

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторных работ
по дисциплине «Моделирование вычислительных
процессов и систем»
для студентов дневной формы обучения
направления 6.050102 «Компьютерная
инженерия»

часть 1

МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Севастополь
2014

УДК 004.02

Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Моделирование вычислительных процессов и систем» для студентов направления «Компьютерная инженерия» дневной формы обучения. Часть 1/ Е.Н. Машенко, В.И. Шевченко – Севастополь, Изд-во СевНТУ, 2014. – 28 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в освоении методов построения моделей с использованием теории марковских цепей и теории массового обслуживания.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники, протокол № 11 от 25 июня 2014 г.

Рецензент:

Балакирева И.А., к.т.н., доцент кафедры кибернетики и вычислительной техники.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Содержание

	Стр
Лабораторно-практическое занятие № 1. Дискретные и непрерывные марковские цепи	4
Лабораторно-практическое занятие №2. СМО с отказами. СМО с очередями	11
Лабораторно-практическое занятие №3. СМО с многомерным входящим потоком. СМО с относительными приоритетами	18
Лабораторно-практическое занятие № 4. СМО с абсолютными и смешанными приоритетами	24
Библиографический список	31

1. Лабораторно-практическое занятие № 1. Дискретные и непрерывные марковские цепи

1.1 Цель занятия

Цель занятия - освоить методику построения моделей вычислительных систем с помощью аппарата дискретных и непрерывных марковских цепей; научиться строить марковские цепи по содержательному описанию задачи; научиться доказывать неприводимость цепи, находить вероятности состояний системы на некотором шаге, а также финальные вероятности.

1.2 Краткие теоретические сведения

Случайный процесс $X(t)$ называется **марковским**, если для любого момента времени $t = t_0$ вероятность любого его состояния (значения) в момент $t, t > t_0$, зависит только от его состояния в момент t_0 и не зависит от всех состояний при $t < t_0$.

Если X принимает дискретные значения (состояния) $S_1, \dots, S_n$, то марковский процесс называется **марковской цепью**.

Марковская цепь называется **однородной**, если её свойства, как случайного процесса, не зависят от сдвигов по оси времени. (Свойство однородности цепи соответствует свойству стационарности общего случайного процесса).

Рассмотрим дискретную однородную марковскую цепь с конечным числом состояний (значений) $S_1, \dots, S_n$. Переходы из состояния в состояние происходят только в дискретные моменты $t=0,1,2,\dots$. Промежутки между такими моментами называются **тактами**; такты нумеруются так же, как и моменты, т.е. моменту 0 соответствует такт 0, и т.д.

Как случайный процесс, такая цепь полностью определяется вектором $p(k)$ распределения вероятностей состояний в момент k :

$$p(k) = (p_1(k), \dots, p_i(k), \dots, p_n(k)),$$

где $p_i(k)$ – вероятность того, что цепь в момент k находится в состоянии S_i .

Для $k=0,1,\dots$ имеет место равенство:

$$\sum_{i=1}^n p_i(k) = 1. \quad (1.1)$$

Для вычисления любого $p(k)$ достаточно знать всего два объекта: вектор $p(0) = (p_1(0), \dots, p_i(0), \dots, p_n(0))$ начального распределения вероятностей состояний и матрицу:

$$P = (p_{ij})_n^n,$$

где p_{ij} – вероятность перехода цепи из S_i в S_j за один такт.

Связь между векторами $p(k)$ и $p(k-1)$ устанавливается по формуле

$$p(k) = p(k-1) * P \quad (1.2)$$

Эта формула, в частности, позволяет по известным $p(0)$ и P вычислить $p(1)$, по $p(1)$ и P определить $p(2)$ и т.д., вплоть до произвольного $p(k)$.

Марковская цепь называется **неприводимой марковской цепью**, если из любого её состояния можно перейти в любое другое состояние за конечное число тактов.

Для неприводимой марковской цепи существуют пределы:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_i(k) = p_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Числа p_i называются **финальными вероятностями** состояний цепи; соответственно вектор $p = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$ называется **вектором финальных вероятностей**.

Вектор финальных вероятностей можно найти, полагая в формуле (1.2) $p(k) = p(k-1) = p$ и рассматривая полученное таким образом соотношение как уравнение относительно p . К этому уравнению необходимо добавить условие нормировки (1.1), где $p(k) = p$.

В результате получим систему уравнений для отыскания финальных вероятностей:

$$\left. \begin{aligned} P &= P \cdot P \\ \sum_{i=1}^n P_i &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (1.4)$$

Финальные вероятности состояний существуют и для непрерывных марковских цепей, только необходимо учитывать специфику, создаваемую фактом континуальности времени. Именно, здесь неприводимая цепь определяется как цепь, в которой из любого состояния можно перейти в любое другое за конечное время (а не за конечное число тактов); далее, матрица P здесь заменяется на матрицу $\Lambda = (\lambda_{ij})_n^n$, где λ_{ij} – интенсивность переходов цепи из состояния S_i в S_j , имеющая смысл среднего количества переходов за единицу времени.

Сами финальные вероятности p_i определяются как

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

где $p_i(t)$ – вероятность пребывания цепи в состоянии S_i в момент t .

Компоненты p_i вектора $(p_1, \dots, p_n)$ финальных вероятностей вычисляются как корни системы уравнений Колмогорова:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_j \lambda_{ji} &= p_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (1.6)$$

В заключение заметим, что в системах (1.4) и (1.6) одно из первых n алгебраических уравнений является избыточным, и перед решением системы его (обычно самое громоздкое) необходимо удалить.

1.3 Примеры моделей

Задача 1.1. Дискретная однородная марковская цепь задана следующей матрицей переходов:

$$P = \begin{array}{c|ccc} & S1 & S2 & S3 \\ \hline S1 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ S2 & 0 & 0 & 1 \\ S3 & 0,2 & 0,8 & 0 \end{array}$$

Вектор начального распределения вероятностей $p(0)=(0,0,1)$. Требуется:

1. построить граф переходов;
2. вычислить $p(3)$ (распределение вероятностей на 3-м шаге) ;
3. доказать неприводимость цепи и вычислить финальные вероятности $p=(p1,p2,p3)$.

Решение

1. Граф переходов приведен на рисунке 1.1.

