

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим занятиям по дисциплине
«Теория оптимальных решений»
для студентов специальности
7.09150 «Компьютерные системы и сети»
дневной и заочной форм обучения
Часть первая.
Разделы «Бинарные отношения» и «Матричные игры»

Севастополь
2014

УДК 65.012(075.8)

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теория оптимальных решений» для студентов специальности 7.091501 «Компьютерные системы и сети» дневной и заочной форм обучения. Часть первая. Разделы «Бинарные отношения» и «Матричные игры»/Сост. Щепин Ю.Н. – Севастополь, Изд-во Сев НТУ, 2014. –35с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в овладении практическими навыками поиска наилучшего или приемлемого способа действий для достижения одной или нескольких целей методами поддержки принятия решений в условиях слабоструктурированных или неструктурированных ситуаций, заданных бинарным отношением или платежной матрицей, представляющей матричную игру.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники, протокол № 11 от 25.06.14 г.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент Цуканов А.В., профессор, зав. кафедрой менеджмента и экономико-математических методов, доктор технических наук.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Тема 1. Постановка задачи принятия решений	4
1.1. Бинарные отношения и их свойства	4
1.2. Контрольные вопросы	7
1.3. Список задач	8
Тема 2. Матричные игры.....	9
2.1. Платежная матрица	9
2.2. Контрольные вопросы.....	20
2.3. Список задач	21
Тема 3.....	23
3.1. Принятие решений в условиях риска.....	23
3.2. Контрольные вопросы.....	26
3.3. Список задач	26
Тема 4. Принятие решений в условиях полной неопределенности	28
4.1. Критерии для «безнадежной» неопределенности	28
4.3. Контрольные вопросы	33
4.4. Список задач.....	33
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	34

Введение

Методические указания адресованы студентам очной и заочной форм обучения специальности 7.091501 «Компьютерные системы и сети», изучающим дисциплину «Теория оптимальных решений».

Необходимыми условиями успешного изучения данной дисциплины являются хорошие знания по курсам «Дискретная математика», «Моделирование», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Численные методы».

В соответствии с рабочей программой дисциплины «Теория оптимальных решений» студенты должны приобрести практические навыки применения основных положений теории принятия решений (ТПР): научиться применять подходы к учету факторов неопределенности и риска; строить математические модели, используемые для этих целей; анализировать ситуации, возникающие в условиях неопределенности и недостатка информации при принятии решений.

Каждый раздел настоящих методических указаний содержит краткое введение, которое не исчерпывает необходимый минимум теоретических положений для успешного решения списка задач. Прежде, чем приступать к решению задач конкретного раздела, необходимо изучить соответствующие теоретические положения, пользуясь конспектом лекций и рекомендованной литературой, а также найти ответы на все предлагаемые контрольные вопросы.

Для успешного освоения дисциплины необходимо решить предлагаемые в каждом разделе задачи. При этом условия задач должны быть переписаны в тетрадь для практических занятий, представлено подробное решение каждой задачи, проведен анализ результатов и сделаны выводы.

Тема 1. Постановка задачи принятия решений

1.1. Бинарные отношения и их свойства

Бинарное отношение R на непустом множестве X есть подмножество множества всех упорядоченных пар элементов из X ; множество всех упорядоченных пар задается прямым (декартовым) произведением

$$X \times X = \{(x, y): x \in X, y \in X\}.$$

Запись xRy (читается: x находится в отношении R к y) означает, что (x, y) принадлежит бинарному отношению R . Бинарное отношение

позволяет формализовать операции попарного сравнения альтернатив. Существует наглядный способ задания бинарных отношений на конечных множествах – с помощью ориентированного графа.

Рассмотрим пару $\langle A, R \rangle$, где A – множество сравниваемых объектов (альтернатив); R – бинарное отношение на A . Задание бинарного отношения содержательно интерпретируется как введение некоторой системы предпочтений. Именно, если пара $(a_i, a_k) \in R$, где $a_i \in A, a_k \in A, i, k = \overline{1, n}$ (n – мощность множества A), то подразумевается, что элемент a_i в определенном смысле “лучше” или “не хуже” элемента a_k . Пару $\langle A, R \rangle$ называют моделью выбора.

Зададимся теперь вопросом о том, что же следует понимать под решением задачи выбора $\langle A, R \rangle$. Для ответа на этот вопрос необходимо найти наилучшие a^* и максимальные a^0 элементы и определить, является ли множество максимальных элементов $\text{Max}_R A$ внешне устойчивым.

Пример 1.1

Задана модель выбора $\langle A, R \rangle$: $A = \{a, b, c, d, f\}$; $R = \{(a, b), (a, f), (b, d), (c, d), (c, f), (d, a), (d, c), (f, a), (f, b), (f, c)\}$.

Имеются ли в бинарном отношении R наилучшие элементы? Найти множество максимальных элементов. Определить, является ли множество максимальных элементов внешне устойчивым?

Решение

Процесс решения удобно проводить с помощью ориентированного графа, в котором множество вершин соответствует множеству элементов бинарного отношения, а каждое отношение предпочтения $(a_i, a_k) \in R$ представляется парой вершин, соединенных стрелкой, направленной от вершины a_i к вершине a_k :

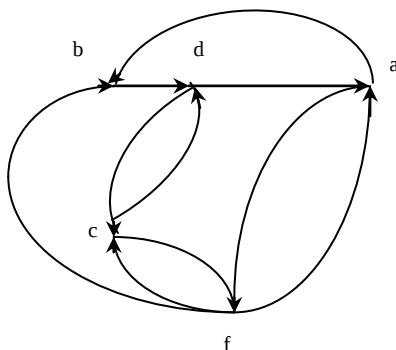


Рисунок 1.1 – Граф бинарного отношения

Шаг первый. Поиск наилучших элементов.

На языке графов понятие наилучшего элемента a^* соответствует наличию вершины, соединенной исходящими из нее стрелками со всеми остальными вершинами графа. Поскольку в графе (Рисунок 1.1) такие вершины отсутствуют, данное бинарное отношение наилучших элементов не содержит.

Шаг второй. Поиск максимальных элементов.

Найдем максимальные элементы a^0 заданного бинарного отношения R:

- элемент a не является максимальным элементом, т.к. для имеющегося отношения (d, a) отсутствует симметричное отношение (a, d) ;
- элемент b не является максимальным элементом, т.к. для имеющихся отношений (a, b) и (f, b) отсутствуют соответствующие симметричные отношения (b, a) и (b, f) ;
- элемент c является максимальным элементом, т.к. для отношений (d, c) и (f, c) существуют симметричные отношения (c, d) и (c, f) , следовательно, найден первый максимальный элемент $a_1^0 = c$;
- элемент d не является максимальным элементом, т.к. для отношения (b, d) отсутствует симметричное отношение (d, b) ;
- элемент f является максимальным элементом, т.к. для отношений (a, f) и (c, f) существуют симметричные отношения (f, a) и (f, c) , следовательно, найден второй максимальный элемент $a_2^0 = f$.

Множество максимальных элементов включает два элемента из множества A : $\text{Max}_R A = \{c, f\}$.

Шаг третий. Анализ выполнения условия внешней устойчивости.

Множество $\text{Max}_R A$ называется внешне устойчивым, если для любого элемента $a \in A \setminus \text{Max}_R A$ найдется такой элемент $a^0 \in \text{Max}_R A$, что справедливо отношение $a^0 R a$.

Определим множество элементов, не являющихся максимальными: $A \setminus \text{Max}_R A = \{a, b, d\}$. Исследуем множество максимальных элементов на выполнение условия внешней устойчивости:

- для элемента a условие выполняется, т.к. имеется отношение (f, a) ;

- для элемента b условие выполняется, т.к. имеется отношение (f, b) ;
- для элемента d условие выполняется, т.к. имеется отношение (c, d) .

