



Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный
технический университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим занятиям по дисциплине
«Теория оптимальных решений»
для студентов специальности
7.09150 «Компьютерные системы и сети»
дневной и заочной форм обучения
Часть вторая. «Биматричные игры»

Севастополь
2014

УДК 65.012(075.8)

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теория оптимальных решений» для студентов специальности 7.091501 «Компьютерные системы и сети» дневной и заочной форм обучения. Ч. 2. Раздел «Биматричные игры» / Сост. Ю.Н. Щепин – Севастополь, Изд-во Сев НТУ, 2014. – 32с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в овладении практическими навыками поиска наилучшего или приемлемого способа действий для достижения одной или нескольких целей методами поддержки принятия решений в условиях слабоструктурированных или неструктурированных ситуаций, заданных платежной матрицей, представляющей биматричную игру. Кроме того, рассматриваются постановка и методы решения многокритериальных задач, а также нахождение устойчивых решений.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники, протокол № 11 от 25 июня 2014 г.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент Апраксин Ю.К., профессор кафедры кибернетики и вычислительной техники, доктор технических наук.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ТЕМА 1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ТИПА «АКТИВНЫЙ ПАРТНЕР»	4
1.1. Платежная матрица биматричной игры	4
1.2. Принятие решений на основе гипотез.....	5
1.3. Контрольные вопросы	12
1.4. Список задач.....	13
ТЕМА 2. УСТОЙЧИВЫЕ РЕШЕНИЯ	14
2.1. Устойчивость по Нэшу	14
2.2. Контрольные вопросы	17
2.3. Список задач.....	18
ТЕМА 3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ	18
3.1. Множество Парето	18
3.2. Постановка задачи в общем виде	20
3.3. Постановка задачи (дискретный случай).....	27
3.4. Контрольные вопросы	29
3.5. Список задач.....	29
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	32

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания адресованы студентам очной и заочной форм обучения специальности 7.091501 «Компьютерные системы и сети», изучающим дисциплину «Теория оптимальных решений».

Приступая к изучению настоящих методических указаний (часть вторая), рекомендуется изучить часть первую [1].

Каждый раздел настоящих методических указаний содержит краткое введение, которое не исчерпывает необходимый минимум теоретических положений для успешного решения списка задач. Прежде чем приступать к решению задач конкретного раздела, необходимо изучить соответствующие теоретические положения, пользуясь конспектом лекций и рекомендованной литературой, а также найти ответы на все предлагаемые контрольные вопросы.

Для успешного освоения дисциплины необходимо решить предлагаемые в каждом разделе задачи. При этом условия задач должны быть переписаны в тетрадь для практических занятий, представлены постановка задачи и подробное решение каждой задачи с комментариями, проведен анализ результатов и сделаны выводы.

ТЕМА 1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ТИПА «АКТИВНЫЙ ПАРТНЕР»

1.1. Платежная матрица биматричной игры

В [1] рассматривались игры двух лиц, в которых интересы игроков были прямо противоположны (антагонистические или матричные игры). Решением такой задачи является стратегия A_{i_0} с оценкой исхода

$V^0 = a_{i_0 k_0}$ при условии, что игрок В выбрал стратегию B_{k_0} . Однако ситуации, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но уже не обязательно являются противоположными, встречаются гораздо чаще.

Рассмотрим, например, конфликтную ситуацию, в которой каждый из двух участников имеет следующие возможности для выбора своей линии поведения:

игрок А может выбрать любую из стратегий $A_1, A_2, \dots, A_m$;

игрок В – любую из стратегий $B_1, B_2, \dots, B_n$.

При этом всякий раз их совместный выбор оценивается вполне определенно: если игрок А выбрал i -ю стратегию A_i , а игрок В – k -ю стратегию B_k , то в итоге выигрыш игрока А будет равен некоторому числу a_{ik} , а выигрыш игрока В – некоторому, вообще говоря, другому числу b_{ik} .

Иными словами, всякий раз каждый из игроков получает свой приз. Последовательно перебирая все стратегии игрока А и все стратегии игрока В, можно заполнить их выигрышами две таблицы вида (2.1) в [1], представленными матрицами (1.1) и (1.2).

$$V = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

$$W = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{ik} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mk} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где V – платежная матрица игрока А, а W – платежная матрица игрока В. При выборе игроком А стратегии с номером i , а игроком В – k -й стратегии, их выигрыши находятся в соответствующих матрицах выплат на пересечении i -х строк и k -х столбцов: в матрице V – это элемент a_{ik} , а в матрице W – элемент b_{ik} .

Таким образом, в случае, когда интересы игроков различны (но необязательно противоположны), получаются две платежные матрицы: одна – матрица выплат игроку А, другая – матрица выплат игроку В. Отсюда и название, которое обычно присваивается подобной игре, – *биматричная игра*. В случае биматричной игры её решением является пара стратегий (A_{i^*}, B_{k^*}) с оценками исходов $(V^* = a_{i^*k^*}, W^* = b_{i^*k^*})$.

Будем представлять матрицы выплат игрокам А и В (1.1) и (1.2) с помощью одной матрицы U , представляющей выигрыши каждого из игроков, соответственно, парой чисел (a_{ik}, b_{ik}) :

$$U = \parallel (a_{ik}, b_{ik}) \parallel_{m \times n}. \quad (1.3)$$

Далее мы везде, кроме специально оговоренных случаев, будем считать себя игроком А и проводить рассуждения с позиций его интересов.

Замечание. Рассмотренные ранее матричные игры с нулевой суммой [1], разумеется, можно отнести к биматричным играм, где матрица выплат игроку В *противоположна* матрице выплат игроку А:

$$b_{ik} = -a_{ik}$$

или

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

1.2. Принятие решений на основе гипотез

В связи с тем, что исход выбора игроком А решения зависит от выбора решения игроком В, необходимо сделать какие-то предположения о его возможном поведении в процессе решения задачи. Правомерность подобных предположений (гипотез) напрямую зависит от характера информированности сторон о поведении другой стороны. Будем различать следующие основные гипотезы (случаи).

Гипотеза 1. Каждый из субъектов А и В не имеет информации о выборе, который сделан второй стороной. Дополнительные гипотезы о характере поведения второго игрока отсутствуют. В этом случае можно поступать аналогично решению задачи в условиях полной

неопределенности. Это, по-существу, в точности тот же случай, и мы можем воспользоваться известным принципом наилучшего гарантированного результата. Для субъекта А гарантированная оценка будет равна

$$V^* = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq k \leq n} a_{ik} . \quad (1.5)$$

Этому решению соответствует стратегия $A^* = A_{i^*}$.

Гипотеза 2. Предполагаем, что субъект В следует принципу максимина и выбирает B^* из условия

$$W^* = \max_{1 \leq k \leq n} \min_{1 \leq i \leq m} b_{ik} . \quad (1.6)$$

Тогда мы можем выбирать V^{**} согласно правилу

$$V^{**} = V(A, B^*) \rightarrow \max_{1 \leq i \leq m} a_{ik^*} , \quad (1.7)$$

где $B^* = B_{k^*}$ – гарантирующее решение второго игрока. Обозначим решение задачи (1.7) через $A^{**} = A_{i^{**}}$. При этом выполняется свойство решения по гипотезе 2, оценка исхода которого не хуже оценки исхода по гипотезе 1:

$$V^{**} = V(A^{**}, B^*) \geq V^* , \quad (1.8)$$

где V^* – наша гарантированная оценка (1.5), получаемая по принципу максимина (гипотеза 1).

