, построение математической модели усложняется: необходимо расширить совокупность реальных состояний до фазового пространства ПМ состояний, добавляя к кодам физических состояний координаты, обеспечивающие марковское свойство фазовых состояний. Процедура расширения физических состояний системы имеет творческий характер и усваивается в процессе накопления опыта. Результатом этой процедуры будет построение ПМ модели с измеримым фазовым пространством. Подобные модели более сложны и в данном указании не рассматриваются, примеры таких моделей можно найти в [1,2].

В некоторых случаях удастся избежать расширения пространства состояний, а именно когда некоторое подмножество состояний обладает марковским свойством и возможно построить вложенный ПМП на этом подмножестве состояний. Эта операция имеет смысл, когда все искомые характеристики системы можно выразить через характеристики вложенного ПМ процесса.

Пример 1 [3]

Система состоит из двух одинаковых элементов. В силу заданной производственной ситуации можно одновременно ремонтировать или исследовать только один элемент. Если оба элемента работоспособны, то один из них является основным, а другой – резервным. При отказе основного элемента резервный элемент мгновенно становится основным. Отказ резервного элемента может быть обнаружен только при специальных обследованиях, которые проводятся в случайные моменты времени или при включении его в качестве основного. Делаются следующие предполо-

жения: времена наработки на отказ и времена восстановления обоих элементов распределены экспоненциально, с разными интенсивностями отказов для основного и резервного элементов. Нарботки и времена восстановления являются взаимно независимыми случайными величинами. Продолжительность одного обследования пренебрежимо мала.

Определим пространство состояний процесса:

$$E = \{e1, e2, e3, e4\},$$

где $e1$ – один элемент работает в качестве основного, отказ резервного элемента еще не наступил;

$e2$ – один элемент отказал и восстанавливается, другой работает в качестве основного;

$e3$ – отказал основной элемент, при подключении резервного элемента обнаружено, что и он отказал; один элемент теперь восстанавливается;

$e4$ – основной элемент отказал во время восстановления другого элемента.

Граф переходов изображен на рисунке 1.

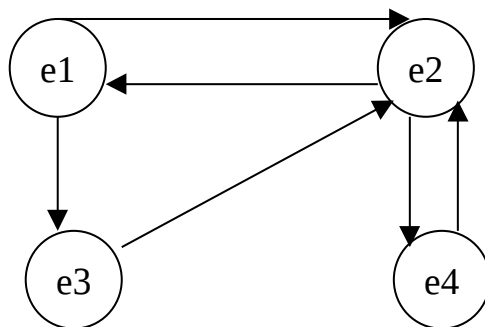


Рисунок 1- Граф переходов резервированной системы

Очевидно, что состояния $e1$ и $e2$ являются состояниями работоспособности, а состояния $e3$ и $e4$ – состояниями отказа.

Определим, является ли построенный случайный процесс полумарковским. Для этого необходимо проверить наличие свойств 1) – 4) у процесса функционирования системы. Свойства 1) - 3) следуют из описания процесса функционирования системы, проверим наличие свойства 4) – отсутствие последействия в моменты смены состояний.

При каждом переходе в состояние $e1$ имеются как бы два новых элемента. Предыстория до момента этого перехода не играет роли для дальнейшего течения процесса – марковское свойство сохраняется.

При каждом переходе в состояние $e2$ имеется как бы один новый элемент и как раз начинается восстановление другого элемента – марковское свойство сохраняется.

При каждом переходе в состояние $e3$ имеются два отказавших элемента. В данный момент начинается восстановление одного элемента – марковское свойство сохраняется.

При переходе в состояние e_4 мы находим один только что отказавший элемент и один элемент, восстановление которого еще не закончено. Очевидно, время пребывания в состоянии e_4 зависит от того, сколько времени процесс находится в состоянии e_2 . Марковское свойство здесь нарушено, следовательно, рассматриваемый процесс не является полумарковским. Однако процесс с множеством состояний $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ или любым непустым его подмножеством является вложенным полумарковским процессом.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ, ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА С ДИСКРЕТНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ СОСТОЯНИЙ

Определим полумарковский процесс (ПМП) с дискретным пространством состояний как обобщение марковской цепи [3].

Самым простым обобщением марковской цепи можно считать процесс, построенный таким образом, что все переходы из состояния в состояние осуществляются в соответствии с задающей марковской цепью, а длительность пребывания в каждом из состояний не постоянная и равная некоторому дискретному шагу, а случайная величина (СВ), имеющая свое распределение $G_k(t)$ для каждого k -го состояния.

Если все распределения $G_k(t)$ экспоненциальные, то полученный случайный процесс (СП) называется марковским. Напомним его основные свойства:

- стационарность: переходные вероятности и длительности пребывания в том или ином состоянии не зависят от времени;
- ординарность: за бесконечно малый интервал времени не может произойти более одного перехода из состояния в состояние;
- отсутствие последействия: вся последующая траектория переходов процесса из состояния в состояние зависит только от текущего состояния и не зависит от прошлой истории развития этого процесса или любой его части.

Если распределение времени пребывания в k -том состоянии $G_k(t)$ имеет общее распределение, то такой СП называется полумарковским.

Точное определение полумарковского процесса приведено в [1].

Основное различие между марковским и полумарковским процессами: свойство отсутствия последействия (марковское свойство) сохраняется лишь в момент перехода из состояния в состояние. При каждом переходе временная шкала сдвигается к $t=0$ и процесс в дальнейшем протекает так, как если бы он начался в момент 0 в данном новом состоянии. Все время подсчитывается только промежуток t , прошедший с момента последнего перехода. В этом смысле каждый момент перехода является моментом регенерации [4]. Если регистрировать только моменты перехода в какое-нибудь фиксированное состояние e_i , то определяется процесс марковского восстановления (ПМВ), поскольку времена между двумя последовательными e_i - переходами взаимно независимы и одинаково распределены.

Иногда встречается ситуация, когда марковское свойство выполняется только для некоторого подмножества E состояний системы. Если рассмотреть только пере-

ходы между состояниями из E , то получается вложенный процесс $\{S(t), t \geq 0\}$, который принимает состояния из E . Возникающий СП называется вложенным полумарковским процессом.

Введем следующие обозначения:

- 1) $E = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ или $E = \{1, 2, \dots, n\}$ - пространство состояний системы;
- 2) S_n - состояние системы на n -том шаге (после n -того перехода, $n \geq 0$);
- 3) θ_n - время пребывания в состоянии S_n .

Полумарковский процесс $(S(t); t \geq 0)$ задается процессом марковского восстановления (ПМВ) $\{S_n, \theta_n, n \geq 0\}$, компоненты которого имеют простую интерпретацию: первая компонента $(S_n, n \geq 0)$ - вложенная цепь Маркова (ВЦМ); вторая $(\theta_n, n \geq 0)$ определяет времена пребывания в состояниях S_n .