Таким образом, множество максимальных элементов $\text{Max}_R A = \{c, f\}$ является внешне устойчивым (ядром бинарного отношения R).

Ответ: Множество максимальных элементов заданного бинарного отношения R , включающее элементы c и f , является внешне устойчивым. При переходе от модели бинарных отношений на содержательный уровень окончательный выбор альтернативы, которая будет признана оптимальной, целесообразно производить из альтернатив, представленных элементами c и f , а остальные альтернативы являются заведомо не оптимальными.

1.2. Контрольные вопросы

1.2.1. Дайте определение бинарного отношения.

1.2.2. Какими свойствами обладают бинарные отношения?

1.2.3. Проиллюстрируйте свойства бинарных отношений с помощью графов.

1.2.4. Приведите содержательные примеры бинарных отношений и проиллюстрируйте их свойства.

1.2.5. Как Вы понимаете отношения предпочтения и безразличия?

1.2.6. Какой элемент называется наилучшим? Что дает для задачи принятия решения наличие в бинарном отношении наилучшего элемента? Какие признаки на графе определяют наилучший элемент?

1.2.7. Какой элемент называется максимальным? Какие признаки на графе определяют максимальный элемент?

1.2.8. Какие элементы называются несравнимыми по бинарному отношению?

1.2.9. В каком случае бинарное отношение называется линейным? Как отражается на задаче принятия решения обстоятельство, при котором бинарное отношение не является линейным?

1.2.10. Что называется ядром бинарного отношения?

1.2.11. Почему понятие внешней устойчивости множества максимальных элементов является существенным для проблемы принятия решения?

1.2.12. Перечислите преимущества использования моделей бинарных отношений для представления задач принятия решений.

1.3. Список задач

1.3.1. Заданы модели выбора $\langle A, R_i \rangle$. $A = \{a, b, c, d\}$. Для каждого из бинарных отношений R_i , $i = \overline{1,6}$, построить граф, найти наилучшие элементы:

$R_1 = \{(a, b), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (d, b), (d, d)\}$;

$R_2 = \{(a, a), (b, a), (b, d), (c, a), (c, d), (d, a), (d, c), (d, d)\}$;

$R_3 = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, d)\}$;

$R_4 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\}$;

$R_5 = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, d)\}$;

$R_6 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, a), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)\}$.

Определите свойства каждого из бинарных отношений. Обоснуйте, почему то или иное свойство выполняется (или не выполняется).

1.3.2. Заданы модели выбора $\langle A, R_i \rangle$, $i = \overline{1,6}$. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

Для каждого i -го бинарного отношения построить граф и найти множество максимальных элементов. Является ли найденное множество внешне устойчивым?

$R_1 = \{(a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_2), (a_2, a_4), (a_2, a_5), (a_3, a_5), (a_4, a_1), (a_4, a_2), (a_4, a_4), (a_5, a_1)\}$;

$R_2 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_5), (a_2, a_3), (a_2, a_2), (a_2, a_4), (a_2, a_5), (a_3, a_2), (a_3, a_5), (a_4, a_1), (a_4, a_2), (a_4, a_3)\}$;

$R_3 = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_4, a_1), (a_4, a_2), (a_4, a_3), (a_4, a_4), (a_4, a_5), (a_5, a_2), (a_5, a_4)\}$;

$R_4 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_5), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_2, a_5), (a_3, a_2), (a_3, a_5), (a_4, a_1), (a_4, a_2), (a_4, a_3), (a_5, a_4)\}$;

$R_5 = \{(a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_4), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_4, a_1), (a_4, a_2), (a_4, a_4), (a_5, a_5)\}$;

$R_6 = \{(a_1, a_3), (a_1, a_5), (a_2, a_4), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3), (a_3, a_5), (a_4, a_4), (a_5, a_1), (a_5, a_3), (a_5, a_5)\}$.

Что произойдет, если заданные бинарные отношения изменятся следующим образом:

- в бинарное отношение R_1 добавлена пара (a_3, a_2) ;
- в бинарном отношении R_2 отсутствует пара (a_4, a_1) ;
 - в бинарное отношение R_3 добавлена пара (a_3, a_5) ;
 - в бинарное отношение R_4 добавлена пара (a_4, a_5) ;
 - в бинарное отношение R_5 добавлена пара (a_5, a_4) ;
 - в бинарное отношение R_6 добавлена пара (a_1, a_4) .

1.3.3. Докажите, что если отношение R симметрично и транзитивно, то оно и рефлексивно (следовательно, при определении эквивалентности можно ограничиться только двумя требованиями).

1.3.4. Докажите, что из асимметричности следует антирефлексивность.

Тема 2. Матричные игры

2.1. Платежная матрица

При решении задач принятия решений используют теорию игр как раздел оптимизационного подхода. В конечной игре платежная матрица (матрица эффективности, матрица игры) включает все значения выигрышей игрока A . Пусть игрок A имеет возможность выбора из m стратегий A_i , а игрок B – из n стратегий B_k ($i = \overline{1, m}; k = \overline{1, n}$). Игра может быть названа $m \times n$ -игрой. Представим матрицу игры двух лиц с нулевой суммой в виде следующей таблицы (условимся, что мы выступаем в роли игрока A):

Таблица 2.1 – Платежная матрица

	B_1	B_2	...	B_k	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ik}	...	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}

2.1.1. Равновесная ситуация

Предполагается, что оба игрока A и B не располагают информацией о ходе партнера по антагонистической игре. Игрок A должен получить максимальный гарантированный результат при

наихудших условиях (чистая нижняя цена игры, так называемый «максимин»):

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_k a_{ik}, \quad (2.1)$$

где $\alpha_i = \min_k a_{ik}$ – наименьший выигрыш игрока А при выборе стратегии A_i (чистая стратегия A_i). Игрок В определяет чистую верхнюю цену игры («минимакс»):

$$\beta = \min_k \beta_k = \min_k \max_i a_{ik}, \quad (2.2)$$

где $\beta_k = \max_i a_{ik}$ – наибольший выигрыш игрока А при выборе игроком В чистой стратегии B_k .

В случае, когда нижняя цена игры равна верхней цене игры, их общее значение называется просто ценой игры и обозначается через γ . С учетом (2.1) и (2.2) можно записать:

$$\max_i \min_k a_{ik} = a_{i^0 k^0} = \min_k \max_i a_{ik}. \quad (2.3)$$

Элемент матрицы $a_{i^0 k^0}$ называют седловой точкой матрицы А или точкой равновесия.

Пример 2.1

Определить верхнюю и нижнюю цены для заданной матрицы игры:

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	3
A_2	4	5	6

Имеется ли в данной игре седловая точка?

Решение

Вычислим гарантированный результат игрока А согласно (2.1):

$$\alpha_1 = \min_k a_{1k} = \min \{1, 2, 3\} = 1;$$

$$\alpha_2 = \min_k a_{2k} = \min \{4, 5, 6\} = 4.$$

Определим нижнюю цену игры:

$$\alpha = \max \{\alpha_1, \alpha_2\} = \max \{1, 4\} = 4 \Rightarrow i^0 = 2; A_{\text{опт}} = A_2.$$

Вычислим гарантированный результат игрока В согласно (2.2):

$$\beta_1: \max_i b_{1i} = \max \{1, 4\} = 4;$$

$$\beta_2: \max_i b_{2i} = \max \{2, 5\} = 5;$$

$$\beta_3: \max_i b_{3i} = \max \{3, 6\} = 6.$$

Определим верхнюю цену игры:

$$\beta = \min \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \min \{4, 5, 6\} = 4 \Rightarrow k^0 = 1; B_{\text{опт}} = B_1.$$

Анализ результатов: Верхняя и нижняя цены игры равны по величине $\alpha=\beta=4$. Чистая цена игры $\gamma=4$ при стратегиях A_2 и B_1 .