Гипотеза 3. Теперь можно допустить, что субъект В рассуждает точно так же, как и мы в предыдущем случае (в соответствии с гипотезой 2), т.е. использует не стратегию B^* , а аналогичную стратегию $B^{**} = B_{k^{**}}$. Мы можем это учесть и выбирать оптимальное решение с учетом уже этой гипотезы:

$$V(A, B^{**}) \rightarrow \max_{1 \leq i \leq m} a_{ik^{**}} \Rightarrow A^{***}, V^{***} . \quad (1.9)$$

Гипотеза 4. Возможен другой сорт гипотез: мы по условиям игры знаем первый ход субъекта В (он нам его обязан сообщить). Тогда наше поведение будет определяться стратегией в виде функции $A=A(B)$. Мы можем ее определить в результате решения задачи оптимизации

$$V(A, B_k) \rightarrow \max_{1 \leq i \leq m} a_{ik} , \quad B_k \in B. \quad (1.10)$$

Условие (1.10) позволяет для каждого фиксированного B_k , $k=1,2,\dots,n$, определить искомую стратегию А, т.е. задать функцию $A(B)$.

Для этого случая мы можем определить гарантированный результат:

$$\hat{V} = \min_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ik} = \min_{1 \leq k \leq n} V(A(B_k), B_k). \quad (1.11)$$

Результат $\hat{V}$ будет отличаться от значения V^* , найденного согласно гипотезе 1. Именно, во всех случаях будем иметь

$$\hat{V} \geq V^*. \quad (1.12)$$

Таким образом, принятие гипотезы 4 вновь позволяет улучшить решение, полученное по принципу максиминного гарантированного результата.

Гипотеза 5. Пусть субъект В знает наш первый ход. В этом случае естественно предположить, что он будет придерживаться стратегии $B=B(A)$, которая строится в результате решения оптимизационной задачи

$$W(A_i, B) \rightarrow \max_{1 \leq k \leq n} \Rightarrow B' = B'(A_i), \quad A_i \in A \quad (1.13)$$

(именно так и мы поступали при принятии гипотезы 4). Принятие этих допущений, т.е. допущения о том, что мы сообщили свой ход субъекту В, а также допущения об использовании им стратегии $B(A)$ позволяет нам таким образом воздействовать на выбор субъекта В, чтобы он в максимальной степени соответствовал нашим целям. Именно, мы можем выбирать А из условия

$$V(A, B'(A)) \rightarrow \max_{1 \leq i \leq m} a_{ik'} \Rightarrow \tilde{A}. \quad (1.14)$$

Замечание. Если максимум в соотношении (1.14) достигается не в одной точке B_k , а на некотором множестве $M(A)$, то наш гарантированный результат $\tilde{V}$ определяется из условия:

$$\tilde{V} = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{B \in M(A)} V(A, B). \quad (1.15)$$

Такая ситуация возникает при решении задачи 1.4.1, варианты е) и ф).

Общим для всех рассмотренных случаев (гипотезы 1...5) является предположение, что обе стороны, участвующие в игре, не только точно знают свои цели, но и полностью информированы о целевых функциях «противника» или партнера по игре. Для реальных конфликтных ситуаций это не всегда выполняется. Гораздо чаще мы не знаем точно целей наших партнеров, которые, в свою очередь, имеют ограниченную информацию о наших намерениях. Кроме того, необходимо учи-

тивать и возможную сознательную дезинформацию, «блеф» со стороны каждого из игроков, да и игроков может быть не два, а больше. Формальные модели указанных, а также других игровых ситуаций могут быть построены, но соответствующий материал выходит за рамки данных методических указаний.

Пример 1.1.

Игра задана с помощью таблицы 1, где пары чисел на пересечении строк и столбцов означают выигрыши игроков А и В, соответственно.

Таблица 1

A \ B	B		
	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	(5, 6)	(7, 5)	(-4, 16)
A ₂	(3, -7)	(4, 7)	(2, 6)
A ₃	(-2, 15)	(1, 4)	(14, 11)

Вычислить оптимальные альтернативы игрока А, пользуясь гипотезами 1...5. Провести анализ результатов.

Решение

При иллюстрации решений опустим комментарии относительно сути применяемых гипотез в связи с тем, что они, также как и формулы в общем виде, приведены выше. **Студенты при выполнении заданий должны сопровождать свои решения необходимыми комментариями в полном объеме.**

Гипотеза 1

На основании (1.5) получаем:

$$\alpha_1 = \min\{5, 7, -4\} = -4;$$

$$\alpha_2 = \min\{3, 4, 2\} = 2;$$

$$\alpha_3 = \min\{-2, 1, 14\} = -2;$$

$$V^* = \max\{-4, 2, -2\} = 2 \Rightarrow i^* = 2; \quad A^* = A_2.$$

Согласно гипотезе 1 оптимальным решением является стратегия А₂ с оценкой исхода в 2 единицы.

Гипотеза 2

Согласно (1.6) рассчитаем за игрока В его гарантирующее решение:

$$\beta_1 = \min\{6, -7, 15\} = -7;$$

$$\beta_2 = \min\{5, 7, 4\} = 4;$$

$$\beta_3 = \min\{16, 6, 11\} = 6;$$

$$W^* = \max\{-7, 4, 6\} = 6 \Rightarrow k^* = 3; \quad B^* = B_3.$$

Для игрока В имеем гарантирующую стратегию $B^* = B_3$, а гарантирующую оценку – $W^* = 6$.

Теперь, согласно (1.7), находим

$$V^{**} = \max_{1 \leq i \leq 3} V(A_i, B_3) = \max\{-4, 2, 14\} = 14 \Rightarrow A^{**} = A_3.$$

Согласно гипотезе 2 оптимальным решением является стратегия A_3 с оценкой исхода в 14 единиц. При этом подтвердилось свойство (1.8) решения по гипотезе 2:

$$V^{**} = 14 > V^* = 6.$$

Гипотеза 3

Аналогично (1.7) для игрока А (гипотеза 2) рассчитаем для игрока В решение B^{**} :

$$W(A^*, B) \rightarrow \max_{1 \leq k \leq n} b_{ik}^*. \quad (1.16)$$

Так как по первой гипотезе $A^* = A_2$,

$$W^{**} = W(A_2, B^{**}) = \max\{-7, 7, 6\} = 7 \Rightarrow k^{**} = 2; \quad B^{**} = B_2.$$

Обращаем внимание, что по аналогии с (1.8) для игрока В выполняется свойство

$$W^{**} = 7 > W^* = 6.$$

В соответствии с (1.9)

$$V^{***} = V(A^{***}, B_2) = \max\{7, 4, 1\} = 7 \Rightarrow i^{***} = 1; \quad A^{***} = A_1.$$

Согласно гипотезе 3 оптимальным решением игрока А является стратегия A_1 с оценкой исхода в 7 единиц.

Гипотеза 4

Так как игрок В должен сообщить свой ход, для каждой стратегии B_k , $k = \overline{1, 3}$, мы можем выбрать самую благоприятную для игрока А стратегию, а именно

$$B_1: \max V(A, B_1) = \max\{5, 3, -2\} = 5 = V(A_1, B_1);$$

$$B_2: \max V(A, B_2) = \max\{7, 4, 1\} = 7 = V(A_1, B_2);$$

$$B_3: \max V(A, B_3) = \max\{-4, 2, 14\} = 14 = V(A_3, B_3).$$

В этом случае гарантированный результат согласно (1.11)

$$\hat{V} = \min\{5, 7, 14\} = 5 \Rightarrow \hat{i} = 1; \quad \hat{A} = A_1.$$

При этом подтвердилось свойство (1.12) решения по гипотезе 4:

$$\hat{V} = 5 > V^* = 2.$$

Гипотеза 5

Если мы сообщим субъекту В свой ход A_1 , игрок В выберет $W(A_1, B'(A_1)) = \max\{6, 5, 16\} = 16 \Rightarrow B'(A_1) = B_3$,

при этом мы получим выигрыш $V(A_1, B_3) = -4$.

Далее аналогично

A_2 : $W(A_2, B'(A_2)) = \max\{-7, 7, 6\} = 7 \Rightarrow B'(A_2) = B_2$; $V(A_2, B_2) = 4$.

A_3 : $W(A_3, B'(A_3)) = \max\{15, 4, 11\} = 15 \Rightarrow B'(A_3) = B_1$; $V(A_3, B_1) = -2$.

