

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Севастопольский государственный университет**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению лабораторных работ по дисциплине
«Поддержка принятия решений в условиях неопределенности»
для студентов дневного и заочного отделения по направлению
09.03.02 «Информационные системы и технологии»

**Севастополь
2015**

УДК 519.2

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Поддержка принятия решений в условиях неопределенности» для студентов дневного и заочного отделения по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии». /Сост. К.В.Кротов. – Севастополь: Изд-во СевГУ, 2015. – 91с.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями программы дисциплины «Поддержка принятия решений в условиях неопределенности» для студентов направления 09.03.02 и утверждены на заседании кафедры информационных систем, протокол № 2 от 24 февраля 2015 года.

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Мащенко Е.Н., кандидат технических наук, доцент кафедры Информационных технологий и компьютерных систем

СОДЕРЖАНИЕ

Общие требования к выполнению лабораторных работ	4
1. Лабораторная работа №1. Исследование методов принятия решений в условиях полной неопределенности.....	5
2. Лабораторная работа №2. Исследование методов принятия решений в условиях стохастической неопределенности	16
3. Лабораторная работа №3. Исследование применения понятия нечеткого отношения, операций импликации и композиции при реализации нечетких высказываний и построении нечетких рассуждений.....	34
4. Лабораторная работа №4. Исследование способов построения систем нечеткого управления и алгоритмов их функционирования.....	60
5. Лабораторная работа №5. Исследование методов принятия решений при нечетком отношении предпочтения на множестве альтернатив.....	75
Библиографический список.....	90

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Цель настоящих лабораторных работ состоит в исследовании методов теории принятия решений в условиях неопределенности (полной, стохастической и нечеткой) для реализации задач выбора эффективных альтернатив в различных предметных областях. Задачами выполнения лабораторных работ являются: 1) углубленное изучение основных теоретических положений дисциплины; 2) получение практических навыков написания программ, реализующих методы теории принятия решений в условиях неопределенности.

2. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Объектом исследования в лабораторных работах являются методы и алгоритмы решения задач теории принятия решений в условиях неопределенности (полной, стохастической и нечеткой), реализации методов с использованием современных программных средств. Инструментом исследования методов и алгоритмов теории принятия решений в условиях неопределенности является ЭВМ. Программным средством исследования является язык C++, для разработки программ используется среда Visual studio. Выполнение работы предусматривает создание проекта в среде Visual studio, разработку и отладку программы на языке C++ на основе методов и алгоритмов теории принятия решений в условиях неопределенности, рассматриваемых в данных методических указаниях.

3. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчеты по лабораторной работе оформляются каждым студентом индивидуально. Отчет должен включать: название лабораторной работы; цель работы; краткие теоретические сведения; постановку задачи; текст программы, реализующей задание; распечатку результатов выполнения программы.

4. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ

Задание выбирается в соответствии с вариантом, назначаемым преподавателем.

Лабораторная работа №1

Исследование методов принятия решений в условиях полной неопределенности

1. Цель работы: изучить и исследовать методы принятия решений при отсутствии какой либо информации о связях принимаемых решений и исходов.

2. Теоретические сведения

Принятие решения в условиях неопределенности предполагает, что однозначная связь между принимаемыми решениями, возможными исходами для этих решений, значениями критериев для исходов отсутствует. В случае, если заданы вероятностные характеристики связи между принимаемыми решениями, исходами и значениями критериев, тогда такая связь является стохастической и решения принимаются в условиях вероятностной неопределенности, связь между решениями, исходами, значениями критериев не является детерминированной, а является стохастической. В том случае, если вероятностные характеристики связи между решениями и исходами не являются заданными, тогда решения принимаются в условиях полной неопределенности. Следует отметить, что неоднозначный характер связей между решениями, исходами (и, соответственно, значениями критериев) определяется воздействием на систему внешних факторов (воздействием на систему внешней среды). Тогда структура задачи принятия решения (ЗПР) включает в себя множество допустимых альтернатив X , множество состояний среды Y , множество исходов A и функцию реализации $F: X \times Y \rightarrow A$. Принятие решения в условиях неопределенности характеризуется тем, что при выборе альтернативы принимающему решение неизвестно наличное состояние среды и он не имеет информации о вероятностях их появления. Отметим, что эта неопределенность не является абсолютной, так как принимающему решение известны множество возможных состояний среды (множество Y) и функция реализации F .

Оценочная структура ЗПР в условиях неопределенности задается в виде оценочной функции. Композиция функции реализации и оценочной функции представляет собой целевую функцию f . При этом число $f(x, y)$ указывает полезность (ценность, эффективность) того исхода, который получается в ситуации, когда принимающий решение выбирает альтернативу $x \in X$, а среда принимает состояние $y \in Y$. Напомним, что если оценка исходов выражает затраты, убытки или другие негативные факторы, то в этом случае функция f называется **функцией потерь**.

Итак, *математическая модель ЗПР в условиях неопределенности может быть задана в виде* следующей тройки объектов (X, Y, f) , где X – множество допустимых альтернатив, Y – множество возможных состояний среды, $f: X \times Y \rightarrow R$ – целевая функция (например, функция потерь).

Основная сложность при принятии решения в условиях неопределенности состоит в том, что, выбирая одну из допустимых альтернатив, принимающий решение не знает имеющегося состояния среды; в то же время, получающийся исход зависит от того, в каком состоянии находится среда. Формально, целевая

функция $f(x, y)$ является функцией двух аргументов x и y ; принимающий решение должен выбирать значение аргумента $x \in X$, не зная значения аргумента $y \in Y$.

Ограничимся случаем, когда множества X и Y являются конечными; тогда целевая функция (функция потерь) может быть задана табличным способом (либо в виде матрицы потерь).

	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	f_{11}	f_{12}	$\dots$	f_{1n}
x_2	f_{21}	f_{22}	$\dots$	f_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	f_{m1}	f_{m2}	$\dots$	f_{mn}

Элементы таблицы f_{ij} будем интерпретировать как выигрыш принимающего решение в ситуации (i, j) , т.е. когда ЛПР выбирает альтернативу x_i , а среда принимает состояние y_j . Таблица называется также **матрицей выигрышей** или **платежной матрицей**.

Эта функция может иметь разный вид в зависимости от позиции лица принимающего решения (ЛПР). В теории принятия решений различают следующие основные позиции: оптимистическую, пессимистическую, позиции компромисса и нейтралитета. *Оптимистическая позиция* предполагает, что не принимаются во внимание плохие результаты, надеясь на наступление наиболее благоприятных внешних условий. Поэтому в качестве компоненты вектора результатов, соответствующей каждому решению, определяется максимальный результат, т.е. максимальное значение строки: $f_i = \max_j f_{ij}$ – это оптимистическая позиция.

Пессимистическая позиция оправдана там, где риск недопустим. Выбор решение в соответствии с этой позицией гарантирует результат, не меньший, чем выбранный. Если реализуются более выгодные внешние условия, то можно получить максимальный в данной строке результат. Вектор результатов записывается следующим образом: $f_i = \min_j f_{ij}$ – это *пессимистическая позиция*.

Позиция компромисса имеет вид: $f_i = \min_j f_{ij} + \max_j f_{ij}$. Т.о., формируя желаемый результат в таком виде, мы исходим из компромисса между оптимистической и пессимистической позициями.

Позиция нейтралитета учитывает все последствия принимаемого решения и поэтому выглядит следующим образом:

$$f_i = \sum_{j=1}^m f_{ij}.$$

Для того, чтобы получить более ясную и наглядную интерпретацию перейдем к графическому представлению оценочных функций. Случай с двумя внешними условиями ($m=2$) при n вариантах решений будет простейшим. Результат такого рассмотрения можно распространить на случай большего количества внешних факторов (условий).

Введем прямоугольную систему координат, откладывая по оси абсцисс значения результата f_{i1} решения x_i , соответствующего внешнему состоянию y_1 , а по оси ординат – значения f_{i2} , соответствующего состоянию y_2 , $i=1, \dots, n$. При таких обозначениях каждый вариант решения x_i соответствует точке на плоскости с координатами (f_{i1}, f_{i2}) , $i=1, \dots, n$ соответственно. Все точки образуют множество, которое можно вписать в прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, расположение которых соответствует максимальным и минимальным значениям среди всех элементов матрицы. Точку с координатами $(\max(f_{i1}, i), \max(f_{i2}, i))$, соответствующей верхнему правому углу, мы назовем **утопической точкой** (УТ). Смысл этого названия в том, что координаты всех точек (f_{i1}, f_{i2}) , $i=1, \dots, n$, соответствующих вариантам решений $x_1, \dots, x_n$, не могут быть больше, чем у утопической точки.