Существует несколько способов задания ПМВ (а, следовательно, и ПМП) [1]:

- 1) конструктивный способ: ПМВ $(S_n, \theta_n; n \geq 0)$, описывающий функционирование системы в пространстве состояний $E = \{1, 2, \dots, n\}$, задается полумарковской (ПМ) матрицей

$$Q_{kr}(t) = P\{S_{n+1}=r, \theta_{n+1} \leq t / S_n=k\}, \quad k, r \in E.$$

Элемент полумарковской матрицы $Q_{kr}(t)$ равен вероятности того, что произойдет переход из состояния k в состояние r и время пребывания в состоянии k будет не больше чем t . Имея ПМ матрицу $Q(t)$, можно вычислить другие аналитические характеристики ПМВ [1].

При построении ПМВ, описывающего функционирование реальной системы, ПМ матрица должна быть построена из исходных данных, определяющих стохастическое поведение системы.

- 2) Заданием матрицы переходных вероятностей и распределений времен пребывания в состояниях.

Вместе с тем основные характеристики систем, имеющие практическую интерпретацию, как правило, определяются лишь переходными вероятностями ВЦМ и функциями распределения (ФР) $G_k(t)$ времен пребывания в состояниях. В таком случае нет необходимости строить ПМ матрицу ПМВ, достаточно определить матрицу переходных вероятностей $P = [P_{kr}; k, r \in E]$ ВЦМ $(S_n; n \geq 0)$ и функции распределения $G_k(t)$, $k \in E$ времен пребывания в состояниях.

- 3) Стохастический способ.

На практике более часто ПМВ $(S_n, \theta_n; n \geq 0)$, описывающей функционирование реальной системы, определяется следующими стохастическими соотношениями:

$$a_k = \min_{r \in E_k} \{a_{kr}\}, \quad \{e_k \rightarrow e_r\} = \{a_k \rightarrow a_{kr}\}. \quad (1)$$

Сначала для каждого состояния системы e_k задаются времена действия α_{kr} , $r \in E_k$ случайных факторов, приводящих к изменению состояния системы, т.е. к переходу $e_k \rightarrow e_r$; затем соотношениями (1) определяются времена пребывания в состояниях θ_k , $k \in E$ и события переходов ВЦМ. Стохастическое задание (1) ПМВ по-

звоняет вычислить все необходимые характеристики ПМВ и будет рассмотрено далее в ряде примеров.

При всех способах задания ПМП необходимо также задать начальное состояние системы.

Кроме того, многие характеристики систем в стационарном режиме могут быть вычислены с использованием стационарного распределения ВЦМ ($S_n, n \geq 0$), система уравнений, для определения которого в дискретном пространстве состояний имеет следующий вид:

$$\rho = (\rho_k, k \in E); \quad \rho_k = \sum_{r \in E} \rho_r \cdot P_{rk}; \quad \sum_{k \in E} \rho_k = 1,$$

где P_{rk} – переходные вероятности ВЦМ. Вероятности ρ_k определяют частоты посещения цепью Маркова состояния $k \in E$ (вероятности состояний в установившемся режиме функционирования).

Важной характеристикой, позволяющей вычислять многие временные характеристики моделируемой системы, является τ_i , среднее время пребывания системы в некотором подмножестве состояний E^* , при условии, что в начальный момент система находилась в состоянии e_i . Эта характеристика определяется решением следующей системы уравнений:

$$\tau_i = M\theta_i + \sum_{j \in E^*} P_{ij} \cdot \tau_j, \quad j \in E^*. \quad (2)$$

Наиболее полно характеристики ПМП с дискретным пространством состояний изложены в [5,7].

3. МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ПОЛУМАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

1. По содержательному описанию моделируемой системы строится пространство состояний

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}.$$

2. Пространство состояний разбивается на непересекающиеся подмножества

$$E = E_1 \cup E_2, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

таким образом, чтобы искомые характеристики системы определялись временем пребывания системы в одном из подмножеств.

3. Строится граф переходов системы.

4. Определяются времена пребывания системы в состояниях как минимум случайных факторов, влияющих на изменение состояний, а также их функции распределения.

5. Определяются вероятности переходов из состояния в состояние.

6. Определяются искомые характеристики системы.

Эта методика будет рассмотрена далее на конкретных примерах.

4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАРКОВСКОЙ И ПОЛУМАРКОВСКОЙ МОДЕЛЕЙ ДУБЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ С НЕНАГРУЖЕННЫМ РЕЗЕРВОМ

Система состоит из 2-х приборов: один работает, другой находится в состоянии ненагруженного резерва (не отказывает в резервном состоянии). Время наработки на отказ прибора является случайной величиной ξ , распределенной по показательному закону: $P\{\xi \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$. Имеется одно восстанавливающее устройство. Длительность восстановления есть случайная величина η , распределенная по показательному закону с параметром μ : $P\{\eta \leq t\} = 1 - e^{-\mu t}$.

Определить коэффициент готовности K_r системы (стационарную вероятность безотказной работы).

Построим марковскую и полумарковскую модель системы для их сравнительного анализа [5].

Марковская модель. Определим пространство состояний системы

$$E = \{e_0, e_1, e_2\},$$

где e_0 – состояние системы, при котором один прибор работает, а другой находится в состоянии ненагруженного резерва;

e_1 – один прибор работает, другой восстанавливается;

e_2 – оба прибора находятся в отказавшем состоянии.

Ясно, что данная система в установившемся режиме работает лишь тогда, когда она находится в подмножестве работоспособных состояний $\{e_0, e_1\}$. Граф возможных переходов системы приведен на рисунке 2.

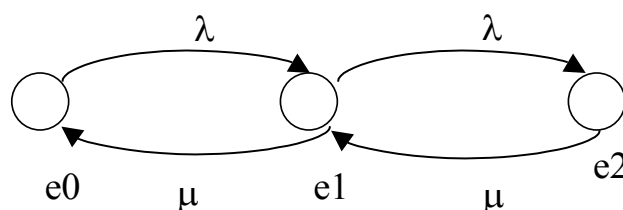


Рисунок 2 - Граф переходов марковской модели дублированной системы с ненагруженным резервом

Составим систему уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей состояний:

$$\begin{aligned} \lambda P_0 - \mu P_1 &= 0, \\ \lambda P_0 - (\lambda + \mu) P_1 + \mu P_2 &= 0, \\ \lambda P_1 - \mu P_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^2 P_i = 1.$$

Решая систему уравнений (3), получаем

$$P_0 = \mu^2 / (\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2);$$

$$P_1 = \lambda\mu / (\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2);$$

$$P_2 = \lambda^2 / (\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2).$$

Искомая стационарная вероятность безотказной работы системы равна сумме вероятностей работоспособных состояний:

$$K_r = P_0 + P_1 = (\mu^2 + \lambda\mu)/(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2).$$

Полумарковская модель. В условиях полумарковской модели множество состояний E имеет вид:

$$E = \{e_0, e_1, e_2\}.$$

Состояния имеют следующий смысл:

e_0 – начальное состояние системы – один прибор работает, другой находится в состоянии ненагруженного резерва;

e_1 – состояние, при котором один прибор работает (независимо от состояния другого прибора);

e_2 – состояние, при котором оба прибора находятся в отказавшем состоянии.