Окончательное решение по гипотезе 5:

$$\tilde{V} = \max\{-4, 4, 2\} = 4 \Rightarrow \tilde{i} = 2; \quad \tilde{A} = A_2.$$

Анализ результатов

При принятии решения в соответствии с гипотезой 1 наша гарантирующая стратегия – $A^* = A_2$, а гарантированная оценка – $V^* = V(A_2, B_3) = 2$ (если бы мы выбрали другое решение, отличное от A_2 , то могли бы, в зависимости от действий игрока В, получить и меньшее значение выигрыша, чем 2). Стратегия A_2 является решением и по гипотезе 5, при этом выигрыш игрока А составляет $\tilde{V} = V(A_2, B_2) = 4$.

При использовании гипотезы 2 оптимальной является альтернатива $A^{**} = A_3$, таким образом, получило подтверждение неравенство (1.8):

$$V^{**} = V(A_3, B_3) = 14 > V^* = V(A_2, B_3) = 2.$$

В соответствии с гипотезой 3 оптимальной является альтернатива $A^{***} = A_1$ с оценкой $V^{***} = V(A_1, B_2) = 7$. Стратегия A_1 также является оптимальной при использовании гипотезы 4, при этом гарантированный результат составляет

$$\hat{V} = V(A_1, B_1) = 5 > V^* = V(A_2, B_3) = 2.$$

Пример 1.2. Применение гипотез для игры с нулевой суммой

В соответствии с (1.4) игра с нулевой суммой задана платежной матрицей выигрышей игрока А:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -11 & -13 \\ -6 & -5 & 10 & -14 \\ -8 & -9 & 8 & -4 \\ 7 & 8 & 9 & 20 \end{pmatrix}.$$

Вычислить оптимальные альтернативы игрока А, пользуясь гипотезами 1...3.

*Решение***Гипотеза 1**

В игре с нулевой суммой решение по гипотезе 1 ничем не отличается от решения для обычной биматричной игры. На основании (1.5) получаем:

$$\alpha_1 = \min\{12, 6, -11, -13\} = -13;$$

$$\alpha_2 = \min\{-6, -5, 10, -14\} = -14;$$

$$\alpha_3 = \min\{-8, -9, 8, -4\} = -9;$$

$$\alpha_4 = \min\{7, 8, 9, 20\} = 7;$$

$$V^* = \max\{-13, -14, -9, 7\} = 7 \Rightarrow i^* = 7; \quad A^* = A_4.$$

Согласно гипотезе 1 оптимальным решением является стратегия A_4 с оценкой исхода в 7 единиц.

Гипотеза 2

В игре с нулевой суммой для игрока В элементы a_{ik} матрицы А представляют собой потери, поэтому вместо принципа максимина (1.6) необходимо применить принцип минимакса:

$$W^* = \min_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ik}$$

и рассчитать за игрока В его гарантирующее решение:

$$\beta_1 = \max\{12, -6, -8, 7\} = 12;$$

$$\beta_2 = \max\{6, -5, -9, 8\} = 8;$$

$$\beta_3 = \max\{-11, 10, 8, 9\} = 10;$$

$$\beta_4 = \max\{-13, -14, -4, 20\} = 20;$$

$$W^* = \min\{12, 8, 10, 20\} = 8 \Rightarrow k^* = 2; \quad B^* = B_2.$$

Для игрока В имеем гарантирующую стратегию $B^* = B_2$, а гарантированную оценку $-W^* = 8$.

Теперь, согласно (1.7), находим

$$V^{**} = \max_{1 \leq i \leq 4} V(A_i, B_2) = \max\{6, -5, -9, 8\} = 8 \Rightarrow i^{**} = 4; \quad A^{**} = A_4.$$

Согласно гипотезе 2 оптимальным решением является стратегия A_4 с оценкой исхода в 8 единиц. При этом подтвердилось свойство (1.8) решения по гипотезе 2:

$$V^{**} = 8 > V^* = 7.$$

Гипотеза 3

Аналогично (1.16) с учетом матрицы потерь для игрока В рассчитаем решение

$$W(A^*, B) \rightarrow \min_{1 \leq k \leq n} a_{i^*k}.$$

Так как по первой гипотезе $A^* = A_4$,

$$W^{**} = W(A_4, B^{**}) = \min\{7, 8, 9, 20\} = 7 \Rightarrow k^{**} = 1; \quad B^{**} = B_1.$$

Обращаем внимание, что по аналогии с (1.8) с учетом того, что для игрока В матрица А является матрицей потерь,

$$W^{**} = 7 < W^* = 8.$$

В соответствии с (1.9)

$$V^{***} = V(A^{***}, B_1) = \max\{12, -6, -8, 7\} = 12 \Rightarrow i^{***} = 1; \quad A^{***} = A_1.$$

Согласно гипотезе 3 оптимальным решением игрока А является стратегия A_1 с оценкой исхода в 12 единиц.

Анализ результатов

При принятии решения в соответствии с гипотезой 1 наша гарантирующая стратегия – $A^* = A_4$, а гарантированная оценка – $V^* = V(A_4, B_1) = 7$ (если бы мы выбрали другое решение, отличное от A_4 , то могли бы, в зависимости от действий игрока Б, получить и меньшее значение выигрыша, чем 7).

При использовании гипотезы 2 оптимальной является альтернатива $A^{**} = A_4$ с оценкой исхода $V^{**} = 8$, таким образом, получило подтверждение неравенство (1.8):

$$V^{**} = V(A_4, B_2) = 8 > V^* = V(A_4, B_1) = 7.$$

Анализируя вычисления, можно прийти к выводу: в игре с нулевой суммой оценка решения по гипотезе 2 для игрока А совпадает с гарантированной оценкой игрока Б, полученной им при реализации принципа минимакса (объясните, почему?).

В соответствии с гипотезой 3 оптимальной является альтернатива $A^{***} = A_1$ с оценкой исхода $V^{***} = V(A_1, B_1) = 12$.

Отметим, что при использовании гипотез 1 и 2 оптимальной является одна и та же стратегия A_4 , но с разными оценками исходов.

1.3. Контрольные вопросы

1.3.1. Какой вид имеет платежная матрица биматричной игры?

1.3.2. Как с позиций биматричной игры можно интерпретировать игру с нулевой суммой?

1.3.3. Какой вид будут иметь формулы (1.5)...(1.15), если элементы матрицы вида (1.3) будут представлять потери игроков А и Б, соответственно?

1.3.4. Какой вид будут иметь формулы (1.5)...(1.9), если задана игра с нулевой суммой, представленная матрицей выигрышей игрока А?

1.3.5. Какой вид будут иметь формулы (1.5)...(1.9), если задана игра с нулевой суммой, представленная матрицей потерь игрока А?

1.3.6. Игра с нулевой суммой задана матрицей А. Получены решения с помощью трех первых гипотез. Ответьте на вопросы:

- а) С каким из них совпадет решение по гипотезе 4?
- б) С каким из них совпадет решение по гипотезе 5?