Аналогичное значение имеет и так называемая **антиутопическая точка** (АУТ), имеющая координаты $(\min x(f_{i1}, i), \min(f_{i2}, i))$, соответствующая нижнему левому углу. Координаты всех точек (f_{i1}, f_{i2}) , $i=1, \dots, n$, соответствующих вариантам решений $x_1, \dots, x_n$, не могут быть меньше, чем у точки АУТ. Построенный прямоугольник называется полем полезности решений (рисунок 1).

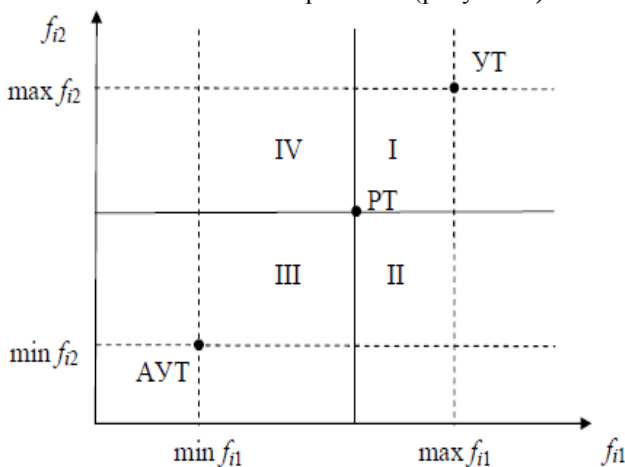


Рисунок 1– Поле полезности решений

На поле полезности выполним выбор произвольной точки и назовем ее **рабочей точкой** (РТ) – $x_{РТ}$. Обозначим ее координаты $(f_{РТ1}, f_{РТ2})$. С помощью прямых, параллельных координатным осям, разобьем плоскость на четыре части и обозначим их I, II, III и IV. В рассматриваемом нами двумерном случае каждая из этих частей имеет вид квадранта.

Все точки x_i из матрицы вариантов решений, лежащие в квадранте I заведомо или гарантировано лучше, чем рассматриваемая точка РТ. Это преимущество решений из квадранта I по отношению к решению, находящемуся в РТ не зависит от того, какой фактор – y_1 или y_2 реализуется, то есть не важно по какой координате

это преимущество реализуется. Поэтому мы называем конус I **конусом предпочтения**.

Соответственно все точки конуса III хуже точки РТ ($f_{PT1} \geq f_{i1}$ и $f_{PT2} \geq f_{i2}$), и мы будем называть область III **антиконусом**. Таким образом, оценка качества точек из этих двух конусов в сравнении с точкой РТ проста и однозначна.

Оценка же точек в конусах II и IV является неопределенной, так как соотношения их координат с РТ является противоречивым. Вследствие этого их называют областями неопределенности и варианты решений в этих конусах связаны с допущением некоторого риска принятия решений.

Таким образом, значения, лежащие внутри конуса I, обеспечивают гарантированный результат и могут считаться безрисковыми (пессимистическими) критериями ПР. Линии, проходящие через II и IV квадранты, соответствуют значениям критерия с риском. Линии, лежащие внутри III конуса соответствуют критерию азартного игрока или оптимистичной позиции. Рассмотрим линии, соответствующие трем группам критериев (рисунок 2).

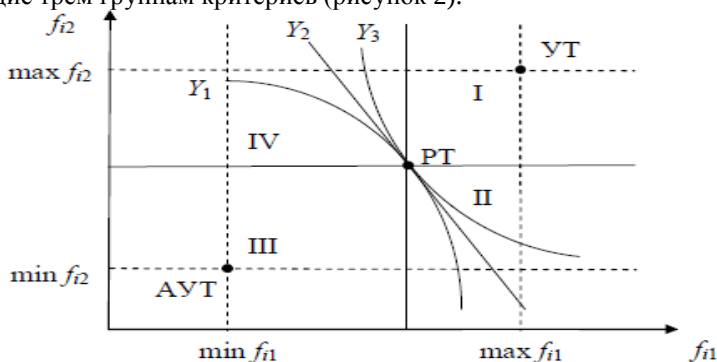


Рисунок 2— Функции предпочтения при принятии решений
 Y_1 — оптимистические; Y_2 — нейтральные; Y_3 — безрисковые
 (пессимистические).

Все точки из областей неопределенности, лежащие справа и выше каждой линии функций предпочтения, лучше точек, лежащих слева и ниже. Всякая функция (линия) предпочтения объединяет все точки, соответствующие одному и тому же значению критерия (точки равной эффективности); справа и выше ее располагаются все лучшие точки, то есть точки более эффективных решений, а слева и ниже — худшие, то есть точки менее эффективных решений.

Таким образом, критериальная функция делит плоскость на две части. В соответствии с рассмотренным полем полезности, критериальные функции, проходящие ближе к границам I квадранта соответствуют безрисковой политике принятия решения или тенденции избегания риска, как например, вогнутая линия на рисунке 2. Линии, проходящие через квадрант III, соответствуют азартной стратегии с максимальным риском. Соответственно, прямая линия, проходящая через рабочую точку и квадранты II и IV, соответствует нейтральной или объективной стратегии в принятии решений.

Всякое техническое или экономическое решение в условиях неполной информации – сознательно или неосознанно – принимается в соответствии с какой-либо оценочной функцией описанного выше типа. При этом выбор оценочных функций всегда должен осуществляться с учетом количественных характеристик ситуации, в которой принимаются решения.

Виды критериев принятия решений

Критерий принятия решений – это функция, выражающая предпочтения лица принимающего решения (ЛПР) и определяющая правило, по которому выбирается приемлемый или оптимальный вариант решения.

Минимаксный критерий (ММ-критерий), или критерий Вальда. ММ-критерий отражает позицию крайней осторожности, или крайнего пессимизма. Оценочная функция ММ-критерия:

$$Z_{MM} = \max_i (\min_j f_{ij})$$

Правило выбора решения в соответствии с ММ-критерием можно интерпретировать следующим образом: матрица решений (f_{ij}) дополняется еще одним столбцом из наименьших результатов f_{ir} каждой строки. Выбрать следует те варианты, в строках которых стоят наибольшие значения f_{ir} этого столбца. Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск. Это означает, что ЛПР не может столкнуться с результатом хуже, чем тот, на который он ориентируется. Поэтому ММ-критерий считается одним из фундаментальных, в технических задачах он применяется чаще всего.

Применение ММ-критерия оправдано, если ситуация в которой принимается решение следующая:

- 1) о возможности появления внешних состояний y_j ничего не известно;
- 2) приходится считаться с появлением различных внешних состояний y_j ;
- 3) решение реализуется один раз;
- 4) необходимо исключить какой бы то ни было риск.

Геометрический образ этого критерия представлен на рисунке 3.

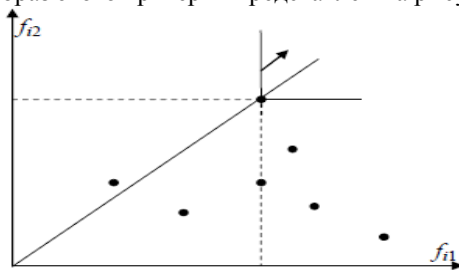


Рисунок 3– Геометрическое представление минимаксного критерия

Решение на плоскости ищется следующим образом:

Шаг 1.

Строится направляющая – линия, проведенная из начала координат под углом 45° .

Шаг 2. Линия, соответствующая критерию, (прямой угол) движется вдоль направляющей от начала координат до касания последней точки, которая и будет решением.

Критерий Байеса-Лапласа (BL-критерий). Пусть q_j – вероятность появления внешнего состояния y_j .

Тогда для BL-критерия оценочная функция имеет вид (где f_{ij} – матрица получаемой прибыли):

$$Z_{BL} = \max_i \left(\sum_{j=1}^m f_{ij} q_j \right)$$

где q_j – вероятности условий. Если q_j не заданы, то считаем, что условия равновероятны.

Правило выбора. Матрица решений (f_{ij}) дополняется еще одним столбцом, содержащим математические ожидания результатов каждой строки. Выбираются те варианты x_i , в строках которых стоит наибольшее значение f_{ir} этого столбца.

Критерий Байеса-Лапласа используется, если:

- 1) вероятности появления состояний известны и не зависят от времени;
- 2) решение реализуется бесконечно (теоретически) много раз;
- 3) для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций значение постепенно стабилизируется. Поэтому риск практически стремится к нулю.