Ответ: В данной игре имеется седловая точка a_{21} с ценой игры $\gamma=4$, максиминной стратегией A_2 и минимаксной стратегией B_1 .

2.1.2. Смешанные стратегии

Рассмотрим случай, когда матричная игра $m \times n$ повторяется многократно, причем при очередной реализации игры каждый из игроков применяет свои стратегии независимо от другого игрока. Если нижняя цена игры α не совпадает с верхней ценой игры β ($\alpha < \beta$), игрок А может обеспечить себе выигрыш не меньший, чем α , а игрок В имеет возможность не дать игроку А больше, чем β .

Случайная величина, значениями которой являются стратегии игрока, называется его смешанной стратегией. Задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его первоначальные (чистые) стратегии. Т.к. игрок А имеет m чистых стратегий, его смешанная стратегия может быть описана набором m неотрицательных чисел:

$$P_1 \geq 0, P_2 \geq 0, \dots, P_m \geq 0$$

$$\text{при условии } \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

Смешанная стратегия игрока В, имеющего n чистых стратегий, описывается набором n неотрицательных чисел:

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \dots, q_n \geq 0$$

$$\text{при условии } \sum_{k=1}^n q_k = 1.$$

Таким образом, задав два набора $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ и $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, мы оказываемся в ситуации в смешанных стратегиях. Теперь каждая ситуация в чистых стратегиях $\{A_i, B_k\}$ по определению является случайным событием и ввиду независимости P и Q реализуется с вероятностью $p_i q_k$. Математическое ожидание выигрыша игрока А (средний выигрыш игрока А) в условиях ситуации в смешанных стратегиях $\{P, Q\}$ определяется следующим образом:

$$W(A, P, Q) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} p_i q_k. \quad (2.4)$$

Стратегии $P^0 = \{p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0\}$ и $Q^0 = \{q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0\}$ называются оптимальными смешанными стратегиями игроков А и В соответственно, если выполняется следующее соотношение:

$$W(A, P, Q^0) \leq W(A, P^0, Q^0) \leq W(A, P^0, Q),$$

т.е. $\max_P \min_Q W(A, P, Q) = W(A, P^0, Q^0) = \min_Q \max_P W(A, P, Q). \quad (2.5)$

Величина $\gamma = W(A, P^0, Q^0)$, определяемая формулой (2.5), называется ценой игры, а набор (P^0, Q^0, γ) – решением матричной игры.

Для построения решений $2 \times n$ - и $m \times 2$ -игр существует эффективный графический метод, который рассмотрим на примере матричной 2×2 -игры (пример 2.2) и матричной 2×6 -игры (пример 2.3).

Пример 2.2

Выбрать оптимальный режим работы новой системы ЭВМ, состоящей из двух ЭВМ типов A_1 и A_2 . Известны выигрыши от внедрения каждого типа ЭВМ в зависимости от внешних условий, которые вычислены при сравнении со старой системой.

При использовании ЭВМ типов A_1 и A_2 в зависимости от характера решаемых задач (долговременные B_1 и краткосрочные B_2) будет разный эффект. Предполагается, что наибольший выигрыш соответствует наибольшему значению критерия эффекта от замены вычислительной техники старого поколения на ЭВМ A_1 и A_2 :

Таблица 2.2 – Матрица эффективности

	B_1	B_2
A_1	0,3	0,8
A_2	0,7	0,4

В таблице 2.2 представлена матрица игры, где A_1 и A_2 – стратегии руководителя вычислительного центра (ВЦ), а B_1 и B_2 – стратегии, отражающие характер решаемых на ЭВМ задач.

Требуется найти оптимальную смешанную стратегию руководителя ВЦ и гарантированный средний результат γ , т.е. определить, какую долю времени должна использоваться каждая из ЭВМ типов A_1 и A_2 .

Решение

Определим нижнюю и верхнюю цены игры. В соответствии с примером 2.1 проделайте это самостоятельно и убедитесь в том, что нижняя цена игры $\alpha = 0,4$; верхняя цена игры $\beta = 0,7$. Так как

$$\max_i \min_k a_{ik} = a_{22} = 0,4;$$

$$\min_k \max_i a_{ik} = a_{11} = 0,7,$$

получаем игру без седловой точки. Максиминная стратегия руководителя ВЦ – A_2 . Для этой стратегии гарантированный выигрыш равен $\alpha = 0,4$ (40% по сравнению со старой системой).

В отличие от примера 2.1 в этой задаче необходимо найти решение (γ, P^0, Q^0) в смешанных стратегиях. Задачу можно решить аналитически (что рекомендуется проделать самостоятельно), здесь же приводится графическая иллюстрация аналитического решения (Рисунок 2.1) на плоскости (p, w) , где p – вероятность, w – выигрыш.

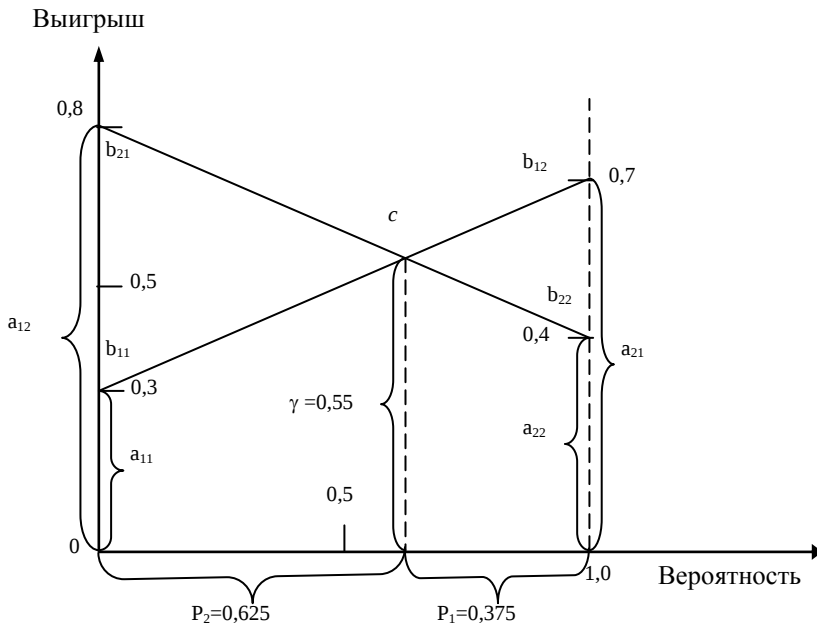


Рисунок 2.1 – Графическая интерпретация алгоритма решения

Алгоритм решения.

- По оси абсцисс отложим отрезок единичной длины.
- По оси ординат отложим выигрыши $a_{11}=0,3$ и $a_{12}=0,8$ при стратегии A_1 .
- На вертикали в точке оси абсцисс 1,0 отложим выигрыши $a_{21}=0,7$ и $a_{22}=0,4$ при стратегии A_2 .
- Соединим точки a_{11} и a_{21} прямой $b_{11}b_{12}$.

- е. Соединим точки a_{12} и a_{22} прямой $b_{21}b_{22}$.
- ф. Определим ординату точки c (точки пересечения линии $b_{11}b_{12}$ с линией $b_{21}b_{22}$). Значение ординаты точки c является искомым значением цены игры γ .
- г. Определим значение абсциссы точки пересечения c . Она равна вероятности p_2 , а вероятность $p_1=1-p_2$.

Выпишем решение и представим оптимальную стратегию игры:

$$\gamma=0,55; P^0=\{0,375; 0,625\}.$$

Вывод: При внедрении новой системы ЭВМ, если не известны условия решения задач заказчика, на работу ЭВМ A_1 должно приходиться 37,5% времени, а на работу ЭВМ A_2 – 62,5%. При этом гарантированный выигрыш составит 55% по сравнению с предыдущей системой ЭВМ.