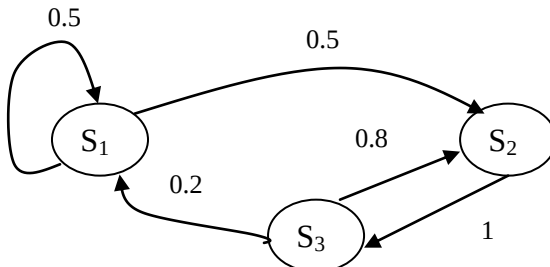


Рисунок 1.1 – Граф переходов дискретной марковской цепи

2. Распределение вероятностей на 3-м шаге вычисляем, используя формулу (1.2): $p(1) = p(0) * P$, или

$$p(1) = (0,0,1) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} = (0,2 \ 0,8 \ 0),$$

$$p(2) = (0,2 \ 0,8 \ 0) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} = (0,10,1 \ 0,8),$$

$$p(3) = (0,1 \ 0,1 \ 0,8) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} = (0,21 \ 0,69 \ 0,1),$$

3. Из графа следует, что цепь неприводима, так что вектор финальных вероятностей $p=(p_1, p_2, p_3)$ существует. Находим его из системы (1.4)

$$\left. \begin{aligned} 0,5p_1 + 0,2p_3 &= p_1 \\ 0,5p_1 + 0,8p_3 &= p_2 \\ p_2 &= p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Отбрасывая одно из первых двух уравнений, как лишнее, и решая оставшуюся систему, получим $p_1=0,167$, $p_2=p_3=0,417$.

Задача 1.2. Двухразрядный двоичный счетчик в нулевом такте сброшен. Вероятность поступления 1 на его вход в каждом такте одинакова и равна 0,4. Вычислить финальные вероятности состояний.

Решение

1. Граф переходов приведен на рисунке 1.2.

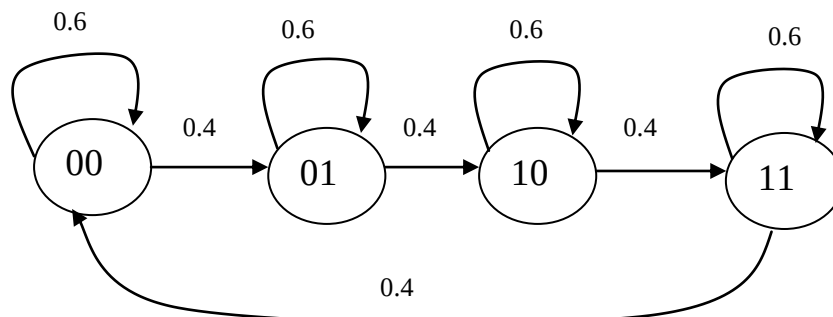


Рисунок 1.2 – Граф переходов дискретной марковской цепи

2. Вектор начального распределения вероятностей $p(0)=(1,0,0,0)$.

3. Матрица переходов

	00(p0)	01(p1)	10(p2)	11(p3)
00(p0)	0,6	0,4	0	0
01(p1)	0	0,6	0,4	0
10(p2)	0	0	0,6	0,4
11(p3)	0,4	0	0	0,6

Финальные вероятности состояний найдем, составив и решив систему (1.6):

$$\left. \begin{array}{l} S_0 : p_0 = 0,6 p_0 + 0,4 p_3 \\ S_1 : p_1 = 0,6 p_1 + 0,4 p_0 \\ S_2 : p_2 = 0,6 p_2 + 0,4 p_1 \\ S_3 : p_3 = 0,6 p_3 + 0,4 p_2 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{array} \right\}.$$

Отбрасываем первое уравнение и решаем остальные методом последовательной подстановки:

$$\begin{array}{ll} 0,4 p_0 = 0,4 p_1 & p_0 = p_1 \\ 0,4 p_1 = 0,4 p_2 & p_1 = p_2 \\ 0,4 p_2 = 0,4 p_3 & p_3 = p_2 \\ 4 p_0 = 1 & P_0 = 0,25 \\ P_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 0,25 & \end{array}$$

Задача 1.3. Вычислить финальные вероятности состояний следующей непрерывной марковской цепи:

	S1	S2	S3	S4
S1	0	2	2	0
S2	0	0	4	0
S3	0	0	0	6
S4	3	0	1	0

Решение

1. Граф переходов приведен на рисунке 1.3.

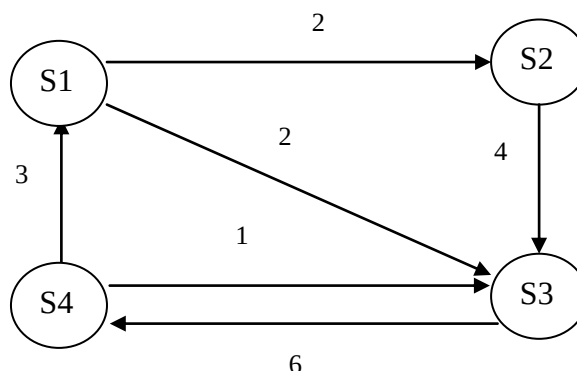


Рисунок 1.3 – Граф переходов непрерывной марковской цепи

2. Финальные вероятности (система уравнений Колмогорова):

$$\begin{cases} S1: (2+2)p_1 = 3p_4 \\ S2: 4p_2 = 2p_1 \\ S3: 6p_3 = 2p_1 + 4p_2 + p_4 \\ S4: (3+1)p_4 = 6p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Отбрасываем уравнение для S3 как самое сложное и решаем остальные методом последовательной подстановки (выражаем все вероятности через p_1). Получаем следующее решение:

$$p_1 = 0,305; \quad p_2 = 0,153; \quad p_3 = 0,136; \quad p_4 = 0,406$$

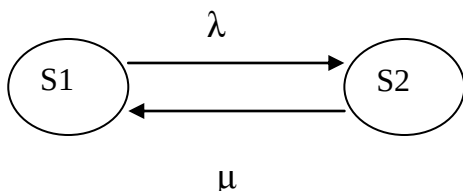
$$\text{Проверка: } p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Задача 1.4. ЭВМ отказывает с интенсивностью λ раз в час и восстанавливается с интенсивностью μ раз в час. Определить финальные вероятности пребывания ЭВМ в работоспособном и неисправном состояниях.

Решение

Пусть S1 – состояние исправности, S2 – состояние отказа.

1. Граф переходов



2. Финальные вероятности (система уравнений Колмогорова).

$$\begin{cases} S1: \lambda p_1 = \mu p_2 \\ S2: \mu p_2 = \lambda p_1 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Отсюда:

$$p_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \quad p_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Домашнее задание:

- решить задачу 1.2 при вероятности поступления 1, равной 0,3;
- решить задачу 1.4 при $\lambda = 3$, $\mu = 6$ (час⁻¹).

1.4 Задание на лабораторную работу №1

Задача 1.5. В понедельник ЭВМ исправна и за сутки с вероятностью $P_{\text{отк}}$ она выходит из строя, но за следующие сутки восстанавливается с вероятностью $P_{\text{в}}$. Определить вероятность того, что в субботу машина будет исправна, и вычислить финальные вероятности ее состояний. Варианты заданий приведены в таблице 1.1. Решить задачу с использованием среды Mathcad.