Исходная позиция ЛПР, применяющего критерий BL, оптимистичнее, чем при минимаксном критерии, однако предполагает более высокий уровень информированности и достаточно много реализаций.

Геометрический образ этого критерия представлен на рисунке 4.

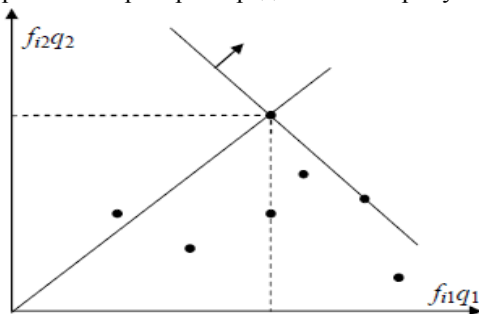


Рис.23.4. Геометрическое представление критерия Байеса-Лапласа

Решение на плоскости ищется следующим образом:

Шаг 1. Строим точки с координатами $f_{i1}q_1$ и $f_{i2}q_2$.

Шаг 2. Строится направляющая – линия, проведенная из начала координат под углом 45° .

Шаг 3. Линия, соответствующая критерию, – прямая, перпендикулярная направляющей, движется вдоль направляющей от начала координат до касания последней точки, которая и будет решением.

Критерий Сэвиджа. Это критерий относительного пессимизма, который оперирует понятием риска, или остатка.

Оценочная функция критерия выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \max_i (f_{ij}) - f_{ij}; \\ f_{ij} &= \max_j a_{ij} = \max_j (\max_i (f_{ij}) - f_{ij}); \\ Z_s &= \min_i f_{ir} = \min_i (\max_j (\max_i (f_{ij}) - f_{ij})). \end{aligned}$$

Величину a_{ij} можно трактовать как максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если в состоянии y_j вместо варианта x_i выбирать другой, оптимальный для этого внешнего состояния вариант. Величину a_{ij} можно интерпретировать и как потери (штрафы) возникающие в состоянии y_j при замене оптимального для него варианта на вариант x_i . В последнем случае f_{ir} представляет собой максимально возможные (по всем внешним состояниям y_j , $j = \overline{1, n}$) потери в случае выбора варианта x_i .

Соответствующее критерию Сэвиджа **правило выбора** трактуется следующим образом:

- 1) каждый элемент платежной матрицы (f_{ij}) вычитается из наибольшего результата $\max f_{ij}$ соответствующего столбца.
- 2) разности a_{ij} образуют матрицу остатков (f_{ij}). Эта матрица пополняется столбцом наибольших разностей f_{ir} . Выбирают те варианты, в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение.

Требования, предъявляемые к ситуации, в которой принимается решение, совпадают с требованием к ММ-критерию.

Геометрический образ этого критерия представлен на рисунке 5.

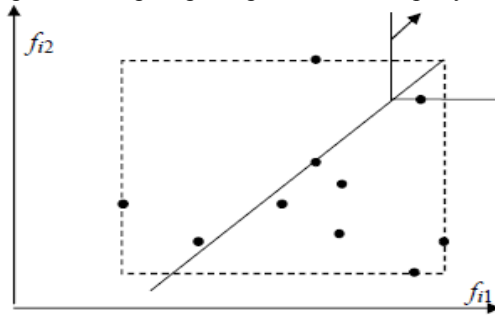


Рис.23.5 Геометрическое представление критерия Сэвиджа

Решение на плоскости ищется следующим образом:

Шаг 1. Строим направляющую – прямую, проходящую через утопическую точку под 45° .

Шаг 2. Линия, соответствующая критерию, – прямой угол, движется вдоль направляющей от начала координат до касания последней точки, которая и будет решением.

Из требований, предъявляемых к рассмотренным критериям, становится ясно, что вследствие их жёстких исходных позиций они применимы только для идеализированных практических решений. В случае, когда возможна слишком сильная идеализация, можно применять одновременно поочерёдно различные критерии. После этого среди нескольких вариантов ЛПР волевым методом выбирает окончательное решение. Такой подход позволяет, во-первых, лучше проникнуть во все внутренние связи проблемы принятия решений и, во-вторых, ослабляет влияние субъективного фактора.

Пример. При работе ЭВМ необходимо периодически приостанавливать обработку информации и проверять ЭВМ на наличие в ней вирусов. Приостановка в обработке информации приводит к определённым экономическим издержкам. В случае же если вирус вовремя обнаружен не будет, возможна потеря и некоторой части информации, что приведёт и ещё к большим убыткам.

Варианты решения таковы:

x_1 – полная проверка;

x_2 – минимальная проверка;

x_3 – отказ от проверки.

ЭВМ может находиться в следующих состояниях:

y_1 – вирус отсутствует;

y_2 – вирус есть, но он не успел повредить информацию;

y_3 – есть файлы, нуждающиеся в восстановлении.

Результаты, включающие затраты на поиск вируса и его ликвидацию, а также затраты, связанные с восстановлением информации имеют вид (таблица 1):

Таблица 1.

	y_1	y_2	y_3	ММ-критерий		критерий BL	
				$f_{ij} = \min_j f_{ij}$	$\max_i f_{ir}$	$f_{ir} = \sum_{j=1}^m f_{ij} q_j$	$\max_i f_{ir}$
x_1	-20	-22	-25	-25	-25	-22,11	
x_2	-14	-23	-31	-31		-22,44	
x_3	0	-24	-40	-40		-21,12	-21,12

Согласно ММ-критерию следует проводить полную проверку. Критерий Байеса-Лапласа, в предположении, что все состояния машины равновероятны

$$P(y_j) = q_j = 0,33,$$

рекомендуется отказаться от проверки. Матрица остатков для этого примера и их оценка (в тысячах) согласно критерию Сэвиджа имеет вид (таблица 2):

Таблица 2

	y ₁	y ₂	y ₃	Критерий Сэвиджа	
				$f_{ir} = \min_j a_{ij}$	$\min_j f_{ir}$
x ₁	+20	0	0	+20	
x ₂	+14	+1	+6	+14	+14
x ₃	0	+2	+15	+15	

Пример специально подобран так, что каждый критерий предлагает новое решение. Неопределённость состояния, в котором проверка застаёт ЭВМ, превращается в неясность, какому критерию следовать. Поскольку различные критерии связаны с различными условиями, в которых принимается решение, лучшее всего для сравнительной оценки рекомендации тех или иных критериев получить дополнительную информацию о самой ситуации. В частности, если принимаемое решение относится к сотням машин с одинаковыми параметрами, то рекомендуется применять критерий Байеса-Лапласа. Если же число машин не велико, лучше пользоваться критериями минимакса или Сэвиджа.

Критерий Гурвица. В соответствии с этим критерием правила максимакс и максимин сочетаются связыванием максимума минимальных значений альтернатив. Это правило называют ещё правилом оптимизма – пессимизма. Оптимальной альтернативе соответствует значение критерия, определяемое следующим образом:

$$Z_g = \max_i ((1 - \alpha) \min_j (f_{ij}) + \alpha \max_j (f_{ij})),$$

где α – коэффициент оптимизма, $\alpha = 0 \dots 1$ при $\alpha = 1$ альтернатива выбирается по правилу максимакс, при $\alpha = 0$ – по правилу максимин. Учитывая боязнь риска, целесообразно задавать $\alpha = 0,3$. Наибольшее значение целевой величины и определяет необходимую альтернативу.

Правило Гурвица применяют, учитывая более существенную информацию, чем при использовании правил максимин и максимакс.

Таким образом, при принятии решения в общем случае необходимо:

- 1) спрогнозировать будущие условия, например, уровни спроса;
- 2) разработать список возможных альтернатив;
- 3) оценить окупаемость всех альтернатив;
- 4) определить вероятность каждого условия (из данного пункта вытекает значение коэффициента оптимизма);
- 5) оценить альтернативы по выбранному критерию решения.

3. Программа выполнения работы

3.1. Для каждого из вариантов сформировать платежную матрицу для системы принятия решений.

3.2. Выполнить определение эффективных решений вручную, для этого сформировать таблицы соответствующего вида, включив в них столбцы для промежуточных (вспомогательных) результатов и столбцы для значений критериев на заключительной стадии принятия решений.

3.3. Выполнить формирование программного кода соответствующей процедуры определения эффективных решений.

3.4. Выполнить вывод результатов работы процедуры и сравнить полученные в процедуре результаты с результатами, сформированными аналитически.

3.5. Изменить исходные данные программы (платежные матрицы либо вероятности реализации внешних воздействий). С помощью разработанной процедуры реализовать определение эффективных решений.