Замечания:

– Решение $2 \times n$ -игры проводится графически. Для каждой чистой стратегии игрока В на плоскости (p, w) строится соответствующая прямая и на основании анализа нижней огибающей семейства прямых определяется цена игры γ и оптимальные смешанные стратегии P^0 и Q^0 игроков А и В (Пример 2.3).

– Решение $m \times 2$ -игры проводится графически аналогично решению $2 \times n$ -игры. Для каждой чистой стратегии игрока А на плоскости (p, w) строится соответствующая прямая и на основании анализа верхней огибающей семейства прямых определяется цена игры γ и оптимальные смешанные стратегии P^0 и Q^0 игроков А и В (нижняя точка верхней огибающей соответствует оптимальным значениям q^0 и w^0).

– Решение $m \times n$ -игры сводится к стандартной задаче линейного программирования и может быть найдено методами линейного программирования (иллюстрация –Пример 2.5).

– Известен итерационный метод решения матричных игр, который здесь не рассматривается.

Пример 2.3

Игра задана 2×6 -матрицей:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить цену игры v и оптимальные смешанные стратегии P^0 и Q^0 .

Решение

Первый шаг. Анализ игры на наличие седловой точки.

Самостоятельно убедитесь в том, что в данной игре седловой точки нет (нижняя цена игры $\alpha=1$, верхняя цена игры $\beta=-1$).

Второй шаг. Вычисление средних выигрышей игрока А.

Предполагается, что игрок В выбирает только чистые стратегии. Игрок А с вероятностью p может выбрать стратегию A_1 , а с вероятностью $(1-p)$ – стратегию A_2 . При каждой из чистых стратегий игрока В игрок А получает средние выигрыши $w_i, i=\overline{1,6}$, вычисляемые следующим образом:

$$\begin{aligned} /1/: w_1 &= 6p - 2(1-p); \\ /2/: w_2 &= 4p - (1-p); \\ /3/: w_3 &= 3p + (1-p); \\ /4/: w_4 &= p + 0(1-p); \\ /5/: w_5 &= -p + 5(1-p); \\ /6/: w_6 &= 0p + 4(1-p). \end{aligned}$$

Третий шаг. Построение нижней огибающей.

Аналогично тому, как это сделано в примере 2.2, строим на координатной плоскости (p, w) все шесть прямых, уравнения которых получены на втором шаге (Рисунок 2.2).

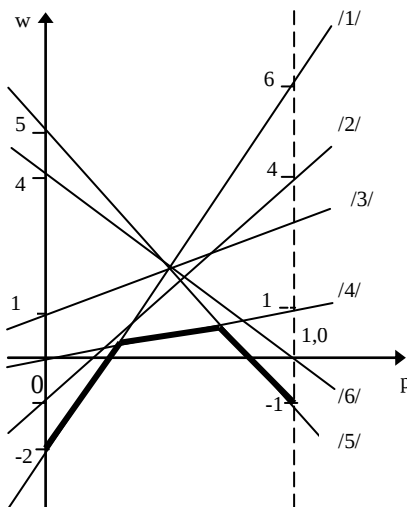


Рисунок 2.2 – Построение нижней огибающей

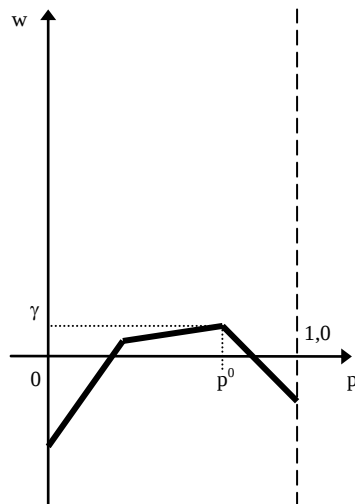


Рисунок 2.3 – Отыскание цены игры и оптимальной смешанной стратегии игрока А

На рисунке 2.2 цифрами помечены значения выигрышей w ; цифрами в косых скобках обозначены соответствующие прямые, уравнения которых получены на втором шаге; числом 1,0 помечено значение вероятности на оси абсцисс. Утолщенными линиями обозначена нижняя огибающая семейства построенных прямых.

Четвертый шаг. Отыскание цены игры и оптимальной смешанной стратегии игрока А.

При построении нижней огибающей определяется ее наивысшая точка, которая в данном случае лежит на пересечении прямых $/4/$ и $/5/$. Для нахождения оптимальной стратегии P^0 игрока А и цены игры γ необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} w^0 = p^0; \\ w^0 = -p^0 + 5(1 - p^0). \end{cases} \quad (2.6)$$

Приравняв правые части уравнений (2.6) и из уравнения $p^0 = -p^0 + 5(1 - p^0)$ получаем значение вероятности $p^0 = 5/7$.

Теперь очевидно: цена игры $\gamma = w^0 = 5/7$, а оптимальная смешанная стратегия игрока А определяется как $P^0 = \{5/7; 2/7\}$.

Графическая иллюстрация последних вычислений представлена на рисунке 2.3.

Пятый шаг. Отыскание оптимальной смешанной стратегии игрока В.

Для данного примера оптимальная смешанная стратегия игрока В имеет вид $Q^0 = \{q_1^0, q_2^0, q_3^0, q_4^0, q_5^0, q_6^0\}$. Из шести чистых стратегий игрока В выделим стратегии B_4 и B_5 , которые соответствуют прямым $/4/$ и $/5/$, определяющим наивысшую точку нижней огибающей:

$$q_1^0 = 0; \quad q_2^0 = 0; \quad q_3^0 = 0; \quad q_4^0 = q; \quad q_5^0 = 1 - q; \quad q_6^0 = 0.$$

Данную ситуацию можно проиллюстрировать с помощью таблицы 2.2, в которой в ячейках B_k представлены вероятности q_k^0 оптимальных смешанных стратегий игрока В (активными являются стратегии B_4 и B_5).

Таблица 2.2 – Определение оптимальных смешанных стратегий

A \ B	B ₁	B ₂	B ₂	B ₄	B ₅	B ₆
	(0)	(0)	(0)	(q)	(1-q)	(0)
A ₁ (p)	6	4	3	1	-1	0
A ₂ (1-p)	-2	-1	1	0	5	4

Приравняем любой из двух средних выигрышей игрока В (игрок А выбирает только чистые стратегии), отвечающий предложенной смешанной стратегии, к цене игры (например, при стратегии A_1 игрока А):

$$q^0 - (1 - q^0) = 5/7,$$

откуда получаем $q^0 = 6/7$.

Такой же результат будет получен при выборе игроком А стратегии A_2 (убедитесь в этом самостоятельно):

$$0 \cdot q^0 + 5(1 - q^0) = 5/7.$$

Ответ: Полное решение игры представляют оптимальные смешанные стратегии $P^0 = \{5/7; 2/7\}$; $Q^0 = \{0; 0; 0; 6/7; 1/7; 0\}$ и цена игры $\gamma = 5/7$.

2.1.3. Доминирование стратегий

Доминирование (в некоторых источниках применяется термин «мажорирование») представляет отношение между стратегиями, наличие которого во многих практических случаях дает возможность сократить размеры исходной платежной матрицы игры. Будем говорить, что i -я строка матрицы А

$$a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}$$

не больше t -й строки этой матрицы

$$a_{t1} \ a_{t2} \ \dots \ a_{tn},$$

если одновременно выполнены следующие n неравенств:

$$a_{i1} \leq a_{t1}, \ a_{i2} \leq a_{t2}, \ \dots \ a_{in} \leq a_{tn}.$$

При этом говорят также, что t -я строка доминирует i -ю строку или что стратегия A_t игрока А доминирует стратегию A_i . С позиций игрока А естественно избегать выбора стратегий, которым соответствуют доминируемые строки. Аналогичные рассуждения приводят к понятию доминируемых столбцов с позиций игрока В.