Таблица 1.1 - Варианты задания 1.5

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
вар												
$P_{\text{отк}}$	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,2	0,21
$P_{\text{в}}$	0,8	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,9	0,91

Задача 1.6. Программист разрабатывает программный модуль. Работа заключается в циклической смене трех стадий: П - программирование, О - отладка и Р - решение контрольного примера. Переходы к стадиям производятся с интенсивностью λ , μ и ν соответственно. Вычислить финальные вероятности стадий модуля. Рассчитать значения вероятностей для своего варианта. Варианты заданий приведены в таблице 1.2. Решить задачу с использованием среды Mathcad.

Таблица 1.2 - Варианты задания 1.6

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
вар.												
λ	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4
μ	3	4	5	1	2	3	5	3	4	3	2	1
ν	6	7	8	2	3	4	1	2	3	5	6	4

1.5 Контрольные вопросы

1. Какой случайный процесс называется марковским?
2. Что такое марковская цепь? Дискретная марковская цепь? Непрерывная марковская цепь?
3. Какими двумя объектами полностью определяется дискретная марковская цепь, как случайный процесс?
4. Какая марковская цепь называется неприводимой?
5. Что такое вектор финальных вероятностей состояний марковской цепи?
6. Что такое матрица вероятностей переходов дискретной марковской цепи?

7. Что такое матрица интенсивностей переходов непрерывной марковской цепи?

8. Для чего используется система уравнений Колмогорова?

Лабораторно - практическое занятие № 2. СМО с отказами и очередями

2.1 Цель занятия

Цель занятия - освоить методику построения моделей СМО с отказами и очередями с помощью аппарата теории массового обслуживания; научиться определять вероятностные, временные и другие характеристики эффективности подобных систем.

2.2 Краткие теоретические сведения

2.2.1 СМО с отказами

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО), на вход которой поступает простейший поток заявок интенсивности λ . Система имеет N каналов обслуживания. Заявка, пришедшая в систему и заставшая свободным хотя бы один канал, немедленно принимается на обслуживание и проходит его за случайное, распределенное по показательному закону, время со средним значением $\nu = 1/\mu$, где μ - интенсивность обслуживания. Заявка, заставшая все каналы занятыми, получает отказ.

Обозначим через S_i состояние СМО, в котором на обслуживании находится ровно i заявок, через p_i - вероятность состояния S_i . Тогда смена состояний образует однородную неприводимую марковскую цепь, а вероятности p_i могут быть найдены из уравнений (1.1). Решая эти уравнения, получим:

$$p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0, i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

где $\rho = \lambda/\mu$,

$$p_0 = 1 / \sum_{i=0}^N \frac{\rho^i}{i!} \quad (2.2)$$

Соотношения (2.1), (2.2) известны как формулы Эрланга. Вероятность p_0 имеет, очевидно, смысл вероятности простоя СМО, а p_N - вероятности отказа заявке в обслуживании.

2.2.2 СМО с очередями

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО), на вход которой поступает простейший поток заявок интенсивности λ . Система имеет n каналов обслуживания. Заявка, пришедшая в систему и заставшая свободным хотя бы один канал, немедленно принимается на обслуживание и проходит его за случайное, распределенное по показательному закону, время со средним значением $\nu = 1/\mu$. Очередь не ограничена, дисциплина выбора – FIFO.

Обозначим через S_i состояние СМО, в котором на обслуживании находится ровно i заявок, через p_i - вероятность состояния S_i . Тогда смена состояний образует однородную неприводимую марковскую цепь, а вероятности p_i могут быть найдены из уравнений (1.1). Решая эти уравнения, получим:

$$P_i = \begin{cases} \frac{R^i}{i!} P_0, & i \leq N \\ \frac{R^i}{N!} \cdot \frac{P_0}{N^{i-N}} & i > N \end{cases}$$

Условие существования стационарного режима в данной СМО следующее: $R < N$, где R - среднее число занятых каналов.

Основные характеристики эффективности приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

М/М/Н/∞ (N каналов обслуживания)	М/М/1/∞ (1 канал обслуживания)
1) R – среднее число занятых каналов	
$R = \lambda \cdot \nu$	$\rho = \lambda \cdot \nu$
2) P_0 – вероятность простоя	
$P_0 = \left[\sum_{i=0}^N \frac{R^i}{i!} + \frac{R^{N+1}}{N!(N-R)} \right]^{-1}$	$P_0 = 1 - \rho$
3) L- среднее число заявок в очереди	
$L = P_0 \frac{R^{N+1}}{(N-1)!(N-R)^2}$	$L = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
4) n – среднее число заявок в системе	
$n = L + R$	$n = L + \rho = \frac{\rho}{1-\rho}$
5) w - среднее время пребывания заявки в очереди	
$w = \frac{L}{\lambda}$	$w = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$
6) u – среднее время пребывания заявки в системе	
$u = \frac{n}{\lambda}$	$u = \frac{n}{\lambda} = \frac{\nu}{1-\rho}$

2.3 Примеры моделей

Задача 2.1. На четырехканальную АТС поступает простейший поток вызовов с $\lambda=3\text{мин}^{-1}$. При приеме вызова разговор продолжается случайное экспоненциальное время, в среднем равное 2 мин.

Вычислить:

- 1) вероятность отказа при наборе номера;
- 2) вероятность полного простоя АТС.

Решение

По формулам Эрланга имеем при $\rho = \lambda \cdot \nu = 3 \cdot 2 = 6$

$$1) P_{отк} = P_4 = \frac{\rho^4}{4!} \cdot P_0 = 0,47,$$

$$\text{где } P_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} \right]^{-1}$$

$$2) P_{прост} = P_0 = 0,009$$

Задача 2.2. Определить загрузку ρ СМО М/М/Н/0, при которой вероятность простоя равна вероятности занятости одного канала.

Решение

$$P_{прост} = P_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3!} + \dots + \frac{\rho^N}{N!} \right]^{-1};$$

$$P_1 = \frac{\rho^1}{1!} P_0; \quad P_{прост} = P_1 \rightarrow \rho = 1.$$

Задача 2.3. Два сотрудника ГАИ фиксируют простейший с интенсивностью $\lambda = 10 \text{ час}^{-1}$ поток нарушений на транзитной магистрали. Сотрудник фиксирует нарушение и наказывает водителя в среднем за 12 минут. Определить:

- 1) Количество K безнаказанных водителей за смену $T = 8$ часов;
- 2) Время простоя $T_{прост}$ сотрудников за смену в человеко – часах.