Таким образом подмножество состояний $E^* = \{e_0, e_1\}$ соответствуют рабочему состоянию системы, а состояние e_2 – ее отказу.

На рисунке 3, а показана одна из возможных реализаций марковского процесса, описывающего работу заданной системы, на рисунке 3, б – одна из возможных реализаций полумарковского процесса, описывающего ту же систему. Процесс приведен к одному масштабу времени.

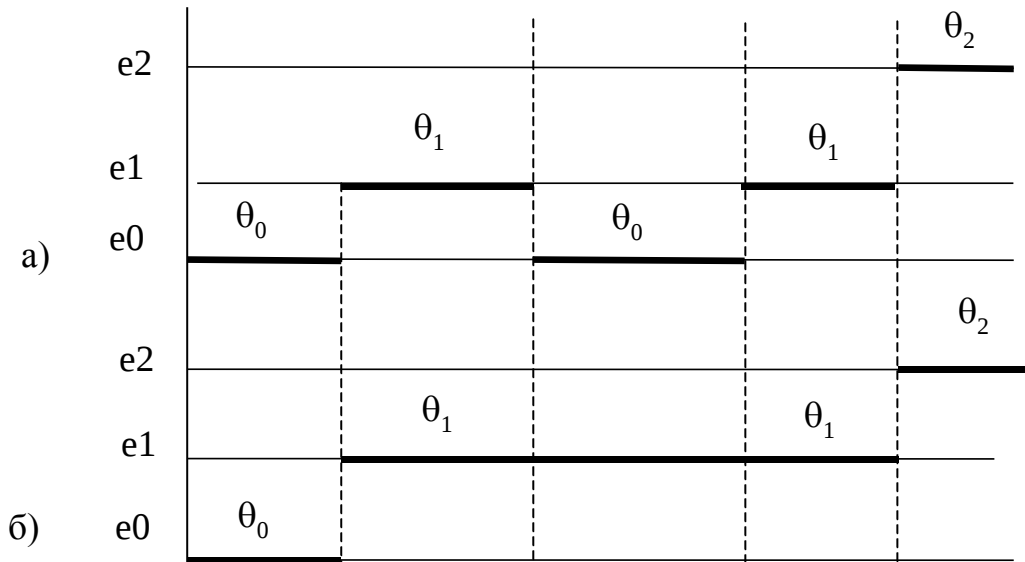


Рисунок 3 - Реализация марковского и полумарковского процессов, приведенных к одному масштабу времени

Определим времена пребывания системы в состояниях. Система находится в состоянии e_0 до первого отказа рабочего прибора (начальное состояние), т. е. $\theta_0 = \xi$.

Следовательно,

$$G_0(t) = P\{\theta_0 \leq t\} = P\{\xi \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \quad \mu\theta_0 = \mu\xi = 1/\lambda.$$

Система находится в состоянии e_1 до очередного отказа рабочего прибора, т.е. $\theta_1 = \xi$. Следовательно,

$$G_1(t) = P\{\theta_1 \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \quad \mu\theta_1 = 1/\lambda.$$

Время пребывания системы в состоянии e_2 равно длительности восстановления прибора, т. е. $\theta_2 = \eta$ и

$$G_2(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad \mu_2 = 1/\mu.$$

Определим вероятности переходов ВЦМ. Очевидно, что $P_{01} = 1$, т. к. из состояния e_0 переход возможен только в состояние e_1 , $p_{21}(t) = 1$ (см. граф переходов системы на рисунке 4).

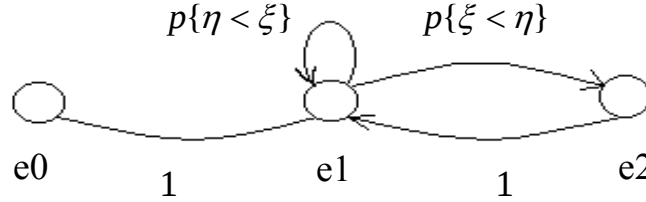


Рисунок 4 - Граф переходов ПМ модели дублированной системы с ненагруженным резервом

Вероятность перехода $p_{11} = p\{\eta < \xi\}$, т. е. вероятности того, что за время пребывания системы в состоянии e_1 ремонт закончится раньше, чем произойдет отказ рабочего прибора. Для неотрицательных случайных величин ξ_1 и ξ_2

$$p\{\xi_1 < \xi_2\} = \int_0^{\infty} F_{\xi_1}(t) dF_{\xi_2}(t) = \int_0^{\infty} F_{\xi_1}(t) f_{\xi_2}(t) dt, \quad (4)$$

где $F_{\xi_1}(t)$ и $F_{\xi_2}(t)$ - ФР случайных величин ξ_1, ξ_2 , $f_{\xi_2}(t)$ - плотность распределения случайной величины ξ_2 .

Следовательно, в нашем случае

$$p_{11} = p\{\eta < \xi\} = \lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu t}) e^{-\lambda t} dt = \mu / (\lambda + \mu).$$

Вероятность перехода $p_{12} = p\{\xi < \eta\}$, т. е. вероятности того, что за время пребывания системы в состоянии e_1 отказ рабочего прибора произойдет раньше, чем закончится ремонт. Аналогичным образом

$$p_{12} = p\{\xi < \eta\} = \lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda t}) e^{-\mu t} dt = \lambda / (\lambda + \mu).$$

Следовательно, матрица переходных вероятностей состояний имеет вид:

$$\begin{array}{ccc} e_0 & e_1 & e_2 \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{(\lambda + \mu)} & \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)} \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

Таким образом мы задали ПМ процесс, определив переходные вероятности ВЦМ и ФР $G_k(t)$ времен пребывания в состояниях. Далее будем определять интересные нас характеристики системы, используя ПМ модель.

Для определения коэффициента готовности K_r системы (стационарной вероятности безотказной работы) в теории надежности существует следующая формула [5]:

$$K_r = \frac{T_0}{T_0 + T_B}, \quad (5)$$

где T_0 – среднее время наработки на отказ, T_B – среднее время восстановления.

Для нашей системы среднее время наработки на отказ совпадает со средним временем пребывания системы в подмножестве состояний E^* , при условии, что в начальный момент система находилась в состоянии $e1$. Среднее время восстановления совпадает со средним временем пребывания системы в состоянии $e2$.

Система уравнений (2) в нашем случае примет вид (для подмножества $E^* = \{e0, e1\}$)

$$\begin{aligned} \tau_0 &= M\theta_0 + \tau_1; \\ \tau_1 &= M\theta_1 + p_{11}\tau_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя в систему (6) полученные значения средних времен пребывания в состояниях $e0 - M\theta_0$ и $e1 - M\theta_1$, а так же вероятность перехода p_{11} , получим:

$$\tau_0 = 1/\lambda + \tau_1; \quad \tau_1 = 1/\lambda + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \tau_1.$$

Отсюда находим

$$\tau_1 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda^2}; \quad \tau_0 = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2}.$$

Таким образом, среднее время безотказной работы системы (работы до первого отказа)

$$T_{по} = \tau_0 = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2}.$$

Наработка на отказ

$$T_O = \tau_1 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda^2}$$

и среднее время восстановления $T_B = 1/\mu$.