Пример 2.4

Задана матрица игры

$$\begin{pmatrix} -0,5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0,5 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Преобразовать матрицу, используя доминирование стратегий.

Решение

С позиций игрока В стратегия B_3 предпочтительнее стратегии B_2 ($a_{13} < a_{12}$, т.е. $-1 < 3$; $a_{23} < a_{22}$, т.е. $0,5 < 2$). При любой стратегии игрока А игроку В выгоднее применять стратегию B_3 по сравнению со

стратегией B_2 . В исходной платежной матрице можно исключить стратегию B_2 :

$$\begin{pmatrix} -0,5 & -1 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

С позиций игрока A в преобразованной матрице (2.8) вторая стратегия A_2 предпочтительнее первой стратегии A_1 ($a_{21} > a_{11}$, т.е. $0 > -0,5$; $a_{22} > a_{12}$, т.е. $0,5 > -1$). Поэтому первую стратегию A_1 можно исключить, а матрицу игры преобразовать к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,5 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Учитывая интересы игрока B , в преобразованной матрице (2.9) следует оставить только его первую стратегию B_1 ($a_{11} < a_{12}$, т.е. $0 < 0,5$), и матрица игры принимает простейший вид: $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: В заданной игре (2.7) имеется седловая точка a_{21} (цена игры $\gamma=0$) с максиминной стратегией A_2 и минимаксной стратегией B_1 .

Замечания:

- в общем случае доминирование стратегий не приводит к непосредственному нахождению точки равновесия, а лишь к усеченной матрице;
- при отбрасывании доминируемых строк и столбцов некоторые из оптимальных стратегий могут быть потеряны, однако цена игры не изменится, и по усеченной матрице может быть найдена хотя бы одна пара оптимальных стратегий.

Доминирование можно распространить и на смешанные стратегии. Если элементы одной строки не все меньше (или равны) соответствующих элементов других строк, но все меньше (или равны) некоторых выпуклых линейных комбинаций соответствующих элементов других строк, то эту стратегию можно исключить, заменив ее смешанной стратегией с соответствующими частотами использования чистых стратегий.

Пример 2.5

Задана матрица игры:

$$\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Преобразовать матрицу, используя доминирование смешанными стратегиями. Найти цену игры, используя метод линейного программирования.

Решение

Для первых двух чистых стратегий A_1 и A_2 игрока А возьмем частоты их применения (вероятности) равными $p_1=0,25$; $p_2=0,75$. Третья стратегия A_3 игрока А доминируется линейной выпуклой комбинацией первой и второй чистых стратегий, взятых с частотами 0,25 и 0,75, т.е. смешанными стратегиями:

$$a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 = 24 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,75 = 6 > a_{31} = 4;$$

$$a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 = 0 \cdot 0,25 + 8 \cdot 0,75 = 6 > a_{32} = 5.$$

Третья строка матрицы (2.10) доминируется выпуклой линейной комбинацией первой и второй строк, поэтому третья строка вычеркивается из матрицы (2.10):

$$\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

В матрице (2.11) есть нулевые элементы. Для того чтобы все элементы матрицы стали больше нуля, прибавим к каждому элементу по единице:

$$\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Далее ставим и решаем пару задач (двойственных) линейного программирования:

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max; \quad y_1 + y_2 \rightarrow \min;$$

$$25x_1 + x_2 \leq 1; \quad 25y_1 + y_2 \geq 1;$$

$$x_1 + 9x_2 \leq 1; \quad y_1 + 9y_2 \geq 1;$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad y_1, y_2 \geq 0.$$

Для первой задачи (игрока В) из условия седловой точки следует:

$$25x_1 + x_2 = 1;$$

$$x_1 + 9x_2 = 1,$$

откуда получаем оптимальное решение (проделайте вычисления самостоятельно):

$$x_1^0 = 0,0361;$$

$$x_2^0 = 0,1071;$$

$$x_1^0 + x_2^0 = 0,0361 + 0,1071 = 0,1432.$$

Находим оптимальные смешанные стратегии игрока В:

$$q_1^0 = x_1^0 / (x_1^0 + x_2^0) = 0,0361 / 0,1432 = 0,2521;$$

$$q_2^0 = x_2^0 / (x_1^0 + x_2^0) = 0,1071 / 0,1432 = 0,7479.$$

Для второй задачи (игрока А) из условия седловой точки следует:

$$25y_1 + y_2 = 1;$$

$$y_1 + 9y_2 = 1,$$

откуда получаем оптимальное решение:

$$y_1^0 = 0,0361;$$

$$y_2^0 = 0,1071;$$

$$y_1^0 + y_2^0 = 0,0361 + 0,1071 = 0,1432.$$

Находим оптимальные смешанные стратегии игрока А:

$$p_1^0 = y_1^0 / (y_1^0 + y_2^0) = 0,0361 / 0,1432 = 0,2521;$$

$$p_2^0 = y_2^0 / (y_1^0 + y_2^0) = 0,1071 / 0,1432 = 0,7479.$$

Цена игры рассчитывается с учетом ее поправки на единицу (2.12):

$$v = 1 / (y_1^0 + y_2^0) - 1 = 1 / 0,1432 - 1 = 5,9832.$$

Ответ: Цена игры $v = 5,9832$ единиц; оптимальные смешанные стратегии $P^0 = Q^0 = \{0,2521; 0,7479; 0\}$.

2.2. Контрольные вопросы

2.2.1. Что такое полезность?

2.2.2. Что такое функция полезности?

2.2.3. Как определяется линейная функция полезности?

2.2.4. Как задаются бинарные отношения предпочтения на множестве альтернатив и на множестве исходов?

2.2.5. Что понимается под гомоморфизмом модели $\langle X, R_x \rangle$ в модель $\langle Y, R_y \rangle$, где X – множество альтернатив, Y – множество исходов?

2.2.6. Как с позиций ТПР интерпретируется платежная матрица (Таблица 2.1)?

2.2.7. Почему игра, представленная таблицей 2.1, называется антагонистической игрой или игрой с нулевой суммой?

2.2.8. Как Вы понимаете термин «гарантированный результат»?

2.2.9. Какие стратегии называются чистыми, а какие – смешанными?

2.2.10. Какие стратегии называются активными стратегиями?

2.2.11. Сформулируйте основную теорему теории матричных игр.

2.2.12. Сформулируйте основные свойства оптимальных смешанных стратегий.

2.2.13. Представьте методы решения матричных игр.

2.2.14. Как определяются доминируемые строка и столбец?

2.2.15. В каких отношениях по величине могут находиться верхняя α и нижняя β цены игры?

2.2.16. Что называется седловой точкой игры?

2.2.17. Возможна ли в матричной игре с нулевой суммой ситуация, при которой существует более одной седловой точки?

2.3. Список задач

2.3.1. Найдите нижнюю цену игры, верхнюю цену игры, определите седловые точки, оптимальные чистые стратегии и цену игры (если они существуют):

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \\ \text{г) } & \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \text{ д) } \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & -5 & 2 \\ -8 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \\ \text{е) } & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \text{ ж) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 2 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.3.2. Найдите решения следующих матричных игр:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \text{ в) } \\ & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \text{ г) } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \text{ е)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \\ \text{ж)} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.3.3. Два игрока А и В, не глядя друг на друга, кладут на стол по картонному кружку красного, зеленого или синего цвета, сравнивают цвет кружков и расплачиваются друг с другом так, как показано в матрице игры:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Представьте игру в виде таблицы 2.1. Определите верхнюю и нижнюю цену игры. Имеется ли в данной игре седловая точка?