4. Задание на работу

Вариант 1. Одно из предприятий должно определить уровень предложения услуг так, чтобы удовлетворить потребности клиентов в течение предстоящих праздников (уровень предложения услуг соответственно a_1, a_2, a_3, a_4 . Точное число клиентов не известно, но ожидается, что оно может принять одно из четырех значений: 200, 250, 300 или 350 клиентов (воздействия внешней среды, соответственно, q_j). Для каждого из этих возможных значений существует наилучший уровень предложения (с точки зрения возможных затрат). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения предложения над спросом, либо из-за неполного удовлетворения спроса. В таблице приведены потери в тысячах долларов.

	q_1	q_2	q_3	q_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	8	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15

Предполагается, что вероятности для воздействий внешней среды распределены следующим образом: $p_{q1}=0.4$, $p_{q2}=0.25$, $p_{q3}=0.2$, $p_{q4}=0.15$. Определить эффективное решение с использованием критерия Байеса-Лапласа.

Вариант 2. Планируется выпуск новой продукции, для чего необходимо закупить станки. Система оптовой торговли может поставить не более 50 станков; комплект поставки - 10 станков. Минимальный объем поставок - 20 станков. Соответственно, вектор решений об объеме поставок $X = (20, 30, 40, 50)$. Ежегодный доход от продукции, снимаемой с одного станка, составляет 21.9 тыс.руб. Оптовая цена одного станка 4.775 тыс. руб., эксплуатационные расходы - 3.6 тыс. руб. Затраты на подготовку производства составляют 25.5 тыс.руб. и не зависят от числа станков и объема выпуска. Пусть спрос пропорционален количеству продукции, снимаемой с S работающих станков, и для простоты ограничимся вектором состояний спроса $S = (0, 10, 20, 30, 40, 50)$.

Если решающее правило сформулировать как "доход - издержки", то можно рассчитать элементы матрицы полезности:

$$W_{ij} = (21.9 - 3.6) * \min(x_i, s_j) - 4.775x_i - 25.5 \cdot$$

Тогда вид платежной матрицы следующий:

	S1=0	S2=10	S3=20	S4=30	S5=40	S6=50
X1=20	-121	62	245	245	245	245
X2=30	-168.75	14.25	197.25	380.25	380.25	380.25
X3=40	-216.5	-33.5	149.5	332.5	515.5	515.5
X4=50	-264.25	-81.25	101.75	284.75	467.75	650.75

Задав коэффициент оптимизма равным 0.3, определить эффективное решение по закупке оборудования. Определить эффективные решения с использованием критерия Гурвица.

Вариант 3. Для рассмотренной в варианте 2 постановки задачи закупки оборудования в соответствии с приведенной ниже платежной матрицей, выполнить определение эффективных решений с использованием критерия Сэвиджа.

	S ₁ =0	S ₂ =10	S ₃ =20	S ₄ =30	S ₅ =40	S ₆ =50
X ₁ =20	0	0	0	-135.25	-270.5	-405.75
X ₂ =30	-47.75	-47.75	-47.75	0	-135.25	-270.5
X ₃ =40	-95.5	-95.5	-95.5	-47.75	0	-135.25
X ₄ =50	-143.25	-143.25	-143.25	-95.5	-47.75	0

5. Контрольные вопросы.

5.1. Почему рассматриваемый подход называется принятием решений в условиях полной неопределенности?

5.2. Что из себя представляет математическая модель принятия решений в условиях полной неопределенности?

5.3. Чем при принятии решений пессимистическая позиция отличается от оптимистической?

5.4. В чем заключается позиция компромисса и позиция нейтралитета при принятии решений?

5.5. Какой из позиций (пессимиста или оптимиста) соответствуют безрисковые стратегии и стратегии с риском?

5.6. Какой вид имеет критерий Вальда, какой позиции при принятии решений он соответствует?

5.7. Какой вид имеет критерий Байеса-Лапласа, что означают вероятности в выражении для критерия?

5.8. Какой вид имеют критерии Сэвиджа и Гурвица, каким позициям при принятии решений они соответствуют.

Лабораторная работа №2.

Исследование методов принятия решений в условиях стохастической неопределенности

1. Цель работы: изучить и исследовать методы принятия решений при наличии информации о стохастической связи между экспериментами и их исходами, между принимаемыми решениями и их результатами.

2. Теоретические сведения

Методы статической теории принятия решений позволяют обосновывать выбор между действиями (выбор действий, решений, управлений) при неполной информации о состоянии природы, когда последствия действия зависят от истинного состояния природы. При этом выбор действия должен быть согласован с мнением ЛППР о:

- 1) предпочтительности последствий после реализации действия (если последствия являются более предпочтительными, то их стоимость (вес) должен быть большим по значению);
- 2) истинном состоянии природы.

Исходными данными для решаемой задачи выбора альтернатив в условиях статистической неопределенности являются:

- 1) пространство действий $A = \{a_i \mid i = \overline{1, I}\}$ (соответственно множество решений);
- 2) пространство состояний системы $\Theta = \{\theta_j \mid j = \overline{1, J}\}$, т.е. последствия выбранного действия a_i зависят от состояния природы (системы), которое не может быть предсказано, тогда каждому возможному состоянию природы (системы) соответствует элемент $\theta_j \in \Theta$;
- 3) пространство экспериментов $E = \{e_l \mid l = \overline{1, L}\}$, для получения информации о возможности (предпочтительности) каждого состояния $\theta_j \in \Theta$ может быть выполнен эксперимент $e_l \in E$;
- 4) пространство исходов экспериментов $Z = \{z_h \mid h = \overline{1, H}\}$, каждому из допустимых экспериментов $e_l \in E$ может быть поставлен в соответствие некоторый исход $z_h \in Z$ (т.е. эксперименту e_l ставится в соответствие исход $z_h \in Z$); таким образом, исходу эксперимента $e_l \in E$ поставлен в соответствие элемент $z_h \in Z$, тогда $z_h \in Z$ - исход эксперимента $e_l \in E$;
- 5) оценки полезности $U(e, z, a, \theta)$; значение полезности $U(e, z, a, \theta)$ определено на декартовом произведении $E \times Z \times A \times \Theta$; таким образом, каждое состояние системы характеризуется значениями (e, z, a, θ) , это состояние определено на $E \times Z \times A \times \Theta$, каждому текущему состоянию системы, характеризуемому (e, z, a, θ) поставлено в

соответствие значению полезности $U(e, z, a, \theta)$ ($U(\cdot)$); таким образом, выполняется эксперимент e (для анализа состояния природы), фиксируется его исход z , на основе исхода выбирается действие a и фиксируется последующее состояние системы θ , в оценку U входит стоимость эксперимента и стоимость последствия выбранного действия;

б) оценка вероятности $P_{\theta, z|e}$; в результате эксперимента e_i может быть зафиксирован его (эксперимента) исход z_h , позволяющий определить некоторое состояние природы (системы) $\theta_j \in \Theta$.

Таким образом, на основе z_h может быть зафиксировано как некоторое состояние природы $\theta_j \in \Theta$, так и состояние θ_j' , отличное от θ_j . В результате должно быть определено декартовое произведение $\Theta \times Z$ исходов экспериментов и фиксируемых с их использованием состояний природы θ_j . Произведение $\Theta \times Z$ называется пространством возможностей. Тогда $P_{\theta, z|e}$ - это совместная вероятностная мера того, что при выполнении некоторого эксперимента e_i будет зафиксирован один из исходов z_h , а по этому исходу z_h будет сделан вывод о состоянии среды θ_j .

Понятно, что одному и тому же эксперименту e_i могут быть (с определенной вероятностью) поставлены в соответствие различные исходы z_h , а по этим исходам (также с определенной вероятностью) может быть сделан вывод о состоянии системы (природы, среды) θ_j .

Из совместной вероятностной меры $P_{\theta, z|e}$ вытекает возможность определения четырех различных вероятностных мер:

- 1) P_{θ}' на пространстве состояний Θ (предполагается, что P_{θ}' не зависит от эксперимента e , определение состояния θ не является результатом эксперимента e);
- 2) условная вероятностная мера $P_{z|e, \theta}$ на пространстве значений Z при заданных e и Θ ; т.е. при зафиксированном состоянии среды (системы, природы) θ_j выполняется эксперимент e_i , в результате которого может быть зафиксирован некоторый исход $z_h \in Z$ (вероятность фиксации этого исхода $P_{z|e, \theta}$);
- 3) вероятностная мера $P_{z|e}$, т.е. вероятность фиксации исхода z_h при проведении эксперимента e . Таким образом, вероятностная мера $P_{z|e}$ определяется на пространстве исходов z при заданном e ;
- 4) условная вероятностная мера $P_{\Theta|z}''$ (условие по e опускается, т.к. используемая при этом информация о e войдет в описание события появления z), т.о. $P_{\Theta|z}''$ -

вероятность определения состояния θ_j при фиксации результата эксперимента z_h (т.е. при фиксации одного исхода z_h эксперимента e_l могут быть определены различные состояния природы θ_j с вероятностью $P''_{\theta|z}$).