Коэффициент готовности

$$K_r = \frac{T_0}{T_0 + T_B} = \frac{\tau_1}{\tau_1 + 1/\mu} = \frac{\lambda\mu + \mu^2}{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2},$$

т.е. получаем результат, совпадающий с формулой для коэффициента готовности, полученной в марковской модели.

Анализируя построенные модели, можно сделать вывод, что хотя ПМ модель и является более громоздкой, однако ее состояния являются более приближенными к состояниям реальной системы, что позволяет вычислять не только вероятностные

характеристики (коэффициент готовности), но и временные (среднее время безотказной работы, наработку на отказ, среднее время восстановления).

Следует заметить, что за счет экспоненциальности распределений входных параметров системы удалось построить ПМП с дискретным пространством состояний: реальные состояния системы обладали ПМ свойством.

Примеры построения ПМ моделей систем с дискретным пространством состояний приведены также в [1,5,6].

5. ПРИМЕРЫ ПОЛУМАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

5.1. Система с облегченным резервом [1]

Система состоит из 2-х приборов: один работает, другой находится в состоянии облегченного резерва: интенсивность отказов рабочего прибора равна λ_1 , а резервного - λ_2 , $\lambda_1 > \lambda_2$. Если в некоторый момент времени рабочий прибор отказал, то мгновенно включается в работу резервный – считается, что надежность переключающих устройств абсолютна.

Интенсивность восстановления рабочего прибора равна μ_1 , а резервного - μ_2 . Восстановление начинается сразу же при возникновении отказа.

Все СВ, определяющие функционирование системы, распределены по показательному закону: $P\{\xi \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$. Имеется одно восстанавливающее устройство. Длительность восстановления есть случайная величина η , распределенная по показательному закону с параметром μ : $P\{\eta \leq t\} = 1 - e^{-\mu t}$.

Определить среднее время безотказной работы.

Введём следующее пространство состояний системы:

$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\},$$

где e_0 – оба прибора исправны, один включён в работу, другой находится в резерве;

e_1 – один прибор отказал, будучи включённым в работу, другой прибор включился в работу, находясь в резерве;

e_2 – отказал прибор, находящийся в резерве, другой прибор исправен и включён в работу.

e_3 – оба прибора восстанавливаются, причём один прибор отказал, будучи включённым в работу, а другой находясь в резерве;

e_4 – оба прибора восстанавливаются, причём оба отказали, будучи включёнными в работу.

Разобьём пространство состояний на непересекающиеся подмножества E_1 и E_2 :

$$E_1 = \{e_0, e_1, e_2\}; \quad E_2 = \{e_3, e_4\},$$

причём E_1 соответствует рабочему состоянию системы, E_2 – отказу системы.

Граф переходов системы изображён на рисунке 5.

Определим следующие случайные величины:

ξ_1 – время безотказной работы рабочего прибора с ФР

$$F\xi_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t} = P\{\xi_1 \leq t\};$$

ξ_2 - время безотказной работы резервного прибора с ФР

$$F\xi_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t} = P\{\xi_2 \leq t\};$$

η_1 - время восстановления рабочего прибора с ФР

$$F\eta_1(t) = 1 - e^{-\mu_1 t} = P\{\mu_1 \leq t\};$$

η_2 - время восстановления резервного прибора с ФР

$$F\eta_2(t) = 1 - e^{-\mu_2 t} = P\{\mu_2 \leq t\}.$$

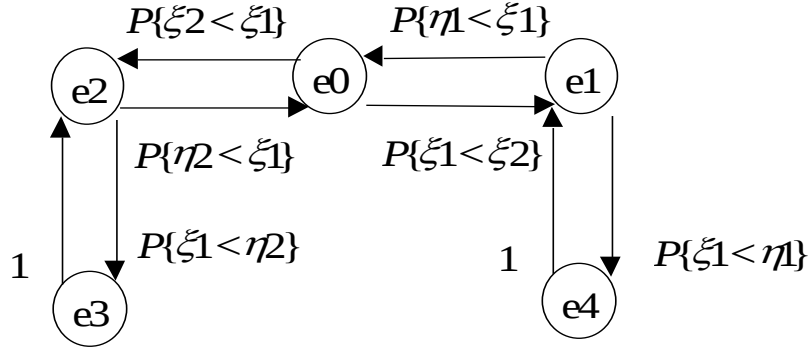


Рисунок 5 - Граф переходов ПМ модели системы с облегчённым резервом

Определим времена пребывания в состояниях.

В состоянии e_0 система находится до первого отказа резервного отказа или рабочего прибора, т.е.

$$\theta_0 = \min \{\xi_1, \xi_2\}.$$

Время пребывания в состоянии e_1 определяется временем безотказной работы рабочего прибора и длительностью восстановления отказавшего рабочего прибора, точнее наименьшим из них, т.е.

$$\theta_1 = \min \{\xi_1, \eta_1\}.$$

Аналогичным образом:

$$\theta_2 = \min \{\xi_1, \eta_2\}, \quad \theta_3 = \min \{\eta_1, \eta_2\}, \quad \theta_4 = \min \{\eta_1, \eta_1\}.$$

В силу независимости случайных величин ξ_1 и ξ_2 имеем:

$$P\{\min \{\xi_1, \xi_2\} > t\} = P\{\xi_1 > t\}P\{\xi_2 > t\} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}.$$

Определим ФР СВ θ_0 – времени пребывания в состоянии e_0 :

$$G_0(t) = P\{\theta_0 \leq t\} = P\{\min\{\xi_1, \xi_2\} \leq t\} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}.$$

Аналогично получаем:

$$G_1(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \mu_1)t}; \quad G_2(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \mu_2)t};$$

$$G_3(t) = 1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}; \quad G_4(t) = 1 - e^{-2\mu_1 t}.$$

Следовательно, средние времена пребывания в состояниях:

$$M\theta_0 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad M\theta_1 = \frac{1}{\lambda_1 + \mu_1}; \quad M\theta_2 = \frac{1}{\lambda_1 + \mu_2};$$

$$M\theta_3 = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2}; \quad M\theta_4 = \frac{1}{2\mu_1}.$$

Определим вероятности переходов аналогично тому, как это сделано в примере 2, т.е.