Решение

Определим следующие состояния СМО:

S_0 – простой сотрудников ГАИ;

S_1 – работает один сотрудник;

S_2 – работают оба сотрудника (появившийся нарушитель получает «отказ в обслуживании» и проезжает безнаказанно).

$$1) \rho = \lambda \cdot v = 10 \cdot 12/60 = 2$$

$$P_{отк} = P_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot P_0 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} \right]^{-1} = 0,4;$$

$$K = T \cdot \lambda \cdot P_{отк} = 8 \cdot 10 \cdot 0,4 = 32 \text{ (безнаказанных водителя);}$$

2)

$$T_{просл} = 2 \cdot T \cdot P_0 + T \cdot P_1 = T(2P_0 + P_1) =$$

$$= T \cdot (2 \cdot 1 + \rho) \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} \right]^{-1} = \frac{8(2+2)}{1+2+2} = 6,4 \text{ (чел/час)}.$$

Задача 2.4. Оценить среднее время ожидания клиентом международной телефонной станции (МТС) разговора в направлении Н, если число заказов в час равно 18, средняя длительность разговора – 5 минут, число линий в направлении Н равно 2.

Решение

Загрузка МТС в направлении Н равна $\rho = \lambda \cdot v = 18 \text{ час}^{-1} \cdot 1/12 \text{ час} = 1,5$, что меньше числа линий, 2, так что стационарный режим существует.

$$W = \frac{L}{\lambda},$$

Искомое время W равно, по формуле Литтла,

где L – средняя длина очереди. Ее можно оценить по формуле для $M/M/N/\infty$ при $N = 2$, $R = 1,5$. Получим при $\rho = R/N = 0,75$

$$P_0 = \left[1 + 1,5 + \frac{1,5^2}{2} + \frac{1,5^3}{2(2-1,5)} \right]^{-1} = \frac{1}{7}; L = \frac{1,53 \cdot 0,75}{2(1-0,75)^2} \cdot \frac{1}{7} = 1,93$$

$$\text{так что } W = 1,93 / 18 = 0,107 \text{ (час)} = 6,43 \text{ мин.}$$

Задача 2.5. Два сотрудника ГАИ дежурят на автомагистрали, по которой следует простейший поток машин с интенсивностью 100 час^{-1} . Правила нарушает каждый 10-й водитель. Один сотрудник фиксирует нарушения и ставит автомобили в очередь, другой оформляет нарушения за случайное время, равное в среднем 4 минуты. Определить:

- 1) Среднее время задержки нарушителя у поста ГАИ;
- 2) Среднюю длину цепочки машин у поста.

Решение

Имеем СМО $M/M/1/\infty$ с $\lambda = 100 \cdot 0,1 = 10 \text{ час}^{-1}$, $v = 4 \text{ мин} = 0,067 \text{ час}$, так что $\rho = \lambda \cdot v = 0,67 < 1$ и стационарный режим существует.

- 1) $u = v / (1 - \rho) = 4 / (1 - 0,67) = 12 \text{ мин} = 1/5 \text{ часа}$
 2) По формуле Литтла $m = \lambda * u = 10 * 1/5 = 2 \text{ машины}$

Задача 2.6 К компьютеру поступают задания с интенсивностью $\lambda = 1.5$ заданий в секунду (поток заданий простейший). Найти вероятность того, что за две секунды: а) не поступит ни одного задания; б) поступит ровно одно задание; в) поступит хотя бы одно задание.

Решение

Случайная величина X - число заданий за две секунды - распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda \cdot \tau = 1.5 \cdot 2 = 3$.

Вспоминаем из лекции, что случайная величина X распределена по закону Пуассона, если вероятность того, что она примет определенное значение k , выражается формулой:

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda \tau)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \tau}$$

а) Вероятность того, что вызовов не будет ($k = 0$): $P(X = 0) = e^{-3} \approx 0.498$

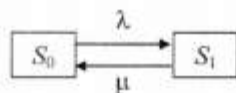
б) Вероятность поступления одного задания ($k = 1$): $P(X = 1) = \frac{3^1}{1!} e^{-3} \approx 0.1494$

в) Вероятность поступления хотя бы одного задания ($k > 1$): $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.498$.

Задача 2.7 (одноканальная СМО с отказами). Интенсивность потока телефонных звонков в агентство по заказу железнодорожных билетов, имеющему один телефон, составляет 16 вызовов в час. Продолжительность оформления заказа на билет равна 2.4 минуты. Определить относительную и абсолютную пропускную способность этой СМО и вероятность отказа (занятости телефона). Сколько телефонов должно быть в агентстве, чтобы относительная пропускная способность была не менее 0.75.

Решение

Имеем систему массового обслуживания с одним каналом (один телефонный номер) с отказами. Получаем параметры $\lambda = \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$ (интенсивность входящего потока, 4/15 заявок в минуту), $\mu = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12}$ (интенсивность потока обслуживания, 5/12 заявок за минуту). Определим характеристики работы данной СМО в предельном стационарном режиме.



S_0 - канал обслуживания свободен;

S1 - канал обслуживания занят.

В предельном стационарном режиме система алгебраических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \mu p_1 = \lambda p_0 \end{cases}$$

т.е. система вырождается в одно уравнение.

Вероятность того, что система свободна (телефонная линия свободна, заявок нет):

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{5/12}{4/15 + 5/12} = \frac{25}{41} \approx 0,61$$

Вероятность того, что в системе заявка (телефонная линия занята). Она же – вероятность отказа в обслуживании:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{4/15}{4/15 + 5/12} = \frac{16}{41} \approx 0,39$$

Относительная пропускная способность: $Q = 1 - P_{отк}$, $Q = p_0 = 0,61$

Абсолютная пропускная способность: $A = Q\lambda = 0,61 \cdot \frac{4}{15} \approx 0,163$

Среднее время обслуживания заявки: $T_s = \frac{1}{\mu} = 2,4$ минуты, среднее время простоя канала (телефонной линии) $T_{st} = \frac{1}{\lambda} = \frac{15}{4} = 3,75$ минуты.

Среднее время пребывания заявки в системе:
 $T_{sys} = \frac{1}{\lambda + \mu} = \frac{1}{4/15 + 5/12} = \frac{60}{41} \approx 1,46$ минуты.

Рассмотрим случай с двумя телефонами. Имеем многоканальную (число каналов $k = 2$) систему массового обслуживания с отказами.

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^k \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1} = \left(\frac{0,64^0}{0!} + \frac{0,64^1}{1!} + \frac{0,64^2}{2!} \right)^{-1} \approx 0,542.$$

$$p_i = p_0 \frac{\rho^i}{i!}, \text{ поэтому } p_2 = 0,542 \frac{0,64^2}{2!} \approx 0,111.$$

Относительная пропускная способность: $Q = 1 - p_2 = 1 - 0,111 = 0,889$.

Так как $0,889 > 0,75$, двух телефонов достаточно, чтобы обеспечить нужную пропускную способность системы.

Домашнее задание:

- 1) Определить загрузку ρ СМО М/М/Н/0, при которой вероятность отказа равна вероятности занятости одного канала.
- 2) В условиях задачи 2.3 при какой интенсивности потока нарушений % безнаказанных водителей не превысит 10%?
- 3) В условиях задачи 2.4 число заказов возросло до 23 в час, т.е. примерно на 30%. Во сколько раз при этом увеличилось время ожидания разговора?