2.3.4. Задана матрица игры

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 10 \\ 8 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определите верхнюю и нижнюю цену игры. Имеется ли в данной игре седловая точка? Найдите решение игры.

2.3.5. Заданы матричные игры. Используя понятие доминирования стратегий, получите усеченные матрицы.

$$\begin{aligned} \text{а)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \text{ б)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 5 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 9 & -3 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 1 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 5 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.3.6. Решите аналитически и графически, используя понятие доминирования, игры, определяемые следующими платежными матрицами:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ г) } \begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.3.7. Найдите приближенные решения следующих матричных игр:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тема 3

3.1. *Принятие решений в условиях риска*

В зависимости от степени определенности состояний среды (возможных исходов или последствий различных действий), с которыми сталкивается лицо, принимающее решение (ЛПР), в ТПР рассматриваются три типа моделей:

- выбор решения в условиях определенности;
- выбор решения при неопределенности, когда то или иное действие или несколько действий имеют своим следствием множество частных исходов, но их вероятности совершенно не известны или не имеют смысла;
- выбор решения при риске, если каждое действие приводит к одному из множества возможных частных исходов, причем каждый исход имеет вычисляемую или экспертно оцениваемую вероятность появления. Предполагается, что ЛПР эти вероятности известны или их можно определить путем экспертных оценок.

Проблема риска и прибыли – одна из ключевых проблем при выборе решения. Под риском принято понимать вероятность (угрозу) потери ЛПР части своих ресурсов, недополучение доходов или появление дополнительных расходов в результате осуществления определенной деятельности.

Вернемся к платежной матрице, представленной таблицей 2.1. В рамках данного раздела вектор B отражает так называемые «природные» неопределенности, в условиях риска при известных вероятностях состояний среды $q_k = q(B_k)$ выбор оптимальной альтернативы $A_{\text{опт}}$ в матрице доходов сводится к максимизации математического ожидания критерия:

$$\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^n q_k a_{ik} . \quad (3.1)$$

Часто при выборе оптимальной альтернативы в качестве меры риска используют среднее квадратическое отклонение $S_i = \sqrt{D_i}$, где D_i – дисперсия критерия a_{ik} , $k = \overline{1, n}$.

Пример 3.1

Пусть имеются два инвестиционных проекта. Первый с вероятностью 0,6 обеспечивает прибыль 15 млн. грн., однако с вероятностью 0,4 можно потерять 5,5 млн. грн. Для второго проекта с вероятностью 0,8 можно получить прибыль 10 млн. грн. и с вероятностью 0,2 потерять 6 млн. грн. Какой проект выбрать?

Решение

Матрица доходов имеет следующий вид:

A \ B	B	
	B ₁	B ₂
A ₁	15	-5.5
A ₂	10	-6

В этой задаче заданы вероятности появления каждого из исходов:

$$p_{11}=0,6; p_{12}=0,4; p_{21}=0,8; p_{22}=0,2.$$

Вычислим среднюю прибыльность каждого из проектов:

$$\overline{a_1} = \sum_{k=1}^2 p_{1k} a_{1k} = p_{11} * a_{11} + p_{12} * a_{12} = 0,6 * 15 + 0,4 * (-5,5) = 6,8 \text{ (млн. грн.)};$$

$$\overline{a_2} = \sum_{k=1}^2 p_{2k} a_{2k} = p_{21} * a_{21} + p_{22} * a_{22} = 0,8 * 10 + 0,2 * (-6) = 6,8 \text{ (млн. грн.)}.$$

Таким образом, по критерию «математическое ожидание» оба проекта оказались равноценными. Вычислим средние квадратические отклонения для предложенных проектов:

$$S_1 = \sqrt{\sum_{k=1}^2 p_{1k} * (a_{1k} - \overline{a_1})^2} = \sqrt{0,6(15 - 6,8)^2 + 0,4(-5,5 - 6,8)^2} =$$

$$= 10,04 \text{ (млн. грн.)};$$

$$S_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^2 p_{2k} * (a_{2k} - \overline{a_2})^2} = \sqrt{0,8(10 - 6,8)^2 + 0,2(-6 - 6,8)^2} =$$

$$= 6,4 \text{ (млн. грн.)}.$$

Анализ результатов. Так как при равенстве средней прибыли мера риска S_2 (среднее квадратическое отклонение прибыли) второго проекта меньше, чем мера риска S_1 первого проекта ($6,4 < 10,04$), более предпочтительным является второй проект.

Ответ: Оптимальной альтернативой является альтернатива A_2 .

Пусть имеются две альтернативы A_i и A_t , для которых вычислены математические ожидания критериев m_i , m_t и средние квадратические отклонения S_i и S_t . Возможны следующие случаи:

- a) $m_i = m_t$; $S_i < S_t$ – следует выбрать альтернативу A_i ;
- b) $m_i > m_t$; $S_i < S_t$ – следует выбрать альтернативу A_i ;
- c) $m_i > m_t$; $S_i = S_t$ – следует выбрать альтернативу A_i ;
- d) $m_i > m_t$; $S_i > S_t$;
- e) $m_i < m_t$; $S_i < S_t$.

В последних двух случаях решение о выборе альтернативы A_i или A_t зависит от отношения ЛППР к риску. В частности, в случае d альтернатива A_i обеспечивает более высокую среднюю прибыль, однако она и более рискованная. Выбор при этом определяется тем, какой дополнительной величиной средней прибыли компенсируется для ЛППР заданное увеличение риска. В случае e для альтернативы A_i риск меньший, но и ожидаемая прибыль меньше.

Оптимизация средней прибыли согласно (3.1) – не единственный способ статистической постановки задачи ПР. Можно поступить и иначе. Например, определенную роль может играть дисперсия критериальной функции a_{ik} :

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left[\overline{a_{ik}} - \delta \sum_{k=1}^n q_k (a_{ik} - \overline{a_i})^2 \right], \quad (3.2)$$

где q_k – вероятность k -го состояния среды;

$\sum_{k=1}^n q_k (a_{ik} - \overline{a_i})^2$ – дисперсия случайной величины a_{ik} ;

δ – заданная постоянная. Эту постоянную можно интерпретировать как степень несклонности ЛППР к риску. Чем больше δ , тем менее склонно к риску ЛППР.

Критерий (3.2) называется критерием «ожидаемое значение – дисперсия».

3.2. *Контрольные вопросы*

- 3.2.1. Что такое риск?
- 3.2.2. Какие бывают виды рисков?
- 3.2.3. Какой параметр чаще всего используется в качестве меры риска?
- 3.2.4. Как Вы понимаете термин «природная» неопределенность состояния среды?
- 3.2.5. Представьте в общем виде связи между альтернативами и исходами в условиях риска с помощью графа.
- 3.2.6. Как интерпретируется оптимизация выбора по критерию (3.1)?
- 3.2.7. Какое значение в задачах ПР имеет среднее квадратическое отклонение критерия?
- 3.2.8. Как интерпретируется оптимизация выбора по критерию (3.2)?
- 3.2.9. Как изменятся критерии (3.1) и (3.2), если таблица 2.1 будет представлять матрицу потерь?

3.3. *Список задач*

- 3.3.1. На рисунке 3.1 рассмотрен случай выбора из более чем двух вариантов проектов инвестиций. Характеристики проектов представлены точками на плоскости (m, S) , где m – средняя прибыль, получаемая в результате инвестиции, а S – среднее квадратическое отклонение прибыли.

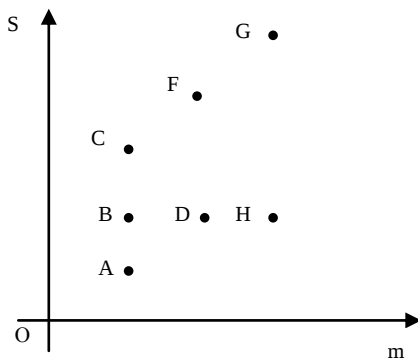


Рисунок 3.1 – Варианты выбора альтернативы

Какой из проектов следует выбрать, если производить выбор из следующих вариантов:

- а) А, В и С;
- б) В, D и H;
- с) С, H и F;
- д) А и D;
- е) F и G?