$$\begin{aligned} P_{01} &= P\{\xi_1 < \xi_2\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}; & P_{02} &= P\{\xi_2 < \xi_1\} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \\ P_{10} &= P\{\eta_1 < \xi_1\} = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}; & P_{20} &= P\{\eta_2 < \xi_1\} = \frac{\mu_2}{\lambda_1 + \mu_2}; \\ P_{23} &= P\{\xi_1 < \eta_2\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_2}; & P_{14} &= P\{\xi_1 < \eta_1\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (2) в условиях рассматриваемого примера примет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_0 &= \mu\theta_0 + p_{01}\bar{\tau} + p_{02}\bar{\tau}_2; \\ \bar{\tau}_1 &= \mu\theta_1 + p_{10}\bar{\tau}_0; \\ \bar{\tau}_2 &= \mu\theta_2 + p_{20}\bar{\tau}_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя значения вероятностей (7) в систему уравнений (8) и решая её относительно $\bar{\tau}_0$ находим:

$$\bar{\tau}_0 = T_{по} = \frac{1}{\lambda_1} \left[1 + \frac{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_1 + \mu_2)}{\lambda_1(\lambda_1 + \mu_2) + \lambda_2(\lambda_1 + \mu_1)} \right].$$

В частном случае, когда $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, получаем:

$$T_{по} = \frac{1}{\lambda_1} \left[\frac{2\lambda_1 + \lambda_2 + \mu}{\lambda_1 + \lambda_2} \right], \quad T_{по} = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2}.$$

Когда же $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$ и $\mu_1 = \mu$, то

Таким образом получили формулу для определения среднего времени безотказной работы в случае дублированной системы с ненагруженным резервом (пример п.4).

5.2. Система с последовательным соединением по надежности

Рассмотрим систему, состоящую из трех приборов, соединенных последовательно так, что отказ любого из них приводит к отказу системы. Предположим, что интенсивность отказов каждого из приборов λ , а интенсивность восстановления - μ .

Определить коэффициент готовности системы.

Кг (коэффициент готовности) системы зависит от числа восстанавливающих устройств. Рассмотрим случай, когда имеется одно, два или три восстанавливающих устройства.

Введем следующее пространство состояний системы:

$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3\},$$

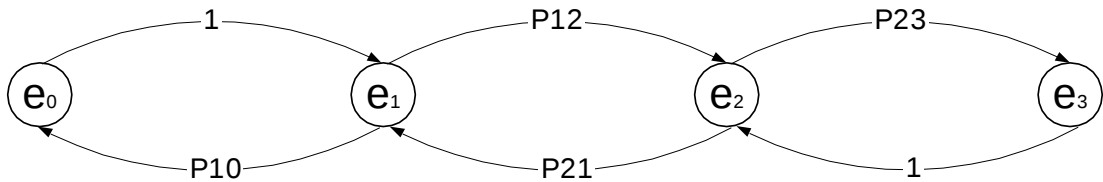
где e_0 - все три прибора работоспособны;

e_1 - два прибора работоспособны, один неисправен;

e_2 - один прибор работоспособен, два неисправны;

e_3 - все приборы неисправны.

Система работоспособна, если исправны все приборы. Следовательно, подмножество работоспособных составляет $E_1 = \{e_0\}$, а подмножество отказов со-



стояний $E_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Граф переходов системы изображен на рисунке 6.

Рисунок 6 - Граф переходов ПМ модели системы с последовательным соединением по надежности

Определим времена пребывания в состояниях.

Через $\xi_i, i=1,2,3$ обозначим случайную величину, равную промежутку времени наработки на отказ i -го прибора, через η_i - случайную величину, равную длительности восстановления i -м восстанавливающим устройством.

ФР случайных величин ξ_i и η_i имеют вид:

$$F_{\xi_i}(t) = P\{\xi_i \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}; \quad F_{\eta_i}(t) = P\{\eta_i \leq t\} = 1 - e^{-\mu t}.$$

В состоянии e_0 система находится до первого отказа одного из трех приборов, т.е.

$$\theta_0 = \min\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}.$$

Время пребывания в состоянии e_1 определяется временем наработки на отказ двух приборов и временем восстановления одного прибора, т.е.

$$\theta_1 = \min\{\xi_1, \xi_2, \eta_1\}.$$

Аналогичным образом

$$\theta_2 = \begin{cases} \min\{\xi_1, \eta_1\} & \text{— в случае одного восстанавливающего устройства;} \\ \min\{\xi_1, \eta_1, \eta_2\} & \text{— в случае двух и трех восстанавливающих устройств;} \end{cases}$$

$$\theta_3 = \begin{cases} \eta_1 & \text{— в случае одного восстанавливающего устройства;} \\ \min\{\eta_1, \eta_2\} & \text{— в случае двух восстанавливающих устройств;} \\ \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\} & \text{— в случае трех восстанавливающих устройств.} \end{cases}$$

Определим ФР времен пребывания в состояниях:

$$G_0(t) = P\{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} \leq t\} = 1 - e^{-3\lambda t}.$$

Аналогичным образом

$$G_1(t) = 1 - e^{-(2\lambda + \mu)t}.$$

$$G_2(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda + \mu)t} & \text{— в случае одного восстанавливающего устройства;} \\ 1 - e^{-(\lambda + 2\mu)t} & \text{— в случае двух и трех восстанавливающих устройств;} \end{cases}$$

$$G_3(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t} & \text{— в случае одного восстанавливающего устройства;} \\ 1 - e^{-2\mu t} & \text{— в случае двух восстанавливающих устройств;} \\ 1 - e^{-3\mu t} & \text{— в случае трех восстанавливающих устройств.} \end{cases}$$

Следовательно, средние времена пребывания в состояниях:

$$\mu\theta_0 = 1/3\lambda; \quad \mu\theta_1 = 1/(2\lambda + \mu).$$

$$\mu\theta_2 = \begin{cases} 1/(\lambda + \mu) & \text{— в случае одного восстанавливающего устройства;} \\ 1/(\lambda + 2\mu) & \text{— в случае двух и трех восстанавливающих устройств;} \end{cases}$$

$$\mu\theta_3 = \begin{cases} 1/\mu & \text{— в случае одного восстанавливающего устройства;} \\ 1/2\mu & \text{— в случае двух восстанавливающих устройств;} \\ 1/3\mu & \text{— в случае трех восстанавливающих устройств;} \end{cases}$$

Определим вероятности переходов аналогично тому, как это сделано в примере п.4:

$$P_{01} = P_{32} = 1; \quad P_{10} = P\{\eta_1 < \min\{\xi_1, \xi_2\}\},$$

т.е. вероятности того, что восстановление произойдет раньше отказа работающих приборов;

$$P_{12} = 1 - P_{10} = P\{\min\{\xi_1, \xi_2\} < \eta_1\},$$

т.е. вероятности того, что отказ работающих приборов произойдет раньше восстановления отказавших.