2.4 Задание на лабораторную работу №2

Задача 2.8. Радиолокационная станция имеет N каналов наведения истребителей на цель. Время наведения распределено по экспоненциальному закону со средним t минут. Поток целей простейший, в среднем R бомбардировщиков в M минут. Определить: 1) Вероятность пропуска цели системой наведения; 2) Вероятность поражения цели, если надежность попадания истребительных ракет - $P_{\text{поп}}$. Решить задачу с использованием среды Mathcad.

Варианты задания 2.8

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	3	4	5	3	4	5	3	4	5	3	4	5
T	2	1,5	1	1	1,5	2	1,5	1	2	2	1	1,5
R	3	4	5	3	5	4	3	4	5	3	4	5
M	2	2	2	1	1,5	2	2	1,5	2	2,5	2	2
$P_{\text{поп}}$	0,99	0,98	0,97	0,97	0,98	0,99	0,98	0,97	0,99	0,97	0,99	0,98

Задача 2.9. Студенческий ВЦ располагает N ПЭВМ, каждая из которых занимается студентом на случайное время, равное в среднем v часа. Поток подходов к ПЭВМ – простейший, интенсивностью λ подходов в час. Вычислить среднее время пребывания студента в ВЦ.

Решить задачу с использованием среды Mathcad.

Варианты задания 2.9:

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	3	4	5	3	4	5	3	4	5	3	4	5
λ	5	6	8	4	5	7	6	4	6	3	7	5
v	0,5	0,6	0,5	0,6	0,7	0,6	0,4	0,8	0,7	0,8	0,5	0,8

2.5 Контрольные вопросы

1. Что такое СМО с отказами?

2. Что такое интенсивность потока заявок?
3. Как связаны между собой среднее время и интенсивность обслуживания?
4. Какие характеристики обслуживания в СМО с отказами Вам известны?
5. Всегда ли в СМО с отказами возможен стационарный режим? Почему?
6. Что такое СМО М/М/Н?
7. Как выглядит условие существования стационарного режима для СМО без потерь?
8. Что такое вероятность простоя СМО?
9. Что такое время ожидания в СМО? Время пребывания?
10. Как связаны между собой время ожидания и длина очереди?
11. При каких условиях в СМО справедлива формула Литтла?

3. Лабораторно-практическое занятие № 3. СМО с многомерным входящим потоком. СМО с относительными приоритетами

3.1. Цель занятия

Цель занятия - освоить методику построения моделей СМО с многомерным входящим потоком и СМО с относительными приоритетами с помощью аппарата теории массового обслуживания; научиться определять вероятностные, временные и др. характеристики эффективности подобных систем.

3.2. Краткие теоретические сведения

3.2.1. СМО с многомерным входящим потоком

Особенностью СМО с многомерным входящим потоком является то, что входящий поток заявок образуется с помощью суперпозиции n входящих потоков. Для каждого потока определены свои интенсивности поступления λ_i и времена обслуживания ν_i , а также их вторые начальные моменты $\nu_i^{(2)}$ $i=1, \dots, n$. Все заявки поступают в общий накопитель и выбираются из него на обслуживание в порядке «первый пришел – первый обслужен».

Условие существования стационарного режима – суммарная загрузка СМО всеми потоками должна быть меньше единицы:

$$R < 1, \quad \text{где } R = \rho_1 + \dots + \rho_n \text{ и } \rho_i = \lambda_i \vartheta_i, \quad i=1, \dots, n.$$

Характеристики СМО для стационарного режима вычисляются по формулам, приведенным в таблице 3.1.

3.2.2. СМО с относительными приоритетами

Основная цель введения приоритетов в системах массового обслуживания – это уменьшение времени ожидания заявок одних типов за счет увеличения этого времени у других.

Приоритет – это преимущество в очереди на обслуживание в канале. Формально для n -мерного входящего потока приоритет определяется номером i типа заявки: чем меньше i , тем больше (старше) приоритет.

Для организации обслуживания в СМО с n приоритетами создаются n накопителей, в которых могут находиться очереди $O_1, \dots, O_k, \dots, O_n$ заявок соответствующих приоритетов. Правило приоритетного обслуживания таково: заявка из очереди O_{k+1} не обслуживается до тех пор, пока есть хотя бы одна заявка в очереди O_k , $k=1, 2, \dots, n-1$. В пределах очереди O_k заявки выбираются на обслуживание в порядке «первый пришел – первый обслужен». Приоритет называется **относительным**, если никакая заявка не может прервать обслуживание любой другой заявки.

Рассмотрим СМО $M/G/1$, в которую поступает простейший n -мерный поток заявок с параметрами $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$, $(\vartheta_1^{(2)}, \dots, \vartheta_n^{(2)})$.

Условие существования стационарного режима здесь – такое же, как и в бесприоритетной СМО с многомерным потоком.

Основные характеристики эффективности приведены в таблице 3.1.

Можно показать, что между временами w_k ожидания заявок в СМО с относительными приоритетами справедливы соотношения:

$$w_1 < w_2 < \dots < w_n$$

и $w_1 < w < w_n$,

где w – среднее время ожидания в бесприоритетной СМО с многомерным потоком.

Таблица 3.1

СМО с многомерным входящим потоком	СМО с относительными приоритетами
1) R – среднее число занятых каналов	
$R = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot \nu_i$	$R = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot \nu_i$
2) w_k - среднее время пребывания заявки k -того потока (приоритета) в очереди	
$w_k = w = \frac{1}{2(1-R)} \sum_{k=1}^n \lambda_k \nu_k^{(2)}$	$w_k = \frac{1}{2(1-R_{k-1})(1-R_k)} \sum_{i=1}^N \lambda_i \nu_i^{(2)}$
3) L - среднее число заявок в очереди	
$L_k = w_k \cdot \lambda_k = w \cdot \lambda_k$	$L_k = w_k \cdot \lambda_k$
4) n – среднее число заявок в системе	
$n_k = \rho_k + L_k$	$n_k = u_k \cdot \lambda_k$
5) u – среднее время пребывания заявки в системе	
$u_k = w_k + \nu_k$	$u_k = w_k + \nu_k$

3.3 Примеры моделей

Задача 3.1. По информационному каналу с пропускной способностью 2400 бит/с передаются сообщения трёх типов: управляющие пакеты постоянной длины 6 байт с интенсивностью 5 пакетов в 2 секунды, диалоговые сообщения экспоненциальной случайной длины со средней 60 байт и телеграммы равномерно-случайной длины в диапазоне 600 – 1800 бит. Интенсивность диалога – 2 с^{-1} , интенсивность телеграмм – вчетверо меньше. Вычислить среднюю задержку в канале сообщений всех трёх типов.