3.3.2. Акционерному обществу предлагаются два рискованных проекта (Таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Исходные данные инвестиционных проектов

	Проект 1			Проект 2		
Вероятность события	0,2	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4
Наличные поступления, млн. грн.	40	50	60	0	50	100

Какой проект должны выбрать акционеры и почему?

3.3.3. Небольшая фирма производит продукты из сыра, в частности, – сырную пасту. Генеральный директор должен решить, сколько ящиков сырной пасты следует производить в течение месяца. Вероятности того, что спрос на сырную пасту в течение месяца будет 6, 7, 8 или 9 ящиков, равны соответственно 0,1; 0,3; 0,5; 0,1.

Затраты на производство одного ящика равны \$45. Фирма продает каждый ящик по цене \$95. Если ящик с сырной пастой не продается в течение месяца, то она портится, и фирма не получает дохода. Сколько ящиков следует производить в течение месяца?

Рекомендации

Пользуясь исходными данными, постройте матрицу игры, по которой определите среднюю ожидаемую прибыль и среднее квадратическое отклонение.

3.3.4. Функция реализации задана с помощью матрицы доходов:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Выбрать оптимальную альтернативу, если известны вероятности:

$$P(B_1)=0,2;$$

$$P(B_2)=0,7;$$

$$P(B_3)=0,1.$$

3.3.5. Функция реализации задана с помощью матрицы потерь:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Выбрать оптимальную альтернативу, если известны вероятности:

$$P(B_1)=0,1;$$

$$P(B_2)=0,5;$$

$$P(B_3)=0,3.$$

$$P(B_4)=0,1.$$

Тема 4. Принятие решений в условиях полной неопределенности

Неопределенность, связанную с отсутствием информации о вероятностях состояний среды, называют «безнадежной». В таких случаях для определения наилучших решений используются следующие критерии: максимакса, Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Лапласа. Применение каждого из перечисленных критериев можно проиллюстрировать с помощью матрицы выигрышей, представленных таблицей 2.1.

4.1. Критерии для «безнадежной» неопределенности

4.1.1. Критерий максимакса

Это критерий крайнего оптимизма. Наилучшим признается решение, при котором достигается максимальный выигрыш:

$$M = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq k \leq n} a_{ik}. \quad (4.1)$$

4.1.2. Максиминный критерий Вальда

Это перестраховочная позиция крайнего пессимизма, рассчитанная на худший случай. По аналогии с (2.1)

$$V = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq k \leq n} a_{ik}. \quad (4.2)$$

4.1.3. Критерий оптимизма-пессимизма Гурвица

Этот критерий при выборе решения рекомендует руководствоваться некоторым средним результатом, характеризующим

состояние между крайним пессимизмом (4.2) и безудержным оптимизмом (4.1):

$$G = \max_{1 \leq i \leq m} \{ \alpha \max_{1 \leq k \leq n} a_{ik} + (1 - \alpha) \min_{1 \leq k \leq n} a_{ik} \}, \quad (4.3)$$

где α – коэффициент оптимизма ($0 \leq \alpha \leq 1$), характеризующий отношение ЛПР к риску.

4.1.4. Критерий минимаксного риска Сэвиджа

Выбор стратегии аналогичен выбору стратегии по принципу Вальда с тем отличием, что игрок руководствуется не матрицей выигрышей A (2.1), а матрицей сожалений $R = \|r_{ik}\|_{m \times n}$ (матрицей рисков, матрицей упущенных возможностей). Величина риска r_{ik} – это размер платы за отсутствие информации о состоянии среды. С другой стороны, r_{ik} – это оценка сожаления ЛПР по поводу того, что при данном состоянии среды оно не получает максимально возможный выигрыш. Матрица R может быть построена непосредственно из условий задачи или на основе матрицы выигрышей A (2.1) по следующему правилу:

$$r_{ik} = \beta_k - a_{ik}, \quad (4.4)$$

где $\beta_k = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ik}$ при заданном $k = \overline{1, n}$.

4.1.5. Критерий Лапласа

Реализуется подход, аналогичный принятию решений в условиях риска. Все состояния среды принимаются равновероятными:

$$L = \max_{1 \leq i \leq m} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{ik}. \quad (4.5)$$

Пример 4.1

Туристическая фирма планирует организовать пассажирские перевозки в летние месяцы. Число судов, которые должны быть зафрахтованы, является переменной величиной и определяется фактическими потребностями в пассажироперевозках в очередной сезон (допустим, что оно может принимать значения 2, 4, 6, 8 и 10 судов). В таблице 4.1 приведены расчетные значения ожидаемого дохода в тысячах денежных единиц. В первом столбце представлено количество планируемых под фрахт судов, в первой строке – количество фактической потребности в судах.

Таблица 4.1 – Платежная матрица (Пример 4.1)

$\begin{matrix} \text{B} \\ \text{A} \end{matrix}$	2	4	6	8	10
2	60	60	60	60	60
4	10	110	110	110	110
6	-48	30	160	160	160
8	-100	-50	200	240	240
10	-150	-100	50	200	340

Требуется определить оптимальное число зафрахтованных судов $A_{\text{опт}}$, максимизирующее ожидаемый доход.

Решение

- Критерий максимакса.

В таблице 4.1 максимальное значение $M=340$ тыс. единиц. Для достижения такого значения дохода надо выбрать альтернативу A_5 , то есть зафрахтовать десять судов.

- Критерий Вальда.

Таблица 4 представляет матрицу доходов, применим максиминную стратегию.

$$\min a_{1k} = \min\{60, 60, 60, 60, 60\} = 60;$$

$$\min a_{2k} = \min\{10, 110, 110, 110, 110\} = 10;$$

$$\min a_{3k} = \min\{-48, 30, 160, 160, 160\} = -48;$$

$$\min a_{4k} = \min\{-100, -50, 200, 240, 240\} = -100;$$

$$\min a_{5k} = \min\{-150, -100, 50, 200, 340\} = -150;$$

$$V = \max\{60, 10, -48, -100, -150\} = 60 \Rightarrow i^* = 1; A_{\text{опт}} = A_1.$$

Согласно критерию Вальда целесообразно зафрахтовать два судна, при этом доходы составят 60 тыс. единиц.

■

Критерий Гурвица.

Покажем для примера вычисления в соответствии с критерием Гурвица для $\alpha = 0,8$ (Таблица 4.2), в этом случае оптимальной является альтернатива A_5 , в этом случае целесообразно зафрахтовать десять судов.

Таблица 4.2 – Вычисления по критерию Гурвица ($\alpha = 0,8$)

	$\max a_{ik}$	$\min a_{ik}$	$G = \alpha \max a_{ik} + (1 - \alpha) \min a_{ik}$	Примечание
1	60	60	$0,8 \cdot 60 + 0,2 \cdot 60 = 60$	
2	110	10	$0,8 \cdot 110 + 0,2 \cdot 10 = 90$	
3	160	-48	$0,8 \cdot 160 + 0,2 \cdot (-48) = 118,4$	

4	240	-100	$0,8*240+0,2*(-100)=172$	
5	340	-150	$0,8*340+0,2*(-150)=242$	max

В таблице 4.3 представлены результаты вычислений значений критерия Гурвица для различных значений коэффициента α (произведите эти расчеты самостоятельно). В строке 6 представлены оптимальные альтернативы для каждого из значений α .