Аналогичным образом:

$$P_{21} = \begin{cases} P\{\eta_1 < \xi_1\} & \text{— в случае одного восстанавливающего устройства;} \\ P\{\min\{\eta_1, \eta_2\} < \xi_1\} & \text{— в случае двух и трех восстанавливающих устройств;} \end{cases}$$

$$P_{23} = 1 - P_{21} = \begin{cases} P\{\eta_1 < \xi_1\} & \text{— в случае одного восстанавливающего устройства;} \\ P\{\xi_1 < \min\{\eta_1, \eta_2\}\} & \text{— в случае двух и трех восстанавливающих устройств;} \end{cases}$$

Согласно формуле (4) выражения для вероятностей переходов принимают вид:

$$P_{10} = \mu/(2\lambda + \mu); \quad P_{12} = 2\lambda/(2\lambda + \mu).$$

$$P_{21} = \begin{cases} \mu/(\lambda + \mu) & \text{— в случае одного восстанавливающего устройства;} \\ 2\mu/(\lambda + 2\mu) & \text{— в случае двух и трех восстанавливающих устройств;} \end{cases}$$

$$P_{23} = \begin{cases} \mu/(\lambda + \mu) & \text{– в случае одного восстанавливающего устройства;} \\ \lambda/(\lambda + 2\mu) & \text{– в случае двух и трех восстанавливающих устройств;} \end{cases}$$

Для определения K_r воспользуемся формулой (5), которая для рассматриваемого примера может быть записана в виде:

$$K_r = \tau_0 / \tau_0 + \tau_1,$$

где $\tau_0 = \mu\theta_0 = 1/3\lambda$ - время наработки на отказ системы; τ_1 - время восстановления системы (Тв), равное времени пребывания в подмножестве отказов состояний E_2 .

Для определения τ_1 воспользуемся системой (2):

$$\begin{cases} \tau_1 = \mu\theta_1 + P_{12}\tau_2 \\ \tau_2 = \mu\theta_2 + P_{21}\tau_1 + P_{23}\tau_3, \\ \tau_3 = \mu\theta_3 + P_{32}\tau_2 \end{cases} \quad (9)$$

Решая систему (9), в случае одного восстанавливающего устройства получаем:

$$T_B = \frac{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2}{\mu^3}; \quad K_r = \frac{\mu^3}{6\lambda^3 + 6\lambda^2\mu + 3\lambda\mu^2 + \mu^3}.$$

В случае двух восстанавливающих устройств

$$T_B = \frac{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2}{2\mu^3}; \quad K_r = \frac{2\mu^3}{3\lambda^3 + 6\lambda\mu^2 + 6\lambda^2\mu + 2\mu^3}.$$

В случае трех восстанавливающих устройств

$$T_B = \frac{\lambda^2 + 3\lambda\mu + 3\mu^2}{3\mu^3}; \quad K_r = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^3.$$

6. ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ВРЕМЕНИ ВЫПОЛНЕНИЯ МНОГОЭТАПНОГО ЗАДАНИЯ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

В качестве основного показателя эффективности процесса функционирования вычислительных систем будем рассматривать математическое ожидание времени выполнения многоэтапного задания [8], т.е. система выполняет задание, состоящее из $N-1$ этапов. Предположим, что время выполнения задания на j -м этапе ($i = \overline{1, N-1}$) есть случайная величина η_i с функцией распределения $F_i(x)$. При последовательной стратегии, если на некотором этапе $k (1 \leq k \leq N-1)$ время выполнения задания превышает предельно допустимое h_k , то система вновь возвращается к выполнению задания первого этапа.

На практике эта ситуация соответствует случаям, когда в системе из-за ограниченности ресурсов не предусмотрено сохранение результатов функционирования системы на этапах, либо исчезает необходимость в повторном решении задачи из-за изменения ситуационной обстановки.

Опишем процесс функционирования вычислительной системы полумарковским случайным процессом, заданном на конечном фазовом пространстве $E = \{1, 2, \dots, N-1, N\}$. Для этого необходимо задать вероятности переходов вложенной цепи Маркова и времена пребывания в состояниях. Равенство $\xi_n = k$ будем понимать как факт пребывания системы при выполнении задания в момент времени с индексом n на этапе с индексом k .

Функционирование системы при последовательной стратегии состоит в следующем:

- в начальный момент времени система находится на первом этапе функционирования E_1 в течение некоторого случайного времени η_1 , после чего переходит на второй этап функционирования E_2 , если $\eta_1 < h_k$, или вновь выполняет задание первого этапа E_1 , если $\eta_1 \geq h_k$;

- переход системы при функционировании с этапа k на этап $(k+1)$ либо на первый этап происходит с вероятностями $P_{k,k+1}$ и $P_{k,1}$, причем $P_{k,1} + P_{k,k+1} \leq 1$ для любого k ;

- если происходит переход системы с этапа k на этап $(k+1)$, то задание на этапе выполняется в течение случайного времени η_k с функцией распределения $G_{k,k+1}(t)$.

Поведение системы при последовательной стратегии, таким образом, может быть описано двумя последовательностями: $\{\xi_{k,k}\}$ и $\{\eta_{k,k}\}$ или одной двумерной последовательностью $\{\xi_k, \eta_{k,k}\}$. Математическая модель функционирования системы в этом случае может быть задана характеристиками двумерного полумарковского процесса.

Запишем вероятности переходов вложенной цепи Маркова

$$\begin{cases} P\{\xi_{n+1} = k+1 | \xi_n = k\} = P\{\eta_k \leq h_k\} = F_k(h_k), \\ P\{\xi_{n+1} = 1 | \xi_n = k\} = P\{\eta_k > h_k\} = 1 - F_k(h_k) = \bar{F}_k(h_k), \\ P\{\xi_{n+1} = 1 | \xi_n = N\} = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Остальные переходные вероятности для последовательной стратегии функционирования системы равны нулю.

Запишем времена пребывания в состояниях:

$$\begin{cases} \theta_k = \min\{h_k, \eta_k\} = h_k \wedge \eta_k, \quad k = \overline{1, N-1} \\ \theta_N = \infty. \end{cases} \quad (11)$$

При успешном окончании всех этапов система оказывается в состоянии θ_N и остается там сколь угодно долго.

Введем случайную величину $\rho_{k,r}$, $k \in E_0, r \in \bar{E}_0$ - время пребывания полумарковского процесса в подмножестве E_0 с k -м начальным состоянием при условии, что при выходе из E_0 процесс попадает в r -е состояние.

Введем обозначения:

$$P\{\theta_{k,r} \leq x\} = G_{k,r}(x) \text{ и } t_{k,r} = M\{\rho_{k,r}\}.$$

Пусть множество E_0 есть множество всех этапов функционирования системы за исключением последнего. Введем величину $I_{k,r}(\theta_k)$ - индикаторы условных переходов при переходе системы на решение задач этапа r после этапа k , при условии, что время пребывания на k -ом этапе равно θ_k . Индикаторы условных переходов - случайные величины, принимающие значения 1 и 0 и удовлетворяющие следующим условиям:

$$\sum I_{k,r}(\theta_k) \equiv 1 \quad (12)$$

для всех $k \in E$.