Решение

Имеем СМО М/Г/1 с тремя потоками: 1) управляющие пакеты; 2) диалоговые сообщения; 3) телеграммы.

Сначала необходимо проверить, существует ли в канале стационарный режим. Загрузка R канала равна $R = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$, где ρ_1 – загрузка управляющими пакетами, ρ_2 – диалоговыми сообщениями и ρ_3 – телеграммами, $\rho_i = \lambda_i \cdot \nu_i$, $i = 1, 2, 3$.

У нас: $\lambda_1 = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ с}^{-1}$, $\lambda_2 = 2 \text{ с}^{-1}$, $\lambda_3 = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ с}^{-1}$.

Вычислим далее ν_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\nu_1 = \frac{6 \cdot 8 \text{ бит}}{2400 \text{ бит/с}} = 0,02 \text{ с},$$

$$\nu_2 = \frac{60 \cdot 8 \text{ бит}}{2400 \text{ бит/с}} = 0,2 \text{ с},$$

$$\nu_3 = \frac{(600 + 1800)/2 \text{ бит}}{2400 \text{ бит/с}} = 0,5 \text{ с}.$$

Тогда $R = \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2 + \lambda_3 \nu_3 = 2,5 \cdot 0,02 + 2 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,7$, т.е. $R = 0,7 < 1$, и стационарный режим в канале существует.

$$w_k = w = \frac{1}{2(1-R)} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \nu_k^{(2)} \quad (3.1)$$

Среднее время w ожидания вычисляем по формуле:
где $\nu_i^{(2)}$ – второй начальный момент времени передачи сообщения i -го типа.
Эти моменты равны:

- для постоянной «случайной» величины (для пакетов)

$$\nu_1^{(2)} = \nu_1^2 = 0,02^2 = 0,0004 \text{ (с}^2\text{)}$$

- для экспоненциальной случайной величины (для диалоговых сообщений)

$$\nu_2^{(2)} = 2 \nu_2^2 = 2 \cdot (0,2 \text{ с})^2 = 0,08 \text{ (с}^2\text{)}$$

- для равномерной случайной величины (для телеграмм)

$$\nu_3^{(2)} = (T_{\max}^2 + T_{\max} \cdot T_{\min} + T_{\min}^2)/3,$$

где $T_{\max} = 1800 \text{ бит} / 2400 \text{ бит/с} = 0,75 \text{ с}$, $T_{\min} = 600 \text{ бит} / 2400 \text{ бит/с} = 0,25 \text{ с}$,

так что

$$\nu_3^{(2)} = \frac{1}{3} \cdot (0,75^2 + 0,75 \cdot 0,25 + 0,25^2) = 0,27 \text{ (с}^2\text{)},$$

Подставляя вычисленные данные в (3.1), получим:

$$W = \frac{1}{2(1-0,7)} (2,5 \cdot 0,0004 + 2 \cdot 0,08 + 0,5 \cdot 0,27) = 0,5 \text{ (с)}$$

так что

$$u_1 = w + \nu_1 = 0,5 + 0,02 = 0,52 \text{ (с)},$$

$$u_2 = w + \nu_2 = 0,5 + 0,2 = 0,7 \text{ (с)},$$

$$u_i = w + \nu_3 = 0,5 + 0,5 = 1 \text{ (с)}.$$

Задача 3.2. Решить задачу 3.1 при условии, что управляющим пакетам, диалоговым сообщениям и телеграммам назначены 1-й, 2-й и 3-й относительные приоритеты соответственно. Сравнить результаты решения задач 3.1 и 3.2.

Решение.

Назначение приоритетов не влияет на загрузку R и остаточное время T_0 . Следовательно, в СМО стационарный режим сохраняется. Времена ожидания w_k , $k = 1, 2, 3$ вычисляем по формуле

$$w_k = \frac{T_0}{(1-R_{k-1})(1-R_k)} \quad (3.2)$$

где $T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i^{(2)} = \frac{1}{2} (2,5 \cdot 0,0004 + 2 \cdot 0,08 + 0,5 \cdot 0,271) \approx 0,15(c)$

$$R_1 = \lambda_1 \cdot v_1 = 2,5 \cdot 0,02 = 0,05$$

$$R_2 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = 0,5 \cdot 0,02 + 2 \cdot 0,2 = 0,45$$

$$R = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0,5 \cdot 0,02 + 2 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,7$$

Времена ожидания w_1 , w_2 и w_3 вычисляем по формуле (3.2):

$$w_1 = \frac{T_0}{1 - R_1} = \frac{0,15c}{1 - 0,05} \approx 0,158(c),$$

$$w_2 = \frac{T_0}{(1 - R_1)(1 - R_2)} = \frac{0,15c}{(1 - 0,05)(1 - 0,45)} \approx 0,27(c),$$

$$w_3 = \frac{T_0}{(1 - R_2)(1 - R_3)} = \frac{0,15c}{(1 - 0,45)(1 - 0,7)} \approx 0,91(c),$$

Так что

$$u_1 = w_1 + v_1 = 0,158 + 0,02 = 0,178(c),$$

$$u_2 = w_2 + v_2 = 0,29 + 0,2 = 0,49(c),$$

$$u_i = w_3 + v_3 = 0,9 + 0,5 = 1,41(c).$$

Сравнивая эти величины с подобными в решении задачи 3.1, видим, что время для пакетов уменьшилось в три раза, время для телеграмм возросло на 41 %.

Домашнее задание:

Решить задачи 3.1, 3.2 для случая, если длина сообщений всех типов распределена по экспоненциальному закону с теми же средними значениями. Результаты решения сравнить.

Задача 3.3. Загрузка СМО тремя идентичными по параметрам потоками равна 0.9. Вычислить, во сколько раз времена ожидания для потоков 2-го и 3-го приоритетов больше времени для 1-го потока в режиме обслуживания с относительными приоритетами.

Решение.

Пусть ρ – загрузка СМО каким-либо из 3-х потоков : $\rho = R/3 = 0.3$. Тогда

$$w_1 = \frac{T_0}{1 - R_1} = \frac{T_0}{1 - \rho}; \quad w_2 = \frac{T_0}{(1 - R_1)(1 - R_2)} = \frac{T_0}{(1 - \rho)(1 - 2\rho)};$$

$$w_3 = \frac{T_0}{(1 - R_2)(1 - R_3)} = \frac{T_0}{(1 - 2\rho)(1 - 3\rho)};$$

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{T_0}{(1 - \rho)(1 - 2\rho)} \cdot \frac{(1 - \rho)}{T_0} = \frac{1}{1 - 2\rho} = \frac{1}{1 - 2 \cdot 0,3} = 2,5;$$

$$\frac{w_3}{w_1} = \frac{T_0}{(1-2\rho)(1-3\rho)} \frac{(1-\rho)}{T_0} = \frac{1-\rho}{(1-2\rho)(1-3\rho)} = \frac{0,7}{0,4 \cdot 0,1} = 17,5.$$

3.4. Задание на лабораторную работу №3

Задача 3.4. Таможенный контроль на въезде в зону проверяет простейший поток из легковых машин, грузовых машин и автобусов, поступающих с интенсивностями λ_1 , λ_2 , λ_3 час⁻¹ за случайное время, равномерно распределенное от a_1 до b_1 секунд для легковых и грузовых машин и от a_2 до b_2 минут для автобусов. Вычислить среднее время задержки транспорта каждого типа у таможни.