Математические ожидания случайных величин

Если являются заданными множество состояний $\Theta = \{\theta_j \mid j = \overline{1, J}\}$ и множество исходов $Z = \{z_h \mid h = \overline{1, H}\}$, то состояниям и исходам должны быть поставлены в соответствие значения вероятностных мер и, как следствие, распределения вероятностей. Тогда могут быть определены математические ожидания случайных величин, соответствующих множествам Θ и Z .

Обозначения для математических ожиданий: M'_{θ} – вычисляется по вероятностной мере P'_{θ} , представляет собой среднее значение меры возможности пребывания в состояниях θ (не зависящих от z , e); из результатов эксперимента определяется среднее значение меры возможности пребывания в состояниях θ , связанных с исходом z . По аналогии определяются математические ожидания $M_{z|e, \theta}$ (вычисляется по мере $P_{z|e, \theta}$) и $M_{z|\theta}$ (вычисляется по мере $P_{z|\theta}$). В дальнейшем обозначения МО $M''_{\theta|z}$, $M_{z|\theta}$ используются для идентификации операторных выражений (оператор как способ вычисления), посредством которых идентифицируются эффективные стратегии управления и проведения эксперимента. Таким образом, $M''_{\theta|z}$, $M_{z|e}$ – это оператор (способ) вычисления значений оценок эффективности стратегий эксперимента и управления с учетом вероятностей $P''_{\theta|z}$, $P_{z|e}$.

Пример интерпретации задачи принятия решений в условиях стохастической неопределенности. Множество $A = \{a_1, a_2\}$, где a_1 – «принять партию изделий из 1000 штук», a_2 – «забраковать партию изделий из 1000 штук». Множество $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{1000}\}$, где θ_l – состояние системы (природы), при котором l изделий дефектны. Множество $E = \{e_0, e_1, \dots, e_{1000}\}$, где e_i – эксперимент, в котором из партии извлекаются i изделий и проверяются. Множество $Z = \{(j, i) \mid 0 \leq j \leq i \leq 1000\}$, где (j, i) – исход i -го эксперимента, в котором обнаружено j дефектных изделий. Если выбран эксперимент e_5 , то возможные исходы принадлежат множеству $\{(0, 5), (1, 5), (2, 5), \dots, (5, 5)\}$. Полезность $U(\cdot)$ имеет вид $U(e_i(j, i), a_k, \theta_l)$ – это выигрыш, который ЛПР связывает с извлечением выборки i изделий, содержащий j дефектных изделий, и выбором последующего

действия a_k ($a_1 \Rightarrow$ «принять», $a_2 \Rightarrow$ «заблокировать»). Тогда вероятностная мера $P_{z|e_i, \theta_i}$ задает условную вероятность для различных возможных исходов (j, i) при условии, что во всей партии имеется l дефектных изделий и исследовано i штук (изделий) из 1000. Вероятностная мера $P_{\theta'}$ задает распределение вероятностей для числа l дефектных изделий в партии до того, как будет выполнен эксперимент.

Постановка задачи принятия решений в условиях стохастической неопределенности

Для решения задачи принятия решений в условиях стохастической неопределенности должны быть заданы множества E, Z, A, Θ и вероятности $P_{\theta, z|e}$. Тогда постановка задачи принятия решений предполагает определение: каким образом должен быть выполнен выбор e , а затем после определения исхода z каким образом должен быть выполнен выбор a , чтобы максимизировать ожидаемую полезность U . Данная задача может быть решена в виде многошаговой игры ЛПР с природой. Процесс принятия решений представлен в виде дерева многошаговой игры с природой на Рис. 2.1.

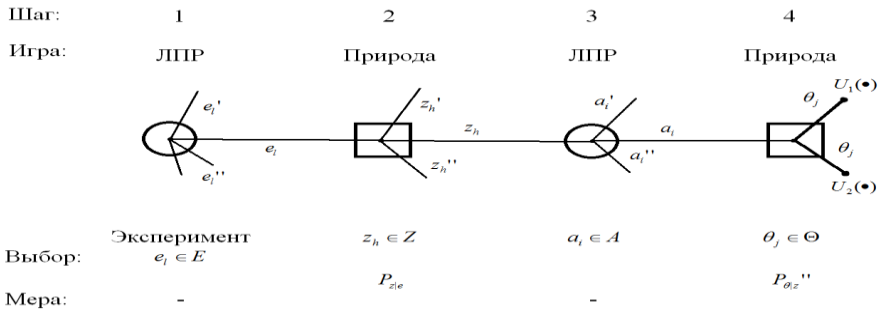


Рисунок 2.1 – Вид дерева игры с природой при принятии решений в условиях стохастической неопределенности.



- точка выбора (принятия) решения,



- реализация стратегии природы.

Шаги (этапы игры): 1) выбор ЛПР из E эксперимента e_i ; 2) в результате проведения эксперимента природой выбирается исход z_h ; 3) выбор ЛПР решения a_i из A (управляющего воздействия a_i); 4) в результате реализации решения $a_i \in A$ система переходит в состояние $\theta_j \in \Theta$. После выполнения 4-х шагов игра будет завершена, ЛПР получает полезность реализации решена a_i в виде:

$U(e_i, z_h, a_i, \theta_j)$. Таким образом, шаги 1 и 3 реализует ЛПР, исход z_h эксперимента e_i (достигнутое после реализации решения a_i) для определения состояния системы θ_j являются случайными. В случае, если дерево решений сформировано, характеристики вероятностных мер известны, тогда выбор вариантов управлений (решений) и проведения экспериментов может быть выполнен одним из двух способов: анализ в экстенсивной форме; анализ в нормальной форме.

Анализ решений с использованием дерева в экстенсивной форме

Описание способа идентификации эффективных решений на основе дерева решений реализуем с использованием конкретной (практической) постановки задачи.

Описание множеств A, Θ, E, Z

Пространство	Элементы	Интерпретация
A	a_1	Не регулировать
	a_2	Регулировать
Θ	θ_1	Элемент не нуждается в регулировке
	θ_2	Элемент нуждается в регулировке
E	e_0	Не применять тест
	e_1	Применять тест
Z	z_0	Значение исхода z_0 – фиктивное
	z_1	Значение исхода z_1 благоприятствующее θ_1
	z_2	Значение исхода z_2 благоприятствующее θ_2

Вероятностные меры P'_θ (т.е. определение требовалась ли элементу регулировка или нет, выполнилось без проведения тестирования (эксперимента)),

$P_{z|e}$ и $P''_{\theta|z}$ сведены в следующие таблицы.

θ	P'_θ
θ_1	0,7
θ_2	0,3
	1,0

z	$P_{z e}$	
	e_0	e_1
z_0	1,0	0
z_1	0	0,55
z_2	0	0,45
	1,0	1,0

θ	$P''_{\theta z}$		
	z_0	z_1	z_2
θ_1	0,7	0,891	0,466
θ_2	0,3	0,109	0,534
	1,0	1,0	1,0

Вид дерева решений в многошаговой игре с природой представлен на Рис .2.2.