Тогда для времени ρ_k пребывания в подмножестве состояний справедливо очевидное стохастическое соотношение

$$\rho_k = \theta_k + \sum_{r \in E_0} I_{k,r}(\theta_k) \rho_r. \quad (13)$$

Равенство (13) следует понимать в смысле совпадения функций распределения случайных величин в правой и левой частях. Аналогичное стохастическое соотношение можно записать для величины $\rho_{k,r}$:

$$\rho_{k,r} = I_{k,r}(\theta_k) \theta_{k,r} + \sum_{m \in E_0} I_{k,m}(\theta_k) [\theta_{k,m} + \rho_{m,r}]. \quad (14)$$

Переходя в последнем равенстве к математическим ожиданиям, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} t_{k,r} - \sum P_{k,m} M_{k,m} + P_{k,r} M_{k,r}, \\ t_{k,r} = M\{\rho_{k,r}\} \end{cases}, \quad (15)$$

где $M_{k,r} = M\{\theta_{k,r}\}$, $r = k+1, \quad k = \overline{1, N-1}$;

$P_{k,m}$ - переходные вероятности вложенной цепи Маркова;

$\theta_{k,r}$ - времена пребывания системы в k -ом состоянии при условии перехода в r - е состояние. Эти времена

$$\begin{aligned} \theta_{k,k+1} &= \eta_k, \quad \theta_{k,1} = h_k, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ \theta_{N,1} &= \theta. \end{aligned}$$

Остальные времена пребывания в состояниях на переходах равны нулю. Тогда

$$M_{k,r} = M\{\eta_k\}, \quad \text{если } r = k+1, \quad k = \overline{1, N-1};$$

$$M_{k,r} = h_k, \quad \text{если } r = 1;$$

$$M_{n,k} = 0.$$

Основное целевое назначение аналитической модели состоит в определении величин $t_{1,N}$ при $E_0 = \{1, 2, \dots, N-1\}$.

На основании уравнения (15) запишем систему уравнений

3. В соответствии с выбранным состоянием производится моделирование времени пребывания в этом состоянии: генерируется случайная величина θ_i с заданным законом распределения. Счетчик модельного времени увеличивается на время пребывания в текущем состоянии:

$$t_{\text{мод}} = t_{\text{мод}} + \theta_i.$$

4. С помощью матрицы переходных вероятностей выбираются последующие состояния системы: для того чтобы выбрать состояние на $i+1$ -ом шаге (после $i+1$ -ого перехода), используется строка этой матрицы, соответствующая состоянию S_i (на i -том шаге). Выбор производится с помощью генератора псевдослучайных чисел, который получает равномерно распределенное псевдослучайное число в интервале от 0 до 1 – сгенерированное число сравнивается с каждым элементом строки матрицы переходных вероятностей начиная с минимального значения в левом крайнем столбце. Сравнение продолжается до тех пор, пока очередное число будет равно или превысит сгенерированное число. Номер столбца и будет номером состояния на $i+1$ -ом шаге моделирования.

5. Система переходит в состояние $i+1$ и п.п. 3,4 повторяются до тех пор, пока время моделирования не превысит конечного значения:

$$t_{\text{мод}} \geq t_{\text{кон}}.$$

Для достижения качественных результатов моделирования рекомендуется $t_{\text{кон}}$ выбирать таким образом, чтобы получить число переходов системы из состояния в состояние не менее $10^3 * N$.

Таким образом получают две последовательности: последовательность состояний, в которых находится система и последовательность времен пребывания в состояниях – с помощью алгоритма имитационного моделирования осуществлен один из способов задания ПМП. Моделируя полученный ПМП, можно оценить различные характеристики исследуемой системы.

Пример 7.1. В условиях примера п. 4 построим имитационную модель ПМП с использованием алгоритма п.7.

Начальное состояние системы – $e0$ (см. граф переходов на рисунке 4).

Матрица переходных вероятностей состояний имеет вид:

$$\begin{array}{ccc} e0 & e1 & e2 \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu/(\lambda + \mu) & \lambda/(\lambda + \mu) \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} e0 \\ e1. \\ e2 \end{array} \end{array}$$

Функции распределения времен пребывания в состояниях:

$$G0(t) = G1(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0; \quad G2(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Зададимся конкретными значениями интенсивности отказов и интенсивности восстановления: $\lambda = 0.1$ (среднее время между отказами $1/\lambda = 10$ часов), $\mu = 3$ (среднее время восстановления $1/\mu = 1/3$ часа = 20 мин). Тогда матрица переходных вероятностей примет вид:

$$\begin{array}{ccc} e0 & e1 & e2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.968 & 0.032 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e0 \\ e1 . \\ e2 \end{matrix}$$

В кумулятивной форме:

$$\begin{matrix} e0 & e1 & e2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0.968 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e0 \\ e1 . \\ e2 \end{matrix} \end{matrix}$$

При таких исходных данных производится моделирование по алгоритму п.7. Для получения экспоненциально распределенных случайных величин используется формула [9]:

$$\theta = -\frac{1}{\mu} \ln(1 - RN),$$

где RN - равномерно распределенная случайная величина в интервале $[0...1]$, μ - параметр экспоненциального распределения.

Следовательно,

$$\theta_0 = \theta_1 = \frac{1}{\lambda} \ln(1 - RN); \quad \theta_2 = \frac{1}{\mu} \ln(1 - RN).$$

Для примера 5.1 время пребывания в состоянии e_0 генерируется следующим образом:

$$\theta_0 = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \ln(1 - RN).$$

и так далее.

Искомые характеристики системы определяются следующим образом:

- $T_{\text{ПО}}$ - среднее время безотказной работы системы (работы до первого отказа) определяется как суммарное время пребывания в состояниях $e0$ и $e1$ (время пребывания в подмножестве $E1$, начиная с состояния $e0$, отнесенное к количеству попаданий в эти состояния);

- $T_{\text{В}}$ - среднее время восстановления определяется как суммарное время пребывания в состоянии $e2$ (время пребывания в подмножестве $E2$), отнесенное к количеству попаданий в это состояние;

- K_r - коэффициент готовности определяется как суммарное время пребывания в состоянии $e1$ (в подмножестве $E1$), отнесенное к общему времени моделирования.

8. ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА

Задание 1. В условиях примеров п.п. 4,5 построить имитационную модель ПМП, описывающего функционирование системы с восстановлением с использованием алгоритма п. 7. Варианты заданий приведены в приложении А.

Полученные оценки характеристик системы необходимо сравнить с аналитическими результатами при тех же исходных данных.

Задание 2. В условиях примера п.6 при числе этапов $N=4$ выполнить: для нечетных вариантов – аналитический расчет, для четных – имитационное моделирование для оценки математического ожидания времени выполнения многоэтапного задания. Принять следующие предположения: времена выполнения задания на i -м этапе η_i – случайные величины со следующими видами законов распределения:

$R(a,b)$ - равномерное распределение с параметрами a, b ;

$E(\lambda)$ - экспоненциальное распределение с параметром λ ;

$N(m, \sigma)$ - нормальное распределение с параметрами m, σ .

При имитационном моделировании:

- для генерации времен пребывания в состояниях использовать соотношения для времен пребывания в состояниях на переходах;

- для получения нормально распределенных случайных величин использовать соотношение [9]:

$$N(m, \sigma) = m + N(0,1)\sigma,$$

где $N(0,1)$ – нормально распределенное псевдослучайное число с $m=0, \sigma=1$.

$$N(0,1) = \sum_{i=1}^{12} RN_i - 6,$$

где RN_i – равномерно распределенное псевдослучайное число на интервале $[0...1]$.