Решить задачу с использованием среды Mathcad.

Варианты задания 3.4:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
вар.												
λ_1	60	50	55	60	50	55	60	50	55	60	50	55
λ_2	12	10	15	10	15	25	12	16	15	10	10	15
λ_3	6	5	6	6	10	5	5	6	5	6	5	6
a_1	6	10	15	10	8	12	10	10	6	8	10	6
b_1	30	30	25	30	30	24	30	30	20	20	20	25
a_2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	3	2
b_2	5	6	7	6	5	6	7	6	9	8	9	6

Задача 3.5. Решить задачу 3.4 при условии, что автобусам назначен относительный приоритет перед легковыми и грузовыми машинами. Сравнить результаты решения задач 3.4 и 3.5.

Решить задачу с использованием среды Mathcad.

3.5. Контрольные вопросы.

4. Что такое многомерный (n-мерный) входящий поток заявок?
5. Как выглядит условие существования стационарного режима для СМО с многомерным входящим потоком?
6. Одинаковы ли средние времена ожидания для различных типов заявок в многомерном потоке?
7. Одинаковы ли средние длины очередей заявок различных типов?
8. С какой целью в СМО вводятся приоритеты?

9. Каково основное правило приоритетного обслуживания?
10. Что такое относительный приоритет?
11. Каким образом ранжируются по величине времена ожидания заявок в потоках с увеличением номера приоритета?

4. Лабораторно - практическое занятие № 4

СМО с абсолютными и смешанными приоритетами

4.1. Цель занятия

Цель занятия - освоить методику построения моделей СМО с абсолютными и смешанными приоритетами с помощью аппарата теории массового обслуживания; научиться определять вероятностные, временные и др. характеристики эффективности подобных систем.

4.2. Краткие теоретические сведения

СМО с абсолютными и смешанными приоритетами - это системы, в которых возможно преимущество (приоритет) в обслуживании заявки, причем процесс обслуживания ранее пришедшей заявки более низкого приоритета прерывается для абсолютного приоритета, либо используется смешанная дисциплина обслуживания.

Заявка, обслуживание которой прервано, ставится в начало своей очереди и ждёт момента, когда сложатся условия для её обслуживания. При наличии таковых канал либо продолжает обслуживать заявку с места, на котором произошло прерывание (СМО с дообслуживанием), либо начинает её обслуживание с самого начала (СМО с возобновлением обслуживания).

Рассмотрим СМО M/G/1 с n абсолютными приоритетами, т.е. систему, в которой заявка потока k прерывает обслуживание заявки потока k+1, k=1,2,...,n-1. В случае СМО с дообслуживанием в стационарном режиме справедливы следующие оценки для характеристик:

$$w_k = \frac{v_k R_{k-1}}{1 - R_{k-1}} + \frac{1}{2(1 - R_{k-1})(1 - R_k)} \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^{(2)}, \quad (4.1)$$

$$u_k = w_k + v_k, \quad (4.2)$$

$$l_k = w_k \cdot \lambda_k, \quad (4.3)$$

$$m_k = u_k \cdot \lambda_k, \quad k=1, \dots, n, \quad (4.4)$$

где w_k и u_k – соответственно среднее время ожидания и пребывания в СМО заявки k-го приоритета, l_k и m_k – соответственно средняя длина очереди и среднее количество заявок в СМО, k=1,...,n.

Для СМО M/G/1 в стационарном режиме действует закон сохранения времени ожидания: при любой системе приоритетов имеет место равенство:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i w_i = \text{const}, \quad \text{где} \quad \text{const} = \frac{1}{2(1-R)} \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^{(2)}. \quad (4.5)$$

Особенностью смешанных приоритетов здесь является то, что первые N_1 потоков заявок обслуживаются при абсолютных приоритетах, следующие N_2 - при относительных, а оставшиеся низкоприоритетные – по беспriorитетному обслуживанию многомерного потока.

Время ожидания заявки в очереди для смешанных приоритетов:

$$w_k = \begin{cases} \frac{R_{k-1} v_k}{1 - R_{k-1}} + \frac{\sum_{i=1}^K \lambda_i v_i^{(2)}}{2(1 - R_{k-1})(1 - R_k)} & k = 1 \dots N_1 \\ \frac{R_{N_1} v_k}{1 - R_{N_1}} + \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i v_i^{(2)}}{2(1 - R_{k-1})(1 - R_k)} & k = N_1 + 1 \dots N_1 + N_2 \\ \frac{R_{N_1} v_k}{1 - R_{N_1}} + \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i v_i^{(2)}}{2(1 - R_{N_1+N_2})(1 - R)} & k = N_1 + N_2 + 1 \dots N \end{cases}$$

4.3. Примеры моделей

Задача 4.1. Каждый из 300 кассиров запрашивает центральный компьютер системы резервирования и продажи билетов в среднем 1 раз в 5 минут. Компьютер обслуживает запросы за случайное время, распределенное по экспоненциальному закону со средним 0,8 с, если он исправен. Однако из-за отказов в среднем 1 раз в час он «зависает» на 3 минуты.

Определить среднее время ответа компьютера кассиру.

Решение

Имеем СМО с двумя потоками. Первый поток – абсолютного приоритета (отказы) интенсивностью $\lambda_1 = 1 \text{ ч}^{-1} = 1/60 \text{ мин}^{-1}$ и средним временем обслуживания $v_1 = 3 \text{ мин}$. Второй поток - интенсивностью $\lambda_2 = 300/(5 \cdot 60) = 1 \text{ с}^{-1}$ и с $v_2 = 0.8 \text{ с}$. Необходимо найти u_2 в СМО с абсолютными приоритетами.

$u_2 = w_2 + v_2$, w_2 определяются по формуле:

$$w_2 = \frac{v_2 R_1}{1 - R_1} + \frac{1}{2(1 - R_1)(1 - R)} \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i^{(2)}, \quad (4.6)$$

где $R_1 = \lambda_1 \cdot v_1 = 3/60 = 0,05$; $R = R_1 + \rho_2 = 0,05 + 1 \cdot 0,8 = 0,85$.