1.4. Список задач

1.4.1. Биматричная игра задана платежной матрицей выигрышей игроков А и В. Вычислить оптимальные решения для игрока А, используя гипотезы 1...5. Провести сравнительный анализ результатов.

$$a) \begin{pmatrix} (3,1) & (9,7) & (4,6) & (7,8) \\ (12,9) & (10,4) & (2,13) & (6,4) \\ (7,3) & (5,12) & (6,5) & (4,8) \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} (4,5) & (12,3) & (12,8) \\ (14,8) & (7,4) & (10,7) \\ (9,10) & (8,12) & (9,9) \\ (10,3) & (13,5) & (5,2) \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} (5,10) & (-3,1) & (12,2) & (6,5) \\ (2,2) & (5,5) & (9,12) & (8,3) \\ (3,5) & (14,7) & (0,6) & (13,4) \end{pmatrix}; \quad d) \begin{pmatrix} (5,4) & (2,2) & (5,7) \\ (7,8) & (1,7) & (3,10) \\ (3,5) & (6,4) & (4,1) \\ (6,5) & (0,3) & (2,1) \end{pmatrix};$$

$$e) \begin{pmatrix} (9,7) & (3,8) & (4,6) \\ (7,5) & (5,5) & (2,4) \\ (1,1) & (8,2) & (7,6) \\ (2,6) & (7,6) & (11,5) \end{pmatrix}; \quad f) \begin{pmatrix} (1,2) & (-2,-2) & (2,3) & (5,-1) \\ (3,1) & (3,3) & (-1,1) & (4,3) \\ (3,1) & (3,2) & (1,0) & (1,3) \\ (-4,1) & (4,2) & (-2,-1) & (2,2) \\ (4,2) & (6,4) & (1,3) & (-3,6) \end{pmatrix}.$$

1.4.2. Решить задачу 1.4.1 при условии, что платежные матрицы а), б), с), d), е) и f) представляют потери игроков А и В.

1.4.3. В условиях задачи 1.4.1 вычислить оптимальные решения для игрока В, используя гипотезы 1...5. Провести сравнительный анализ результатов.

1.4.4. В условиях задачи 1.4.2 вычислить оптимальные решения для игрока В, используя гипотезы 1...5. Провести сравнительный анализ результатов.

1.4.5. Игра с нулевой суммой задана платежной матрицей выигрышей игрока А. Вычислить оптимальные решения игрока А, используя гипотезы 1...3:

$$a) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 & 2 \\ -6 & 7 & -8 & 3 \\ 2 & -7 & 10 & -3 \\ 3 & -4 & -1 & -4 \end{pmatrix};$$

$$b) \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -4 & -5 & -6 & 5 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 5 & -10 & 9 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 1 \\ -8 & 7 & 15 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 & -10 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 12 & 2 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.4.6. Решить задачу 1.4.5 при условии, что платежные матрицы а), б), с) и д) представляют потери игрока А.

1.4.7. В условиях задачи 1.4.5 вычислить оптимальные решения игрока В, используя гипотезы 1...3.

1.4.8. В условиях задачи 1.4.6 вычислить оптимальные решения игрока В, используя гипотезы 1...3.

ТЕМА 2. УСТОЙЧИВЫЕ РЕШЕНИЯ

До сих пор мы рассматривали проблемы принятия решений в играх двух лиц с позиции одного из игроков. На ту же проблему можно взглянуть либо как на коллективную игру, либо со стороны некоего третьего, «нейтрального», лица. Нас здесь будут интересовать некоторые характеристики решения в целом с учетом целевых функций всех игроков. Наиболее важными характеристиками являются как свойства эффективности принимаемых решений по получаемым игроками «выигрышам» (этот вопрос будет рассмотрен в теме 3), так и свойства устойчивости решений.

2.1. Устойчивость по Нэшу

С позиций третьего лица – «арбитра» игра двух лиц с целевыми функциями

$$\left. \begin{aligned} V(A_i, B) &\rightarrow \max_i \\ W(A, B_k) &\rightarrow \max_k \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

может трактоваться как многокритериальная (в данном случае – двухкритериальная) задача оптимизации на множестве

$$L = A \times B.$$

Аргументом при этом является вектор $\eta \in L$:

$$\eta = (A, B),$$

а задача (2.1) принимает обычный вид многокритериальной задачи:

$$\left. \begin{array}{l} V(\eta) \rightarrow \max_{\eta \in L} \\ W(\eta) \rightarrow \max_{\eta \in L} \end{array} \right\}. \quad (2.2)$$

Определение. Будем называть точку $\hat{\eta} = (\hat{A}, \hat{B})$ устойчивым решением или точкой равновесия игры (2.1), если

$$\left. \begin{array}{l} \max_i V(A_i, \hat{B}) = V(\hat{A}, \hat{B}); \\ \max_k W(\hat{A}, B_k) = W(\hat{A}, \hat{B}). \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

При выборе устойчивого решения $\hat{\eta}$ говорят так же, что достигнута ситуация равновесия.

Из приведенного определения непосредственно следует, что неустойчивость какой-либо ситуации проявляется в том, что в случае её возникновения ей грозит распад, который обусловлен возможностями одного из игроков путём изменения только своей стратегии улучшить своё положение за счёт других игроков. На этом основании возник так называемый принцип устойчивости Нэша (по имени американского математика Джона Нэша). Он гласит, что выбор рациональной стратегии η должен производиться среди точек равновесия. Равновесные решения также называются оптимальными по Нэшу. Данный принцип отражает очень важное свойство коллективного решения: если субъекты А и В смогли договориться о том, чтобы придерживаться стратегий $A = \hat{A}$ и $B = \hat{B}$, соответственно, то тот субъект, который нарушает договоренность, прежде всего и пострадает. Свойство устойчивости решения дает известную гарантию против нарушения договоренности (всё вышеизложенное справедливо и для случая N игроков, где $N > 2$).

Пример 2.1.

Игра задана с помощью таблицы 2, где пары чисел на пересечении строк и столбцов означают выигрыши игроков А и В, соответственно.

Таблица 2

$\begin{array}{c} \backslash \\ A \end{array} \begin{array}{c} B \end{array}$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	(2, 4)	(7, 5)	(-3, 3)	(6, 2)
A_2	(5, 9)	(4, 2)	(2, 6)	(7, 5)
A_3	(6, 1)	(6, 4)	(10, 6)	(8, 7)

Определить пары стратегий, устойчивых по Нэшу.

Решение

а). В соответствии с (2.3) сначала находим максимальное значение выигрыша игрока В в каждой из строк и соответствующий номер стратегии игрока В.

$$\text{Для } k=1: \quad \max_i V_{i1} = \max\{2, 5, 6\} = 6 \Rightarrow i = 3;$$

$$\text{для } k=2: \quad \max_i V_{i2} = \max\{7, 4, 6\} = 7 \Rightarrow i = 1;$$

$$\text{для } k=3: \quad \max_i V_{i3} = \max\{-3, 2, 10\} = 10 \Rightarrow i = 3;$$

$$\text{для } k=4: \quad \max_i V_{i4} = \max\{6, 7, 8\} = 8 \Rightarrow i = 3.$$

б). Затем аналогичные действия надо реализовать для игрока А.

$$\text{Для } i=1: \quad \max_k W_{1k} = \max\{4, 5, 3, 2\} = 5 \Rightarrow k = 2;$$

$$\text{для } i=2: \quad \max_k W_{2k} = \max\{9, 2, 6, 5\} = 9 \Rightarrow k = 1;$$

$$\text{для } i=3: \quad \max_k W_{3k} = \max\{1, 4, 6, 7\} = 7 \Rightarrow k = 4.$$

в). Теперь необходимо проанализировать, имеются ли совпадающие пары индексов (i, k) в строках пунктов а) и б). В нашем примере таких пар две: (i=1, k=2) и (i=3, k=4). Следовательно, в данной игре имеется множество устойчивых по решений

$$\{(A_1, B_2) \text{ и } (A_3, B_4)\} \quad (2.4)$$

г). Найденное в пункте в) первое устойчивое решение (A_1, B_2) проверим на выполнение свойства коллективного решения (если оба субъекта смогли договориться о том, чтобы придерживаться стратегий $A = \hat{A}$ и $B = \hat{B}$, соответственно, то тот субъект, который нарушает договоренность, прежде всего и пострадает). Оценкой первого устойчивого решения для игрока А является

$$V(\hat{A}, \hat{B}) = V(A_1, B_2) = 7.$$

Если игрок А изменит выбранную стратегию A_1 на стратегию A_2 или A_3 , его выигрыши составят, соответственно

$$V(A_2, B_2) = 4 < V(A_1, B_2) = 7$$

или

$$V(A_3, B_2) = 6 < V(A_1, B_2) = 7,$$

то есть, такие действия игрока А приведут в обоих случаях к уменьшению его выигрыша.