Результаты аналитического и имитационного моделирования сравнить. Варианты заданий приведены в приложении Б.

9. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

- 1) Описание системы.
- 2) Граф переходов.
- 3) Матрица вероятностей переходов.
- 4) Функции распределения времен пребывания в состояниях.
- 5) Формулы для искомых характеристик и аналитические расчеты.
- 6) Текст программы.
- 7) Результаты имитационного моделирования.
- 8) Выводы.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ - пространство состояний системы
 S_n – состояние системы на n -том шаге (после n -того перехода, $n \geq 0$)
 θ_n – время пребывания в состоянии S_n .
 $G_k(t)$ – функция распределения времени пребывания в k -том состоянии
 ВЦМ - вложенная цепь Маркова
 $M\theta$ - математическое ожидание случайной величины θ
 ПМ - полумарковский
 ПМП - полумарковский процесс
 ПМВ - процесс марковского восстановления
 СВ – случайная величина
 СП - случайный процесс
 ФПС - фазовое пространство состояний
 ФР - функция распределения
 K_r - коэффициент готовности
 $T_{по}$ – среднее время
 T_o – среднее время наработки на отказ
 T_B – среднее время восстановления

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Королук В.С. Стохастические модели систем/ В.С. Королук – К.: Наук. думка, 1989. – 208 с.
2. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания/ А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.М. Новиков и др. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 276 с.
3. Райншке К. Оценка надежности систем с использованием графов/ К. Райншке, И. Ушаков.– М.: Радио и связь, 1988. – 208 с..
4. Иглхарт Д.Л. Регенеративное моделирование сетей массового обслуживания/ Д.Л. Иглхарт, Д.С. Шедлер; Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1984. - 136 с.
5. Броди С.М. Расчет и планирование испытаний систем на надежность/ С.М. Броди.-К. : Наук. думка, 1970. – 192 с.
6. Сильвестров Д.С. Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний/ Д.С. Сильвестров. - М.: Сов. радио, 1980. - 272 с.
7. Скатков А.В. Математическое моделирование векторного процессора при циклических дисциплинах обслуживания/ А.В. Скатков, Е.В. Филатова// Вестник СевГТУ. - Севастополь, 2000.- Вып.№ 26.- С. 90-97.
8. Скатков А.В. Модели проектирования высокоэффективных систем вычислительной техники и автоматизированного управления/ А.В. Скатков.- К.: УМК ВО, 1992. – 80 с.
9. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука/ Р. Шеннон.- М.: Мир, 1978.- 418 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(обязательное)
Варианты задания 1

№ вар.	пример	λ	μ	Тпо	То	Тв	КГ
1	п.4	0.1	4	+	+	-	-
2	п.4	0.15	4	+	-	+	-
3	п.4	0.2	4	+	-	-	+
4	п.4	0.25	4	-	+	+	-
5	п.4	0.1	3	-	+	-	+
6	п.4	0.15	3	-	-	+	+
7	п.4	0.2	3	+	+	-	-
8	п.4	0.25	3	+	-	+	-
9	п.5.1	0.1,0.05	2,2.5	+	-	-	-
10	п.5.1	0.15,0.1	2,2.5	+	-	-	-
11	п.5.1	0.2,0.15	2,2.5	+	-	-	-
12	п.5.1	0.25,0.2	2,2.5	+	-	-	-
13	п.5.1	0.1,0.05	5,6	+	-	-	-
14	п.5.1	0.15,0.1	5,6	+	-	-	-
15	п.5.1	0.2,0.15	5,6	+	-	-	-
16	п.5.1	0.25,0.2	5,6	+	-	-	-
17	п.5.2(1в.у.)	0.1	6	-	+	-	+
18	п.5.2(1в.у.)	0.15	6	-	-	+	+
19	п.5.2(1в.у.)	0.2	6	-	+	+	-
20	п.5.2(2в.у.)	0.25	6	-	+	-	+
21	п.5.2(2в.у.)	0.1	2,5	-	-	+	+
22	п.5.2(2в.у.)	0.15	2,5	-	+	+	-
23	п.5.2(3в.у.)	0.2	2,5	-	+	-	+
24	п.5.2(3в.у.)	0.25	2,5	-	-	+	+
25	п.5.2(3в.у.)	0.25	2,5	-	+	+	-

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(обязательное)
Варианты задания 2

№ вар.	Тип модели	Н				F _i			
		h ₁	h ₂	h ₃	h ₄	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄
1 2	АМ ИМ	0. 6	0.7	0.9	0.5	R (0,1.2)	N (0.7,0.3)	E (1.11)	R (0,1)
3 4	АМ ИМ	0. 5	0.6	0.7	0.9	R (0,1)	N (0.6,0.2)	E (1.43)	N (0.9,0.3)
5 6	АМ ИМ	0. 9	0.6	0.7	0.5	R (0,1.8)	N (0.6,0.2)	E (1.43)	E (2)
7 8	АМ ИМ	0. 9	0.7	0.6	0.5	R (0,1.8)	E (1.43)	N (0.6,0.2)	R (0,1)
9 10	АМ ИМ	0. 8	0.6	0.7	0.5	R (0,1.6)	E (1.66)	N (0.7,0.3)	E (2)
11 12	АМ ИМ	0. 5	0.6	0.7	0.8	R (0,1)	E (1.66)	N (0.7,0.3)	N (0.8,0.3)
13 14	АМ ИМ	0. 6	0.7	0.8	0.9	N (0.6,0.2)	E (1.43)	R (0,1.6)	N (0.9,0.3)
15 16	АМ ИМ	0. 9	0.8	0.6	0.7	N (0.9,0.3)	E (1.25)	R (0,1.2)	E (1.43)
17 18	АМ ИМ	0. 3	0.4	0.5	0.6	N (0.3,0.1)	E (2.5)	R (0,1)	R (0,1.2)
19 20	АМ ИМ	0. 4	0.5	0.6	0.7	E (2.5)	R (0,1)	N (0.6,0.2)	E (1.43)
21 22	АМ ИМ	0. 7	0.6	0.5	0.4	E (1.43)	R (0,1.2)	N (0.5,0.2)	R (0,0.8)
23 24	АМ ИМ	0. 6	0.5	0.4	0.3	E (1.66)	R (0,1)	N (0.4,0.2)	N (0.3,0.1)
25 26	АМ ИМ	0. 3	0.6	0.4	0.5	N (0.3,0.1)	R (0,1.2)	E (2.5)	N (0.5,0.2)
27 28	АМ ИМ	0. 6	0.3	0.5	0.4	N (0.6,0.2)	R (0,0.6)	E (2)	E (2.5)
29 30	АМ ИМ	0. 4	0.6	0.3	0.5	N (0.4,0.2)	R (0,1.2)	E (3.33)	R (0,1)