Подставляя в (4.6), имеем:

$$w_2 = \frac{0,8 \cdot 0,05}{1 - 0,05} + \frac{2((1/3600) \cdot (180)^2 + 1 \cdot 0,64)}{2(1 - 0,05)(1 - 0,85)} \approx 67,7 \text{ (с)},$$

$$u_2 = 67,7 + 0,8 = 68,5 \text{ (с)}.$$

Задача 4.2. Вычислительная система обслуживает простейший, интенсивностью 1 мин^{-1} , поток запросов пользователя, запрашивая на решение в среднем 36 секунд. Эта работа может быть прервана запросами от оператора вычислительной системы, следующими в среднем через 10 минут, и обрабатываемыми за 6 секунд. В свою очередь, эти задачи могут прерываться сигналами от схем контроля вычислительной системы, поступающими с интенсивностью $0,6 \text{ час}^{-1}$, а неисправность устраняется в среднем за 10 минут. Определить среднее время ответа вычислительной системы оператору и пользователю.

Решение

Имеем СМО с 3-мя потоками и абсолютными приоритетами.

Приоритет 1 – сигнал от схем контроля, $\lambda_1 = 0,6 \text{ час}^{-1} = 0,01 \text{ мин}^{-1}$, $v_1 = 10 \text{ мин}$, так что $R_1 = \lambda_1 v_1 = 0,1$.

Приоритет 2 – запросы оператора, $\lambda_2 = 0,1 \text{ мин}^{-1}$, $v_2 = 0,1 \text{ мин}$, так что $R_1 = 0,1 + \lambda_2 v_2 = 0,11$.

Приоритет 3 – запросы пользователей, $\lambda_3 = 1 \text{ мин}^{-1}$, $v_3 = 36 \text{ сек} = 0,6 \text{ мин}$, так что $R_3 = 0,11 + \lambda_3 v_3 = 0,71$.

Искомые величины:

$$u_2 = w_2 + v_2, \quad u_3 = w_3 + v_3,$$

$$w_2 = \frac{v_2 R_1}{1 - R_1} + \frac{\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2}{(1 - R_2)(1 - R_1)} = \frac{0,1 \cdot 0,1}{1 - 0,1} + \frac{0,01 \cdot 100 + 0,1 \cdot 0,01}{(1 - 0,11)(1 - 0,1)} =$$

$$= \frac{0,01}{0,9} + \frac{1 + 0,001}{0,89 \cdot 0,9} = 1,26 \text{ (мин)},$$

Так что $u_2 = 1,36 \text{ мин}$,

$$w_3 = \frac{v_3 R_2}{1 - R_2} + \frac{\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2}{(1 - R_3)(1 - R_2)} = \frac{0,11 \cdot 0,6}{1 - 0,11} +$$

$$+ \frac{0,01 \cdot 100 + 0,1 \cdot 0,01 + 1 \cdot 0,36}{(1 - 0,71)(1 - 0,11)} =$$

$$= \frac{0,066}{0,89} + \frac{1 + 0,001 + 0,36}{0,29 \cdot 0,89} = 5,38 \text{ (мин)},$$

$$\text{и } u_3 = 0,6 + 5,38 \approx 6 \text{ (минут)}.$$

Задача 4.3. Отправка телеграммы-молнии имеет абсолютный приоритет перед срочными и обычными телеграммами, а срочной – относительный приоритет перед обычными. Определить времена ожидания отправки телеграмм всех видов, если поток обычных телеграмм следует с интенсивностью $1/3 \text{ мин}^{-1}$, срочных – $1/10 \text{ мин}^{-1}$ и молний – 1 час^{-1} , а оператор отправляет телеграмму в среднем за 2 минуты.

Решение

У нас $\lambda_1 = 1/60 \text{ мин}^{-1}$, $\lambda_2 = 1/10 \text{ мин}^{-1}$, $\lambda_3 = 1/3 \text{ мин}^{-1}$, $v_1 = v_2 = v_3 = 2 \text{ мин}$, так что $R_1 = \lambda_1 \cdot v_1 = 0,033$; $R_2 = 0,033 + 2/10 = 0,233$; $R_3 = 0,233 + 2/3 = 0,9$.

$$w_1 = \frac{v_1 R_1}{1 - R_1} = \frac{0,033 \cdot 2}{1 - 0,033} = 0,07 \text{ (мин)}$$

$$w_2 = \frac{v_2 R_1}{1 - R_1} + \frac{\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2}{(1 - R_2)(1 - R_1)} = \frac{2 \cdot 0,033}{1 - 0,033} + \frac{4(\frac{1}{60} + \frac{1}{10} + \frac{1}{3})}{(1 - 0,233)(1 - 0,033)} = 2,5 \text{ (мин)}$$

$$w_3 = \frac{v_3 R_2}{1 - R_2} + \frac{\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2}{(1 - R_3)(1 - R_2)} = 23,5 \text{ (мин)}$$

Задача 4.4. Загрузка СМО заявками первого типа втрое больше загрузки заявками второго. После введения приоритета время ожидания заявок первого типа уменьшилось в 2 раза. Во сколько раз увеличилось время ожидания для заявок второго типа?

Решение.

Используя закон сохранения времени ожидания для СМО без потерь, имеем:

$$\begin{array}{ll} \text{До введения приоритета:} & 3\rho w + \rho w = \text{const}, \\ \text{после введения приоритета:} & \frac{3}{2}\rho w + x\rho w = \text{const}, \end{array}$$

Откуда:

$$3\rho w + \rho w = \frac{3}{2}\rho w + x\rho w,$$

$$\text{или } 3 + 1 = \frac{3}{2} + x \rightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Домашнее задание.

1) Решить задачи 4.1 и 4.2 в предположении абсолютной надежности вычислительной системы и сравнить результаты решения.

2) После введения приоритетов время ожидания для заявки 1-го типа сократилось на час. На сколько часов при этом увеличилось время ожидания заявок 2-го типа, если загрузка СМО заявками 1-го типа втрое больше загрузки 2-го?

4.4. Контрольные вопросы.

1. Чем режим абсолютных приоритетов отличается от режима относительных приоритетов?
2. Что такое СМО с дообслуживанием? С возобновлением обслуживания?
3. Можно ли считать СМО с возобновлением обслуживания системой без потерь? Почему?
4. С какой целью вводится режим абсолютных приоритетов?
5. Из каких двух составляющих складывается среднее время ожидания в СМО с абсолютными приоритетами?
6. Обслуживание заявок какого приоритета не прерывается в СМО с абсолютными приоритетами?
7. При каких условиях справедлив закон сохранения времени ожидания?
8. Каковы особенности дисциплины обслуживания со смешанными приоритетами?

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Прикладные задачи теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - М.: Радио и связь, 1983.
2. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. - М.: Высшая школа, 2001.
3. Майоров С.А. Основы теории вычислительных систем / С.А. Майоров — М.: Высшая школа, 1978.- 408 с.