Оценкой первого устойчивого решения для игрока В является

$$W(\hat{A}, \hat{B}) = W(A_1, B_2) = 5.$$

Если игрок В изменит выбранную стратегию B_2 на стратегию B_1 или B_3 , или B_4 , его выигрыши составят, соответственно

$$W(A_1, B_1)=4 < W(A_1, B_2)=5$$

или $W(A_1, B_3)=3 < W(A_1, B_2)=5$,

или $W(A_1, B_4)=2 < W(A_1, B_2)=5$,

то есть, подтвердилось, что такие действия игрока В приведут во всех трёх случаях к уменьшению его выигрыша.

д). Найденное в пункте в) второе устойчивое решение (A_3, B_4) проверим на выполнение свойства коллективного решения. Оценкой второго устойчивого решения для игрока А является

$$V(\hat{A}, \hat{B}) = V(A_3, B_4) = 8.$$

Если игрок А изменит выбранную стратегию A_3 на стратегию A_1 или A_2 , его выигрыши составят, соответственно

$$V(A_1, B_4)=6 < V(A_3, B_4)=8$$

или $V(A_2, B_4)=7 < V(A_3, B_4)=8$,

то есть, такие действия игрока А приведут в обоих случаях к уменьшению его выигрыша.

Оценкой второго устойчивого решения для игрока В является

$$W(\hat{A}, \hat{B}) = W(A_3, B_4) = 7.$$

Если игрок В изменит выбранную стратегию B_4 на стратегию B_1 или B_2 , или B_3 , его выигрыши составят, соответственно

$$W(A_3, B_1)=1 < W(A_3, B_4)=7$$

или $W(A_3, B_2)=4 < W(A_3, B_4)=7$,

или $W(A_3, B_3)=6 < W(A_3, B_4)=7$,

то есть, подтвердилось, что такие действия игрока В приведут во всех трёх случаях к уменьшению его выигрыша.

Ответ: в биматричной игре (таблица 2) найдено множество устойчивых решений $\{(A_1, B_2), (A_3, B_4)\}$ с оценками исходов $\{(7, 5), (8, 7)\}$, соответственно.

Замечание. Аналогично тому, как в матричных играх мы искали равновесную ситуацию в смешанных стратегиях [1], в биматричных играх также возможна равновесная ситуация в смешанных стратегиях, причем известна теорема Нэша [2], которая утверждает следующее: «Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях». Однако в связи с недостатком времени этот вопрос в рамках дисциплины «Теория оптимальных решений» не рассматривается.

2.2. Контрольные вопросы

2.2.1. Какое решение называется устойчивым по Нэшу?

2.2.2. Как формулируется свойство коллективного решения в контексте задачи поиска устойчивых решений?

2.2.3. Какой вид будут иметь формулы (2.3), если элементы матрицы вида (1.3) будут представлять потери игроков А и В, соответственно?

2.3. Список задач

2.3.1. Вычислить устойчивые решения, если в примере 2.1 биматричная игра задана потерями игроков А и В.

2.3.2. Биматричная игра задана платежными матрицами выигрышей игроков А и В (задача 1.4.1). Вычислить устойчивые решения для вариантов а), б), и с).

2.3.3. Биматричная игра задана платежными матрицами потерь игроков А и В (задача 1.4.1). Вычислить устойчивые решения для вариантов а), б), с) е) и ф).

Замечание. При вычислении устойчивых решений каждый результат необходимо проверить на выполнение свойства коллективного решения.

ТЕМА 3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

При решении практических задач нередко приходится иметь дело с ситуациями, когда необходимо одновременное выполнение нескольких условий (критериев), зачастую противоречивых. Например, в стремлении повысить помехоустойчивость системы передачи данных проектировщик вынужден увеличивать длины кодовых слов, что приводит к увеличению затрат (как временных, так и материальных).

3.1. Множество Парето

При анализе эффективности решения многокритериальной задачи можно воспользоваться принципом Парето – важнейшим из принципов отбора рациональных решений. Этот принцип позволяет отбросить все те решения (альтернативы выбора), которые могут быть заменены другими, обеспечивающими лучшие (в данном случае – большие) значения целевых функций всех игроков одновременно или части игроков, но без уменьшения значений целевых функций остальных субъектов, участвующих в игре. Решения, которые не могут быть указанным способом улучшены, называются эффективными или Парето-оптимальными. Такие эффективные решения обладают тем свойством, что улучшать значение целевой функции одного из игроков можно только за счет других субъектов.

Ограничимся рассмотрением случаев, когда решение принимается по двум критериям.

До сих пор мы рассматривали постановку оптимизационных за-

дач, в которых целевые функции принимали дискретные значения из конечного множества вещественных чисел. В отношении паретооптимальных решений рассмотрим более общий случай непрерывных функций, а затем вернемся к задачам в дискретной постановке.

Пусть W и V – критерии, по которым необходимо выбрать оптимальное решение (при этом желательно по возможности максимизировать значения W и V). Рассмотрим на плоскости (W, V) множество Ω возможных решений, которому на рисунке 3.1 соответствует заштрихованная область.

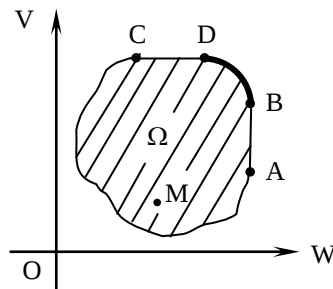


Рисунок 3.1 – Множество Парето

Каждая точка множества Ω обладает одним из следующих свойств: либо все точки, ближайшие к ней, принадлежат множеству Ω (такая точка называется внутренней точкой множества Ω), либо сколь угодно близко от нее расположены как точки множества Ω , так и точки, множеству Ω не принадлежащие (такие точки называются граничными точками множества Ω). Граничная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству Ω . В дальнейшем мы будем рассматривать только такие множества, которым принадлежат все точки границы. Множество всех граничных точек множества Ω называется его границей (обозначим его $\partial\Omega$).

Пусть M – произвольная точка множества Ω , внутренняя или граничная, и (W, V) – ее координаты. Поставим следующий вопрос: можно ли, оставаясь в множестве Ω , переместиться из точки M в близкую точку так, чтобы при этом увеличились обе ее координаты? Если M – внутренняя точка, то это, бесспорно, возможно. Если же M – граничная точка, то такое возможно не всегда. Из точек вертикального отрезка AB можно переместиться, увеличивая лишь координату V (координата W при этом остается неизменной). Перемещая

точку горизонтального отрезка CD вправо, мы увеличиваем координату W (при этом координата V сохраняет свое значение). Что же касается дуги BD, то перемещение вдоль нее способно лишь увеличить одну из координат при одновременном уменьшении другой.

Тем самым точки множества Ω можно разбить на три класса:

- к первому классу относятся точки, которые можно сдвинуть так, чтобы одновременно увеличились обе координаты и при этом точки остались в множестве Ω (в этот класс попадают все внутренние точки множества Ω и часть его граничных точек);
- второй класс образуют точки, перемещением которых по множеству Ω можно увеличить только одну из координат при сохранении значения второй координаты (вертикальный отрезок AB и горизонтальный отрезок CD на границе множества Ω);
- в третий класс попадают точки, перемещение которых по множеству Ω способно лишь уменьшить хотя бы одну из координат (дуга BD границы $\partial\Omega$).

Множество точек третьего класса BD (выделено на рисунке 3.1 утолщенной линией) называется *границей (множеством) Парето* данного множества Ω .

Говоря нестрого, граница Парето множества Ω – это точки, из которых нельзя сдвинуться на "север", "восток" либо "северо-восток", оставаясь в том же множестве Ω .

Другими словами, в множество Парето не включаются такие решения, которые могут быть улучшены одновременно по обоим критериям.