Таблица 4.3 – Результаты вычислений по критерию Гурвица

$\alpha \backslash A$	0,1	0,2	0,5	0,8	0,9
A_1	60	60	60	60	60
A_2	20	30	60	90	100
A_3	-27,2	-6,4	56	118,4	139,2
A_4	-66	-32	70	172	206
A_5	-101	-52	95	242	291
$A_{\text{опт}}$	A_1	A_1	A_5	A_5	A_5

По критерию Гурвица при $0,1 \leq \alpha \leq 0,2$ оптимальной является альтернатива A_1 , при $0,5 \leq \alpha \leq 0,9$ оптимальной является альтернатива A_5 .

Критерий Сэвиджа.

Построим матрицу сожалений R (4.6) в соответствии с (4.4). В первом столбце исходной платежной матрицы, представленной таблицей 4.1, максимальным является элемент $a_{11}=60$. Из этого значения вычитаются по очереди значения элементов первого столбца a_{11} , a_{12} и т.д. Полученные значения записываются в первый столбец матрицы сожалений R (4.6). Аналогично формируются значения элементов остальных столбцов.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 140 & 180 & 280 \\ 50 & 0 & 90 & 130 & 230 \\ 108 & 80 & 40 & 80 & 180 \\ 160 & 160 & 0 & 0 & 100 \\ 210 & 210 & 150 & 40 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

По матрице сожалений находим решение в соответствии с принципом минимакса.

$$\max a_{1k} = \max\{0, 50, 140, 180, 280\} = 280;$$

$$\max a_{2k} = \max\{50, 0, 90, 130, 230\} = 230;$$

$$\max a_{3k} = \max\{108, 80, 40, 80, 180\} = 180;$$

$$\max a_{4k} = \max\{160, 160, 0, 0, 100\} = 160;$$

$$\max a_{5k} = \max\{210, 210, 150, 40, 0\} = 210;$$

$$S = \min\{280, 230, 180, 160, 210\} = 160 \Rightarrow i^* = 4; A_{\text{опт}} = A_4.$$

По критерию Сэвиджа оптимальной является альтернатива A_4 , что соответствует фрахту восьми судов с оценкой сожаления в 160 тыс. единиц стоимости.

■ Критерий Лапласа.

Вычислим наибольшее среднее значение строк платежной матрицы.

$$\overline{a_1} = 5/5 * 60 = 60;$$

$$\overline{a_2} = 1/5 * (10 + 4 * 110) = 90;$$

$$\overline{a_3} = 1/5 * (-48 + 30 + 3 * 160) = 92,4;$$

$$\overline{a_4} = 1/5 * (-100 - 50 + 200 + 2 * 240) = 106;$$

$$\overline{a_5} = 1/5 * (-150 - 100 + 50 + 200 + 340) = 38.$$

$$L = \max\{60; 90; 92,4; 106; 38\} = 106 \Rightarrow i^* = 4; A_{\text{опт}} = A_4.$$

По критерию Лапласа оптимальной является альтернатива A_4 , что соответствует фрахту восьми судов.

Анализ результатов и выводы

Выбор альтернативы по критериям максимакса, Вальда и Гурвица определяется отношением ЛПР (в данном случае руководителем туристической фирмы) к риску. Определим значение коэффициента α в критерии Гурвица, при котором ЛПР безразлично, какую из альтернатив (A_1 или A_5) выбрать. Для этого в соответствии с (4.3), учитывая исходные данные строк 2 и 6 таблицы 4.1, составим уравнение

$$\alpha * 340 + (1 - \alpha) * (-150) = 60. \quad (4.7)$$

Решение уравнения (4.7) приводит к значению коэффициента $\alpha \approx 0,429$. Таким образом, если ЛПР является пессимистом (с оценкой $\alpha < 0,429$), следуя критерию Гурвица, надо фрахтовать два судна, в противном случае – десять судов.

В случае, если определенный риск приемлем, и ЛПР намерено вложить столько средств, чтобы потом не было обидно, что вложено

слишком мало, то в соответствии с критерием Сэвиджа надо фрахтовать восемь судов.

Если предположить, что в предстоящем сезоне с равной вероятностью может возникнуть потребность в двух, четырех,..., десяти судах, то в соответствии с критерием Лапласа надо фрахтовать восемь судов.

Окончательный выбор предстоит сделать ЛППР.

4.2. Контрольные вопросы

4.2.1. Прокомментируйте на содержательном уровне коэффициент оптимизма α в критерии Гурвица (4.3).

4.2.2. Что представляет собой матрица сожалений (4.4)?

4.2.3. Представьте выражения для вычисления каждого из критериев раздела 4.1, если платежная матрица представляет потери, а не доходы.

4.3. Список задач

4.3.1. Задана матрица доходов (4.6). Найти наилучшие стратегии по критериям: максимакса, Вальда, Сэвиджа, Гурвица (при коэффициенте оптимизма, равном 0,8), Гурвица применительно к матрице сожалений (коэффициент оптимизма равен 0,6), Лапласа для следующей платежной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 & -8 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 5 & -4 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 10 & 0 & 2 \\ 9 & -9 & 7 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Проведите сравнительный анализ полученных результатов.

4.3.2. Выполните задания, представленные в задаче 4.3.1 при условии, что элементы матрицы (4.6) – потери игрока А.

4.3.3. Туристическая фирма, занимающаяся обслуживанием населения, должна определить уровень предложения услуг так, чтобы удовлетворить потребности клиентов в течение предстоящих праздников. Точное число клиентов не известно, но ожидается, что оно может принять одно из четырех значений: $V_1=200$, $V_2=250$, $V_3=300$, $V_4=350$. Для каждого из этих возможных значений V_k существует наилучший уровень предложения A_i (с точки зрения возможных затрат). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным

затратам либо из-за превышения предложения над спросом, либо из-за неполного удовлетворения спроса.

Затраты w (в тыс. грн.) приведены в таблице 4.4, где A_i означают варианты уровней предложения, среди которых надлежит найти оптимальный вариант (значения функционала w в данном примере имеют смысл «потерь»).

Таблица 4.4 – Исходные данные к задаче 4.3.3

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	10	18	25
A_2	8	7	8	23
A_3	21	18	12	21
A_4	30	22	19	15

Заметим, что все отраженные в таблице 4.1 уровни предложения оказываются наилучшими для соответствующих значений B_k . Так, A_1 оказывается наилучшим при $B = B_1$, A_2 – при $B = B_2$, A_3 – при $B = B_3$ и A_4 – при $B = B_4$. Таким образом, “лишних” A_i в таблице 4.1 не содержится.

Вычислите оптимальные решения, используя все известные критерии. При вычислении оптимальной альтернативы с помощью критерия Гурвица задайте значения коэффициента α , равные 0,5 и 0,75. Проведите анализ результатов.

4.3.4. Примените минимаксный критерий в примере 4.3.3, если четвертое значение возможного числа клиентов B_4 исключено (столбец B_4 в таблице 4.4 отсутствует).

4.3.5. Примените в примере 4.3.3, критерий Сэвиджа, предполагая, что решение A_2 исключено (строка A_2 в таблице 4.4 отсутствует).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акофф Р. Искусство решения проблем./Р. Акофф. – М.: Мир, 1982. – 224 с.
2. Дубров А.М. Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе: Учеб. Пособие/ А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталеv; Под ред. Б.А. Лагоши. – М: Финансы и статистика, 2000. – 176 с.
3. Исследование операций: Пер. с англ. /Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – Т.2: Модели и применения. – М.: Мир, 1981. – 677 с.

4. Таха А. Введение в исследование операций, 6-е издание.: Пер. с англ./Хэмди А. Таха – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 912 с.

5. Учебное пособие по дисциплине «Теория оптимальных решений» для студентов специальности 7.091501. Электронная копия, сервер аудитории Г-208.

6. Шикин Е.В. Математические методы и модели в управлении: Учеб. пособие/ Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили. – М.: Дело, 2000. – 440с.