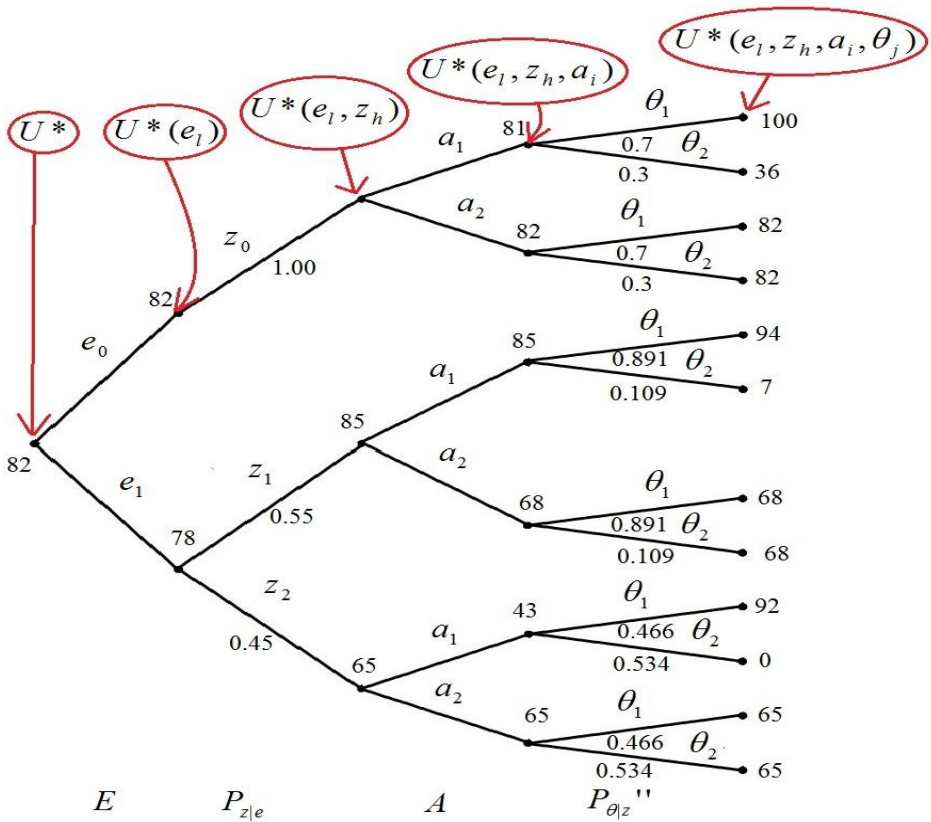


Рисунок 2.2– Дерево решений в многошаговой игре по принятию решению с целью определения стратегий проведения эксперимента и регулирования

Анализ дерева решений

Анализ дерева решений выполняется путем последовательного вычисления оценок:

$$1) \quad U^*(e_l, z_h, a_i) = \sum_j U(e_l, z_h, a_i, \theta_j) \cdot P_{\theta_j|z_h} \quad \text{где} \quad U^*(e_l, z_h, a_i) - \text{оценка результата}$$

принятия соответствующего решения a_i перед реализацией выбора природы по определению состояния θ_j ;

2) $U^*(e_l, z_h) = \max(U^*(e_l, z_h, a_i), U^*(e_l, z_h, a_i'))$, где $U^*(e_l, z_h)$ – оценка после выбора природой соответствующего исхода эксперимента z_h (исход принятия решения a_i и a_i');

3) $U^*(e_l) = \sum_h U^*(e_l, z_h) \cdot P_{z_h|e_l}$, где $U^*(e_l)$ – оценка перед реализацией выбора природой соответствующего исхода z_h , являющегося следствием эксперимента e_l ;

4) $U^* = \max(U^*(e_l), U^*(e_l'))$.

В качестве примера выполним вычисления:

1 шаг.

$$U(e_1, z_1, a_1) = P_{\theta_1|z_1} \cdot U(e_1, z_1, a_1, \theta_1) + P_{\theta_2|z_1} \cdot U(e_1, z_1, a_1, \theta_2) = \\ = 94 \cdot 0,891 + 7 \cdot 0,109 = 85;$$

$$U(e_1, z_1, a_2) = 68;$$

2 шаг.

$$U(e_1, z_1) = \max(U(e_1, z_1, a_1), U(e_1, z_1, a_2)) = \max(85, 68) = 85;$$

3 шаг.

$$U(e_1) = P_{z_1|e_1} \cdot U(e_1, z_1) + P_{z_2|e_1} \cdot U(e_1, z_2) = 0,55 \cdot 85 + 0,45 \cdot 65 = 76$$

$$U(e_0) = 82;$$

4 шаг.

$$U = \max(U^*(e_0), U^*(e_1)) = \max(82, 76) = 82.$$

Следовательно, эффективная стратегия принятия решений предполагает использование a_2 и e_0 , т.е. прибор (элемент) необходимо регулировать, однако перед этим не применять тест.

Анализ дерева решений в нормальной форме

Конечный результат анализа дерева решений в экстенсивной форме (аналог обхода дерева в глубину) – это описание оптимальной стратегии, состоящее из двух частей:

- 1) указание эксперимента e , который следует выбрать;
- 2) решающее правило, предписывающееся оптимальное итоговое действие a некоторому возможному исходу z выбранного эксперимента e .

Анализ в нормальной форме предполагает предварительное задание стратегий проведения экспериментов и принятия решений (стратегий проведения экспериментов и применения решений) и последующий выбор эффективной среди предложенных стратегий. Алгоритм определения эффективных стратегий проведения экспериментов и выбора решения по управлению выполни с использованием примера дерева решений, приведенного в предыдущем разделе.

Для задания стратегии совместного проведения эксперимента и выборки (реализации) решения в рассмотрение введено правило выборки решения a_i для определенного (некоторого) исхода z_h реализуемого эксперимента e_l . Обозначим правило выборки решения a_i для некоторого исхода z_h (в общем виде решения a для исхода z) через $d(z)$. Т. о. $d(z)$ - это решающее правило или способ определения a для каждого $z \in Z$.

Тогда стратегия управления (проведения эксперимента и выбора решения) будет определяться в виде (e, d) . Т.к. d - это способ идентификации a для некоторого z , являющегося результатом e , тогда $d(z) = a$ (т.е. правило d определяет решение a , соответствующее исходу z эксперимента e). В этом случае решение a может быть заменено на правило выбора решения при определенном исходе z . Тогда полезность, полученная в результате проведения эксперимента и выборки решения a с использованием правила $d(z)$ может быть обозначена в виде: $u(e, z, d(z), \theta)$. Таким образом, стратегия управления (принятия решений) может быть представлена в виде (e, d) и определяется для некоторого фиксированного z (исхода z), являющегося результатом эксперимента e , указанного в стратегии (e, d) .

Т. к. стратегия (e, d) формируется для некоторого z , тогда должны быть заданы вероятности $P_{z|e, \theta}$. Вероятность $P_{z|e, \theta}$ - это вероятность того, что при некотором состоянии системы θ_j и выполнении эксперимента e_l будет зафиксирован исход z_h . Для рассматриваемой задачи (при $A = \{a_1, a_2\}$, $E = \{e_1, e_2\}$, $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$) таблица распределения вероятностей $P_{z|e, \theta}$ может иметь следующий вид:

z_h	E			
	e_0		e_1	
	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
z_0	1,0	1,0	0,0	0,0
z_1	0,0	0,0	0,7	0,2
z_2	$\frac{0,0}{1,0}$	$\frac{0,0}{1,0}$	$\frac{0,3}{1,0}$	$\frac{0,8}{1,0}$

Т.о. если система находится в состоянии θ_1 , то при реализации стратегии проведения эксперимента e_0 («не применять тест») с вероятностью 1,0 будет получен фиктивный исход z_0 (т.е. при «не применении теста» в состоянии θ_1 получен фиктивный исход z_0). По аналогии, если система находится в θ_2 , то при реализации эксперимента e_0 («не проводить тестирование») с вероятностью 1,0 все равно будет получен исход z_0 .

Если система находится в состоянии θ_1 , то при проведении эксперимента e_1 («применить тест») исход z_1 может быть получен с вероятностью 0,7, а исход z_2 может быть получен с вероятностью 0,3. Т.о. $P_{z_1|e_1,\theta_1} = 0.7$, $P_{z_2|e_1,\theta_1} = 0.3$. Аналогичным образом: $P_{z_1|e_1,\theta_2} = 0.2$, $P_{z_2|e_1,\theta_2} = 0.8$.

Т.к. $d(z)$ – решающее правило, определяющее решение ($d(z_h) = a_i$), тогда при задании стратегии управления (e, d) и некотором состоянии системы θ_j (θ_1 либо θ_2 в рассматриваемом примере) может быть определена вероятность того, что правило d приведет к реализации соответствующего решения a_i , т.е. может быть определена вероятность $P_a(a_i|(e, d), \theta)$. Эта вероятность может быть также обозначена как $P_{a|(e, d), \theta}$. Понятно, что в разных состояниях θ вероятности выбора одного и того же решения будут различными.

В итоге имеем, что при известных $P_{z|e, \theta}$ могут быть определены вероятности применения решений (управлений) a_i в виде $P_{a|e, d, \theta}$. Говорят, что вероятностная мера $P_{z|e, \theta}$ индуцирует вероятностную меру $P_{a|e, d, \theta}$.