3.2. Постановка задачи в общем виде

Пусть на плоскости (x, y) задано множество ω , представленное на рисунке 3.2 заштрихованной областью, и в каждой точке этого множества определены две непрерывные функции:

$$V = \Phi(x, y), \quad W = \Psi(x, y), \quad (x, y) \in \omega. \quad (3.1)$$

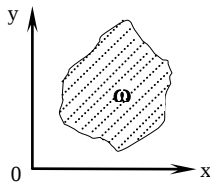


Рисунок 3.2 – Множество ω

Рассмотрим следующую задачу: на множестве ω найти точку (x^0, y^0) в которой

$$\Phi(x^0, y^0) = \max, \quad \text{и} \quad \Psi(x^0, y^0) = \max.$$

Обычно это записывается следующим образом:

$$\Phi(x, y) \rightarrow \max \quad \text{и} \quad \Psi(x, y) \rightarrow \max, \\ (x, y) \in \omega.$$

Сразу же отметим, что в общем случае поставленная задача решения не имеет. В самом деле, изобразим на плоскости (V, W) все точки, координаты которых вычисляются по формулам (3.1). Обозначим полученное множество через Ω . Из рисунка 3.3 видно, что $W_{\max}$ (наибольшее значение W) и $V_{\max}$ (наибольшее значение V) достигаются в разных точках, а точка M^* с координатами $(W_{\max}, V_{\max})$ лежит вне множества Ω .

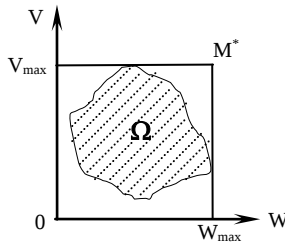


Рисунок 3.3 – Множество Ω

Таким образом, в исходной постановке задача, вообще говоря, неразрешима – удовлетворить обоим требованиям одновременно невозможно. И, следовательно, нужно искать какое-то компромиссное решение.

Среди известных стоит отметить два метода:

- 1) метод уступок;
- 2) метод идеальной точки.

Оба метода используют множество Парето, составленное в данном случае из допустимых точек задачи, которые не могут быть «сдвинуты» в пределах допустимого множества с улучшением сразу по обоим критериям. Иными словами, улучшая значения одного из критериев, мы неизбежно ухудшаем значения другого.

Метод (последовательных) уступок заключается в том, что лицо, принимающее решение (ЛПР), работая в режиме диалога со специалистом, анализирует точки на границе Парето и, в конце концов, соглашается остановиться на некоторой компромиссной точке.

Метод идеальной точки состоит в отыскании на границе Парето

то точки, ближайшей к *точке утопии*, задаваемой ЛПР (точка M^* на рисунке 3.3). Обычно ЛПР формулирует цель в виде желаемых значений показателей, и часто в качестве координат целевой точки выбирается сочетание наилучших значений всех критериев (обычно эта точка не реализуется при заданных ограничениях, поэтому ее и называют точкой утопии).

3.2.1. Метод идеальной точки

Рассмотрим реализацию метода идеальной точки на конкретном примере.

Пример 3.1. (случай непрерывного множества)

Пусть на множестве ω плоскости (x, y) , определяемом системой неравенств

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 10, \\ 0 \leq y \leq 6, \\ 9x + 15y \leq 135, \end{cases} \quad (3.2)$$

заданы две линейные функции:

$$\begin{cases} W = x - y + 5, \\ V = x + y - 2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Требуется найти решение задачи

$$V \rightarrow \max, \quad W \rightarrow \max.$$

Решение

В соответствии с ограничениями (3.2) множество ω представляет

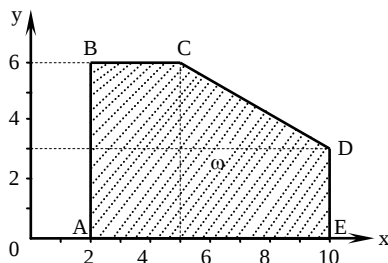


Рисунок 3.4 – Множество ω

собой пятиугольник, на рисунке 3.4 его вершины имеют следующие координаты (X, Y) : $A(2,0)$; $B(2,6)$; $C(5,6)$; $D(10,3)$; $E(10,0)$.

В силу линейности критериев W и V пятиугольник $ABCDE$ пе-

переходит в пятиугольник $A^*B^*C^*D^*E^*$, представленный на рисунке 3.5, координаты вершин которого (W, V) вычисляются по формулам (3.3): $A^*(7, 0)$, $B^*(1, 6)$, $C^*(4, 9)$, $D^*(12, 11)$, $E^*(15, 8)$.

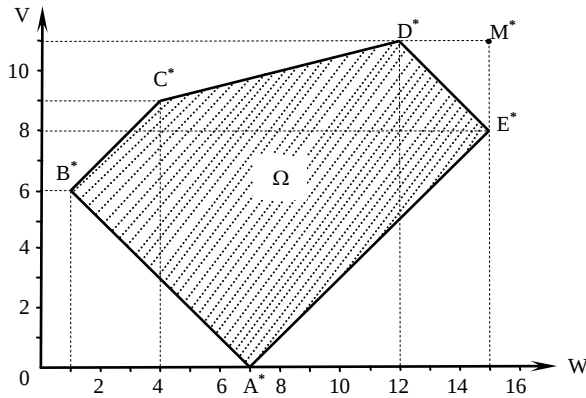


Рисунок 3.5 – Множество Ω и точка утопии M^*

Находим границу Парето. Это отрезок D^*E^* . Точка утопии $M^*(15, 11)$ считается заданной (ее координаты – суть наибольшие значения W и V).

Требуется найти на множестве Парето точку, ближайшую к точке утопии M^* . Из рисунка 3.5 видно, что искомая точка должна лежать на отрезке D^*E^* . На рисунке 3.6 проведем через точки D^* и E^* прямую. Пусть

$$\alpha W + \beta V = \gamma \quad (3.4)$$

– ее уравнение.

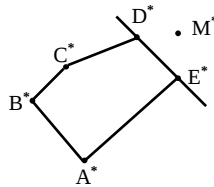


Рисунок 3.6 – К вычислению идеальной точки

Чтобы отыскать конкретные значения коэффициентов α , β и γ , подставим в (3.4) координаты обеих точек – D^* и E^* . Получим

$$12\alpha + 11\beta = \gamma, \quad (3.5)$$

$$15\alpha + 8\beta = \gamma. \quad (3.6)$$

Вычитая из равенства (3.5) равенство (3.6), после простых преобразований придем к соотношению

$$-3\alpha + 3\beta = 0,$$

откуда

$$\alpha = \beta.$$

Положим $\alpha = \beta = 1$. Тогда любое из равенств (3.5) или (3.6) дает в результате $\gamma = 23$ и

$$W + V = 23$$

– искомое уравнение прямой.

Теперь стоит напомнить, как ищется расстояние между точками, заданными своими координатами.

На рисунке 3.7 $M_1(W_1, V_1)$ и $M_2(W_2, V_2)$ – точки на плоскости (W, V) . Для того чтобы найти расстояние $d_{M_1M_2}$ между ними, достаточно вычислить длину гипотенузы построенного прямоугольного треугольника $M_1M_2M_3$ (заштрихованная область на рисунке 3.7). Воспользовавшись теоремой Пифагора, вычислим длину гипотенузы

$$d_{M_1M_2} = \sqrt{(W_1 - W_2)^2 + (V_1 - V_2)^2}. \quad (3.7)$$

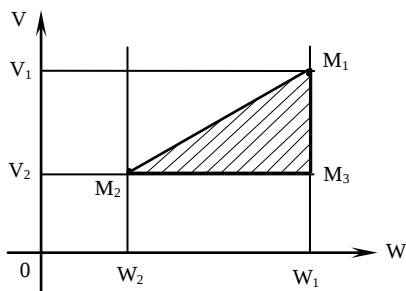


Рисунок 3.7 – К вычислению расстояния между точками

По условию задачи нам нужно определить на прямой D^*E^* , которую описывает уравнение

$$W + V = 23, \quad (3.8)$$

идеальную точку $M^0(W^0, V^0)$, минимально удаленную от точки утопии M^* . Подставим в (3.7) координаты точки утопии $M^*(15, 11)$, обозначим

полученное подкоренное выражение через z и решим следующую задачу поиска экстремума:

$$z = (W - 15)^2 + (V - 11)^2 \rightarrow \min. \quad (3.9)$$

Так как согласно (3.8) $W = 23 - V$, то соотношение (3.9) можно переписать в виде

$$z = (8 - V)^2 + (V - 11)^2 \rightarrow \min.$$

Возводя в квадрат и приводя подобные, получаем

$$z = 2V^2 - 38V + 185 \rightarrow \min. \quad (3.10)$$

Для решения оптимизационной задачи (3.10) вычислим первую производную z' и приравняем её нулю:

$$z' = 4V^0 - 38 = 0,$$

отсюда найдем координату V^0 идеальной точки M^0

$$V^0 = \frac{19}{2}.$$

В соответствии с (3.8) найдем координату W^0 идеальной точки M^0 :

$$W^0 = 23 - V^0 = 23 - \frac{19}{2} = \frac{27}{2}.$$

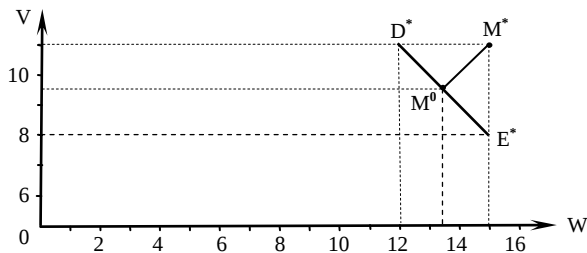
Минимальное расстояние $d^0 = d_{M^*M^0}$ от точки утопии M^* до прямой D^*E^* найдем с учетом (3.7) и (3.10):

$$d^0 = d_{M^0M^*} = \sqrt{z} = \sqrt{2 \times \left(\frac{19}{2}\right)^2 - 38 \times \frac{19}{2} + 185} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

На рисунке 3.8 представлена идеальная точка M^0 с координатами $(W^0, V^0) = \left(\frac{27}{2}; \frac{19}{2}\right)$, которая находится на расстоянии $\frac{3}{\sqrt{2}}$ от точки утопии $M^* (15, 11)$.

Соответствующие значения x^0 и y^0 легко находятся из системы линейных уравнений (3.3):

$$\begin{cases} x^0 - y^0 + 5 = \frac{27}{2}, \\ x^0 + y^0 - 2 = \frac{19}{2}. \end{cases}$$

Рисунок 3.8 – Поиск идеальной точки M^0

Имеем:

$$x^0 = 10, \quad y^0 = \frac{3}{2}.$$

Ответ: Выбор решения $(x^0, y^0) = (10, \frac{3}{2})$ на множестве ω обеспечивает паретооптимальное решение $(W^0, V^0) = (\frac{27}{2}, \frac{19}{2})$ на множестве Ω .

Замечание. Мы рассмотрели задачу, в которой необходимо выполнить условие

$$\Phi(x, y) \rightarrow \max, \quad \Psi(x, y) \rightarrow \max.$$

На практике часто встречаются случаи, когда требования выглядят по-иному, например:

$$\Phi(x, y) \rightarrow \max, \quad \Psi(x, y) \rightarrow \min.$$

или даже так:

$$\Phi(x, y) \rightarrow \min, \quad \Psi(x, y) \rightarrow \min.$$

Можно, конечно, решать такие задачи и непосредственно. Но значительно удобнее поступить по-другому, если учесть, что функция

$$\Theta = -\Psi$$

обладает следующим свойством: она достигает наибольшего значения в точности в тех точках, где функция Ψ принимает наименьшее значение, и наоборот. Иными словами, условия

$$\Psi \rightarrow \min \quad \text{и} \quad \Theta \rightarrow \max$$

равносильны. Поэтому, поменяв в случае необходимости знак у критерия на противоположный, мы можем свести любую двухкритериальную задачу к уже рассмотренной:

$$\Phi(x, y) \rightarrow \max, \quad \Psi(x, y) \rightarrow \max.$$

3.3. Постановка задачи (дискретный случай)

Биматричная игра задана матрицей вида (1.3):

$$U = \parallel (a_{ik}, b_{ik}) \parallel_{m \times n}.$$

Необходимо построить множество паретооптимальных решений исходя из условий

$$\left. \begin{array}{l} W(A, B) \rightarrow \max \\ V(A, B) \rightarrow \max \end{array} \right\}.$$

В случае, если значения критериальных функций V и W заданы в дискретном виде, множество Ω представляет собой конечное множество точек (решений), каждая из которых определяется парой стратегий (A_i, B_k) , $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$. Непрерывная граница множества Ω отсутствует, идеальную точку в общем случае найти невозможно. Решить задачу можно двумя способами:

1) Парное сравнение всех исходов (решений) матрицы (1.3) по следующему правилу: если $W(A_i, B_k) > W(A_s, B_p)$ и $V(A_i, B_k) \geq V(A_s, B_p)$ или $W(A_i, B_k) \geq W(A_s, B_p)$ и $V(A_i, B_k) > V(A_s, B_p)$, то решение (A_s, B_p) из дальнейшего рассмотрения исключается, как заведомо не являющееся паретооптимальным решением. После завершения всех парных сравнений будет сформировано множество паретооптимальных решений, из которого ЛПР выбирает наилучшее, по его мнению, решение исходя из своего опыта и интуиции (заметим, что наша задача ограничивается построением множества паретооптимальных решений). В связи с тем, что этот способ является очень трудоемким, так как он фактически сводится к полному перебору парных сравнений всех решений матрицы вида (1.3), целесообразно использовать графический способ.

2) Графический способ, который предполагает нанесение на плоскость (W, V) точек, соответствующих исходам (решениям) при выборе пар стратегий (A_i, B_k) , $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$, матрицы вида (1.3). В множество паретооптимальных решений включаются решения, которым соответствуют крайние точки на плоскости (W, V) в направлениях "север", "восток" либо "северо-восток".

Рассмотрим реализацию графического способа с помощью следующего примера.

Пример 3.2. (дискретный случай)

Игра задана с помощью таблицы 2 (пример 2.1). Требуется:

а) Построить множество паретооптимальных решений.

б) Провести сравнительный анализ результатов данного примера с результатами, полученными в примере 2.1.

Решение

Решим задачу, используя графический способ.

а). Пронумеруем пары исходов игроков А и Б следующим образом:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| (1) – $(V_{11}, W_{11})=(2, 4)$; | (7) – $(V_{23}, W_{23})=(2, 6)$; |
| (2) – $(V_{12}, W_{12})=(7, 5)$; | (8) – $(V_{24}, W_{24})=(7, 5)$; |
| (3) – $(V_{13}, W_{13})=(-3, 3)$; | (9) – $(V_{31}, W_{31})=(6, 1)$; |
| (4) – $(V_{14}, W_{14})=(6, 2)$; | (10) – $(V_{32}, W_{32})=(6, 4)$; |
| (5) – $(V_{21}, W_{21})=(5, 9)$; | (11) – $(V_{33}, W_{33})=(10, 6)$; |
| (6) – $(V_{22}, W_{22})=(4, 2)$; | (12) – $(V_{34}, W_{34})=(8, 7)$. |

б). На плоскости (V, W) нанесем точки (1), ..., (12), представленные на рисунке 3.9.