В том случае, если $A = \{a_1, a_2\}$, $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, то должны быть определены вероятности применения управлений (решений) a_1 и a_2 для состояний θ_1 и θ_2 в соответствии со стратегиями (e, d) , обозначенные в виде: $P_a(a_1|e, d, \theta_1)$, $P_a(a_1|e, d, \theta_2)$, $P_a(a_2|e, d, \theta_1)$, $P_a(a_2|e, d, \theta_2)$; в общем виде: $P_a(a_1|e, d, \cdot)$ либо $P_a(a_1|e, d, \theta)$ и $P_a(a_2|e, d, \cdot)$ либо $P_a(a_2|e, d, \theta)$. Тогда $P_a(a_1|e, d, \cdot)$ (либо $P_a(a_1|e, d, \theta)$), $P_a(a_2|e, d, \cdot)$ (либо $P_a(a_2|e, d, \theta)$), являющиеся функциями θ , могут быть названы рабочими характеристиками d на e (решающих правил d на проводимых экспериментах e). Т.о. для определения рабочей характеристики d на e необходимо знать A , Θ , Z , $P_{z|e, \theta}$, а также вероятности P'_θ (априорные вероятности каждого из состояний $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$).

В рассматриваемой задаче заданы следующие стратегии:

- 1) стратегия 1 - (e_0, d_{01}) , где $d_{01}(z_0) = a_1$, т.е. стратегия (e_0, d_{01}) предполагает не проведение теста (эксперимент e_0) и т.к. результатом e_0 является z_0 , то $d_{01}(z_0) = a_1$, т.е. не проводится регулирование прибора;
- 2) стратегия 2 - (e_0, d_{02}) , где $d_{02}(z_0) = a_2$, т.е. не проводить тест, но выполнять регулирование прибора, получив фиктивный исход z_0 ;
- 3) стратегия 3 - (e_1, d_{11}) , где $d_{11}(z_1) = a_1$ и $d_{11}(z_2) = a_2$ (т.е. если в случае реализации эксперимента e_1 будет получен исход z_1 , то не выполнять регулирование прибора, если получен исход 2, то реализовать регулирование прибора – решение a_2). Т.к. только решение a_2 связано с выполнением конкретного действия с прибором, то непосредственно решение по выполнению действия (в соответствии с правилом $d_{11}(z_2) = a_2$) определяется только в состоянии z_2 - регулировать только тогда, когда исход эксперимента z_2 ;
- 4) стратегия 4 - (e_1, d_{12}) , где $d_{12}(z_1) = a_2$ и $d_{12}(z_2) = a_1$ (т.е. регулировать только тогда, когда исход e_1 равен z_1).

Т.к. действия по регулированию прибора связаны с решением a_2 , тогда с каждой из 4-х стратегий должны быть определены вероятности $P_a(a_2|e, d, \cdot)$ и в соответствии с ними определены значения полезности каждой из стратегий. Таким образом, в основу процедуры определения оценок полезности каждой из стратегий положены значения вероятностей $P_a(a_2|e, d, \cdot)$, которые формируются на основе значений $P_{z|e, \theta}$.

Примем за основу третью стратегию (e_1, d_{11}) (где $d_{11}(z_1) = a_1$ и $d_{11}(z_2) = a_2$, т.е. если исход эксперимента z_1 , то регулирование не выполнять (решение a_1), если исход z_2 , то выполнять регулирование (решение a_2)) и на ее примере определим шаги алгоритма вычисления обобщенной оценки полезности этой стратегии. Т.к. решение a_2 связано с выполнением действий по регулированию, а решение a_1 - с бездействием, то целесообразно определять именно вероятность $P_a(a_2|e, d, \theta)$.

Шаги процедуры определения оценки $U(\cdot)$ для (e_1, d_{11}) :

1. Для стратегии 3 применение управления (решения) a_2 связано с исходом z_2 , поэтому анализируются $P_{z_2|\theta_1}$ и $P_{z_2|\theta_2}$ (понятно, что при выполнении e_1). Т.к. $P_{z_2|\theta_1} = 0.3$, то при исходе z_2 и состоянии системы θ_1 имеем $P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_1) = 0.3$;
- т.к. $P_{z_2|\theta_2} = 0.8$, то $P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_2) = 0.8$.

2. Из таблицы, в которой определены элементы всех рассматриваемых множеств A, Θ, Z, E следует, что состояние θ_1 соответствует решению a_1 , состояние θ_2 соответствует решению a_2 (соответственно исход z_1 и решение a_1 , исход z_2 и решение a_2). Тогда, если $P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_1) = 0.3$, но при этом применение решения a_2 в состоянии θ_1 является ошибочным, то в рассмотрение может быть введена вероятность ошибочного применения решения в состоянии, предусматривающем применение другого решения. Таким образом, если состояние θ_1 рассчитано (предполагает) на применение решения a_1 , а применение решения a_2 в этом состоянии является ошибочным, то $P_{ошибки}(a_2|e_1, z_2, \theta_1) = P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_1) = 0.3$.

Понятно, что если применение a_2 в состоянии θ_1 является ошибочным и при этом $P_{ошибки}(a_2|e_1, z_2, \theta_1) = P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_1) = 0.3$, то правильным в состоянии θ_1 является применение решения a_1 и при этом $P_a(a_1|e_1, z_1, \theta_1) = 1 - P_{ошибки}(a_2|e_1, z_2, \theta_1) = 0.7$ (решению в состоянии θ_1 должен соответствовать исход z_1).

По аналогии состояние θ_2 предполагает реализацию решения a_2 , тогда в состоянии θ_2 ошибочным будет являться применение решения a_1 (ошибка в состоянии θ_2 – это применение решения a_1), в этом случае $P_{ошибки}(a_1|e_1, z_2, \theta_2) = P_a(a_1|e_1, z_1, \theta_1) = 1 - P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_2) = 1 - 0.8 = 0.2$.

Таким образом, решение a_1 должно применяться только при исходе z_1 в соответствии с рассматриваемой стратегией. Следовательно, вероятность применения решения a_1 в случае, если система находится в состоянии θ_2 при исходе z_2 эксперимента e_1 : $P_a(a_1|e_1, z_1, \theta_2) = 0.2$ либо $P_a(a_1|e_1, d_{11}, \theta_2) = 0.2$.

3. Рассчитывается полезность $U(e_1, d_{11}, \theta_1)$.

Если $U(e_1, z_1, a_1, \theta_1) = 94$, $U(e_1, z_2, a_2, \theta_1) = 65$, тогда:

$$U(e_1, d_{11}, \theta_1) = P_a(a_1|e_1, z_1, \theta_1) * U(e_1, z_1, a_1, \theta_1) + P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_1) * U(e_1, z_2, a_2, \theta_1) = 0.7 * 94 + 0.3 * 65 = 85. \text{ Аналогично}$$

$$U(e_1, d_{11}, \theta_2) = P_a(a_1|e_1, z_1, \theta_2) * U(e_1, z_1, a_1, \theta_2) + P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_2) * U(e_1, z_2, a_2, \theta_2) = 0.2 * 7 + 0.8 * 65 = 53.$$

В принципе по таблице $P_{z_2|\theta_1}$ при учете, что $d(z_1) = a_1$, $d(z_2) = a_2$ уже может быть определено:

$$P_a(a_1|e_1, z_1, \theta_1) = P_{z_1|e_1, \theta_1} = 0.7;$$

$$P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_1) = P_{z_2|e_1, \theta_1} = 0.3;$$

$$P_a(a_1|e_1, z_1, \theta_2) = P_{z_1|e_1, \theta_2} = 0,2$$

$$P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_2) = P_{z_2|e_1, \theta_2} = 0,8.$$

Однако выше приведенные рассуждения комментируют логику получения соответствующих оценок вероятностных мер.

4. Определение общей оценки стратегии (e_1, d_{11}) .

В силу того, что $P_{\theta_1} = 0,7$, $P_{\theta_2} = 0,3$ (см. таблицу выше) получим

$$U(e_1, d_{11}) = P_{\theta_1} * U(e_1, d_{11}, \theta_1) + P_{\theta_2} * U(e_1, d_{11}, \theta_2) = 0,7 * 85 + 0,3 * 53 = 76.$$

Полученное значение 76 является оценкой полезности для стратегии (e_1, d_{11}) .

Выполним аналогичные расчеты для стратегии 4 (e_1, d_{12}) где $d_{12}(z_1) = a_2$, $d_{12}(z_2) = a_1$.