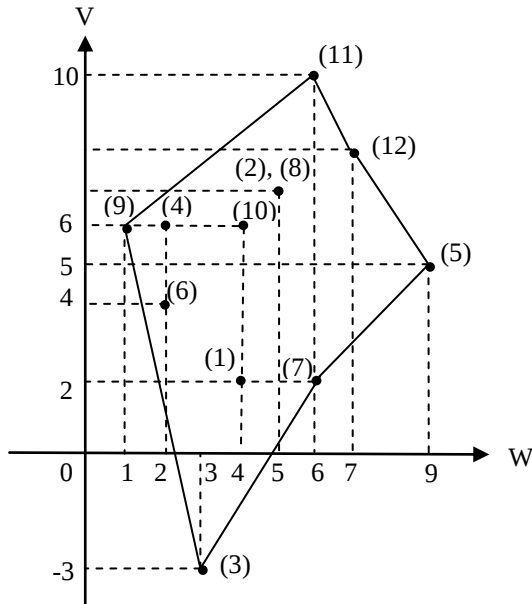


Рисунок 3.9 – Поиск паретооптимальных решений

в). В данном дискретном случае границу Парето представляют три крайние точки в направлениях «север», «восток», «северо-восток» – (11), (12), (5). Таким образом, построим множество Парето:

$$\{(A_3, B_3), (A_3, B_4), (A_2, B_1)\} \quad (3.11)$$

с оценками исходов, соответственно

$$\{(10, 6), (8, 7), (5, 9)\}.$$

Сравнивая попарно решения (3.11), убедимся, что ни одно решение не может быть улучшено одновременно по обоим значениям функций V и W :

$$V_{33}=10 > V_{34}=8, \text{ но } W_{33}=6 < W_{34}=7,$$

$$V_{33}=10 > V_{21}=5, \text{ но } W_{33}=6 < W_{21}=9,$$

$$V_{34}=8 > V_{21}=5, \text{ но } W_{34}=7 < W_{21}=9.$$

г). Сравним множество паретооптимальных решений (3.11) с множеством (2.4) устойчивых решений $\{(A_1, B_2) \text{ и } (A_3, B_4)\}$, полученных в примере 2.1. Решение (A_3, B_4) с оценками исходов ($V_{34}=8, W_{34}=7$) является одновременно и устойчивым, и паретооптимальным. Очевидно, это решение и может быть рекомендовано ЛПР для окончательного выбора.

Замечание. Отличие ситуации равновесия от ситуации, оптимальной по Парето, состоит в следующем:

- в ситуации равновесия ни один из игроков, действуя в одиночку, не может увеличить свой собственный выигрыш;
- в ситуации, оптимальной по Парето, игроки, действуя совместно, не могут увеличить выигрыш хотя бы одного из них, не уменьшая выигрыша другого.

3.4. Контрольные вопросы

- 3.4.1. Какое решение называется паретооптимальным решением?
- 3.4.2. Что такое граница Парето?
- 3.4.3. В чем суть метода последовательных уступок?
- 3.4.4. Какая точка называется точкой утопии?
- 3.4.5. Какая точка называется идеальной точкой?
- 3.4.6. В чем суть метода идеальной точки?
- 3.4.7. В чем суть способа попарных сравнений решений в биматричной игре при построении множества паретооптимальных решений?
- 3.4.8. В чем суть графического способа при построении множества паретооптимальных решений в биматричной игре?
- 3.4.9. При реализации графического способа на каких направлениях надо искать паретооптимальные решения, если элементы матрицы биматричной игры представляют потери игроков?

3.5. Список задач

- 3.5.1. Используя графический способ, построить множество паретооптимальных решений для матрицы из примера 2.1, если биматричная игра задана потерями игроков A и B . Найти устойчивые решения. Про-

вести сравнительный анализ множеств устойчивых и паретооптимальных решений.

3.5.2. Биматричная игра задана платежными матрицами выигрышей игроков А и В (задача 1.4.1). Используя графический способ, построить множество паретооптимальных решений для вариантов а), б), и с). Для каждого варианта провести сравнительный анализ множеств устойчивых и паретооптимальных решений.

3.5.3. Биматричная игра задана платежными матрицами потерь игроков А и В (задача 1.4.2). Используя графический способ, построить множество паретооптимальных решений для вариантов а), б), с) е) и ф). Для каждого варианта провести сравнительный анализ множеств устойчивых и паретооптимальных решений.

Замечание. После построения множества паретооптимальных решений необходимо убедиться, что ни одно из решений не может быть улучшено одновременно по обоим значениям функций V и W .

3.5.4. Пусть к нерегулируемому перекрестку едут на высокой скорости под прямым углом друг к другу два автомобиля. У каждого из водителей есть две стратегии:

1) снизить скорость до безопасной (безопасная стратегия – стратегия Б),

2) продолжать ехать на высокой скорости (рискованная стратегия – стратегия Р).

Если оба водителя будут придерживаться стратегии Б, то это приведет к благополучному исходу, оцениваемому для каждого водителя числом 1. Если оба водителя следуют стратегии Р, то происходит авария, и потери каждого отражаются отрицательным числом (–9). При других комбинациях стратегий (Б, Р) или (Р, Б) исход оценивается числом 0 для снизившего скорость (за потерю времени) и числом 3 для двигающегося на высокой скорости (за экономию времени). В итоге имеем игру, представленную в таблице 3.

Построить множество паретооптимальных решений и множество устойчивых решений. Провести сравнительный анализ.

Таблица 3

1 \ 2	Б	Р
Б	(1, 1)	(0, 3)
Р	(3, 0)	(–9, –9)

3.5.5. Арестованы два подозреваемых в совершении серьезного преступления. У прокурора нет полного доказательства их вины, и резуль-

таты судебного разбирательства дела полностью зависят от стратегии поведения подозреваемых. У каждого из них есть две альтернативы – сознаться в совершении преступления или нет. Возможные исходы представлены в таблице 4 (Н – непризнание, П – признание: 1,2 – номера задержанных). Таблица 4 интерпретируется следующим образом. Если оба арестованных не признаются, то им будет предъявлено обвинение в совершении относительно незначительного преступления (например, связанного с незаконным хранением оружия), и оба они получат по одному году лишения свободы. Если один признается, а второй нет, то первый за выдачу сообщника и помощь в расследовании дела будет полностью освобожден от ответственности, а второй получит полный срок – 10 лет лишения свободы. Если же оба признаются, то оба понесут наказание, но за чистосердечное раскаяние срок заключения будет уменьшен до 7 лет. Какое решение следует принять каждому из заключенных, чтобы минимизировать наказание?

Таблица 4

1 \ 2	Н	П
Н	(1, 1)	(10, 0)
П	(0, 10)	(7, 7)

Построить множество паретооптимальных решений и множество устойчивых решений. Провести сравнительный анализ.

3.5.6. На множестве

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

заданы две линейные функции:

$$W = 2x + 1 \quad \text{и} \quad V = 2y + 3.$$

Требуется найти решение задачи

$$W \rightarrow \max, \quad V \rightarrow \max.$$

3.5.7. На множестве, определяемом системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 4, \\ 2x + y \leq 6, \end{cases}$$

заданы линейные функции:

$$\begin{aligned} W &= x + y + 2, \\ V &= x - y + 6. \end{aligned}$$

Требуется найти решение задачи

$$W \rightarrow \max, \quad V \rightarrow \max.$$

3.5.8. На множестве, определяемом системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ 0 \leq y \leq 2, \\ x + 2y \leq 6, \end{cases}$$

заданы линейные функции:

$$W = x + y + 2,$$

$$V = x - y + 6.$$

Требуется найти решение задачи

$$W \rightarrow \max, \quad V \rightarrow \max.$$

3.5.9. Пусть на множестве

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

заданы две линейные функции:

$$W = 2x \quad \text{и} \quad V = x - y - 1.$$

Требуется найти решение задачи

$$W \rightarrow \min, \quad V \rightarrow \max.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теория оптимальных решений» для студентов специальности 7.091501 «Компьютерные системы и сети» дневной и заочной форм обучения. Часть первая. Разделы «Бинарные отношения» и «Матричные игры»/Сост. Ю.Н. Щепин – Севастополь, Изд-во СевНТУ, 2003. –35с.
2. Шикин Е.В. Математические методы и модели в управлении: Учеб. пособие/ Е.В. Шикин, А.Г., Чхартшвили. – М.: Дело, 2000. – 440с.