1. Применение a_2 связано с реализацией исхода z_1 , поэтому

$$P_a(a_2|e_1, z_1, \theta_1) = P_{z_1|e_1, \theta_1} = 0,7; P_a(a_2|e_1, z_1, \theta_2) = P_{z_1|e_1, \theta_2} = 0,2;$$

$$P_a(a_1|e_1, z_2, \theta_1) = P_{z_2|e_1, \theta_1} = 0,3; P_a(a_1|e_1, z_2, \theta_2) = P_{z_2|e_1, \theta_2} = 0,8.$$

2. Определение значений $U(e_1, d_{12}, \theta_1)$ и $U(e_1, d_{12}, \theta_2)$:

$$U(e_1, d_{12}, \theta_1) = P_a(a_1|e_1, z_2, \theta_1) * U(e_1, z_2, a_1, \theta_1) + P_a(a_2|e_1, z_1, \theta_1) * U(e_1, z_1, a_2, \theta_2) = \\ = 0,3 * 92 + 0,7 * 68 = 75,2;$$

$$U(e_1, d_{12}, \theta_2) = P_a(a_2|e_1, z_1, \theta_2) * U(e_1, z_1, a_2, \theta_2) + P_a(a_1|e_1, z_2, \theta_2) * U(e_1, z_2, a_1, \theta_2) = \\ = 0,2 * 68 + 0,8 * 0 = 13,6.$$

3. Определение $U(e_1, d_{12})$:

$$U(e_1, d_{12}) = P_{\theta_1} * U(e_1, d_{12}, \theta_1) + P_{\theta_2} * U(e_1, d_{12}, \theta_2) = 0,7 * 75,2 + 0,3 * 13,6 = 52,64 + \\ + 4,08 = 56,72 \approx 57.$$

Аналогичным образом должны быть рассчитаны значения $U(e_0, d_{01})$, $U(e_0, d_{02})$. Результаты расчетов сведены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

Стратегии	$P\{a_2 e, z, \theta\}$		Характеристика ошибок $P_{ошибки}(a_i \cdot)$		Характеристика полезности $U(\cdot)$		$U(e, d)$
	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	
1	0	0	0	1,0	100	36	81
2	1,0	1,0	1,0	0	82	82	82
3	0,3	0,8	0,3	0,2	85	53	76
4	0,7	0,2	0,7	0,8	75	14	57

Столбец $U(e, d)$ в таблице содержит значения общих полезностей для различных стратегий. На основе значений при реализации условия максимизации полезности определено, что эффективной стратегией является стратегия (e_0, d_{02}) .

Формализация процедуры определения эффективных стратегий в общем виде

1. Вероятность $P_{z_2|e_1, \theta_1}$ индуцирует вероятность $P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_1)$, вероятность $P_{z_2|e_1, \theta_2}$ индуцирует вероятность $P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_2)$. Здесь рассматривается решающее правило $d_{11}(z_2) = a_2$, т.к. только оно связано в реализации решения по выполнению действий. Таким образом, рассматривается $P_a(a_2 | \cdot)$ в силу того, что решение a_2 применимо только в состоянии z_2 в соответствии со стратегией (e_1, d_{11}) (и, в частности, правила $d_{11}(z_2) = a_2$).

2. Т.к. применение a_2 связано с состоянием θ_2 (и с исходом z_2), тогда применение a_2 в состоянии системы θ_1 является ошибочным решением, следовательно:

$$P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_1) = P_{ошибки}(a_2 | e_1, z_2, \theta_1).$$

Отсюда вытекает, что в состоянии θ_1 должно быть применено решение a_1 , вероятность использования которого определяется следующим образом (в соответствии с правилом $d_{11}(z_1) = a_1$ реализация решения a_1 возможна при исходе z_1): $P_a(a_1|e_1, z_1, \theta_1) = 1 - P_{ошибки}(a_2 | e_1, z_2, \theta_1)$ (решение a_1 в состоянии θ_1 должен соответствовать исход z_1).

3. Т.к. $d(z_2) = a_2$ и при этом $P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_2)$ определена, тогда применение в θ_2 решения a_1 является ошибочным (в силу правила $d_{11}(z_1) = a_1$ и таблицы для A и Z), в этом случае: $P_a(a_1|e_1, z_2, \theta_2) = P_{ошибки}(a_1 | e_1, z_2, \theta_2)$, тогда

$$P_{ошибки}(a_1 | e_1, z_2, \theta_2) = 1 - P_a(a_2|e_1, z_2, \theta_2).$$

В силу того, что $d_{11}(z_1) = a_1$, тогда требуется определение вероятности $P_a(a_1|e_1, z_1, \theta_2)$.

4. Вычисление полезности U стратегии (e, d) для каждого состояния θ_j следующим образом: $U(e, d, \theta_j) = \sum_i P_a(a_i | e_1, z_1, \theta_j) * U(e_1, z_i, a_i, \theta_j)$. Либо в более общем виде с использованием операторного выражения для МО:

$$U(e, d, \theta_j) = M_{a_i|z_h, \theta_j}(U(e_1, z_h, a_i, \theta_j)).$$

5. Определение обобщенной оценки полезности U для стратегии (e, d) следующим образом: $U(e, d) = \sum_i P'_{\theta_j} * U(e, d, \theta_j)$.

Либо в общем виде с использованием операторного выражения для МО:

$$U(e, d) = M_{\theta'}(U(e, d, \theta)).$$

6. Выбор стратегии (e, d) , у которой $U(e, d)$ будет являться максимальной, т.е.

$$(e, d)^* = \arg \max U(e, d).$$

3. Программа выполнения работы

Для первого и третьего вариантов порядок выполнения лабораторной работы следующий:

1. Разработать процедуру, выполняющую ввод распределений априорных вероятностей P'_{θ} , апостериорных вероятностей $P_{z|e}$, $P''_{\theta|z}$.
2. Разработать процедуру вычисления значений полезности $U^*(e_l, z_h, a_i)$ для каждого решения a_i , соответствующих экспериментов и их исходов.
3. Разработать процедуру вычисления значений полезности $U^*(e_l, z_h)$ для каждого исхода z_h и соответствующего ему эксперимента e_l .
4. Разработать процедуру вычисления полезности $U^*(e_l)$ каждого из проводимых экспериментов e_l .
5. Разработать процедуру выбора эффективных стратегий проведения эксперимента и принятия решений на основе вычисленных значений полезности.

Для второго варианта порядок выполнения лабораторной работы следующий:

1. Разработать процедуру, выполняющую ввод распределения вероятностей $P_{z|e, \theta}$.
2. Разработать процедуру вычисления для стратегий значений вероятностей $P_a(a_i | e_l, z_h, \theta_j)$ (или $P_a(a_i | \cdot)$), определяя при этом как вероятности надлежащего принятия решений для соответствующих состояний, так и вероятности ошибочного принятия решений для этих состояний.
3. Выполнить разработку процедуры вычисления значений полезности реализации стратегий в соответствующих состояниях.
4. Выполнить разработку процедуры вычисления общих оценок полезности соответствующих стратегий и выбора эффективной стратегии с максимальной полезностью.

4. Задания на работу

Вариант 1.

Множества A и Θ имеют следующий вид: $A = \{a_1, a_2\}$, $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$.

Распределения вероятностей, соответствующие дереву принятия решений (многошаговой игры), представленному на Рис. 2.2 сведены в таблицы, приведенные ниже.

θ	P'_θ
θ_1	0,55
θ_2	0,45
	1,0

z	$P_{z e}$	
	e_0	e_1
z_0	1,0	0
z_1	0	0,55
z_2	0	0,45
	1,0	1,0

θ	$P''_{\theta z}$		
	z_0	z_1	z_2
θ_1	0,7	0,75	0,2
θ_2	0,3	0,25	0,8
	1,0	1,0	1,0

Значения полезности для соответствующих стратегий проведения эксперимента и принятия решений следующие: $U(e_0, z_0, a_1, \theta_1) = 75$, $U(e_0, z_0, a_1, \theta_2) = 60$,

$U(e_0, z_0, a_2, \theta_1) = 80$, $U(e_0, z_0, a_2, \theta_2) = 50$, $U(e_1, z_1, a_1, \theta_1) = 50$, $U(e_1, z_1, a_1, \theta_2) = 20$,
 $U(e_1, z_1, a_2, \theta_1) = 65$, $U(e_1, z_1, a_2, \theta_2) = 65$, $U(e_1, z_2, a_1, \theta_1) = 80$, $U(e_1, z_2, a_1, \theta_2) = 40$,
 $U(e_1, z_2, a_2, \theta_1) = 40$, $U(e_1, z_2, a_2, \theta_2) = 68$.

С использованием метода анализа в экстенсивной форме выполнить определение эффективной стратегии проведения эксперимента и принятия решений. При этом учесть, что z_0 – это фиктивный исход, z_1 – исход, благоприятствующий состоянию θ_1 , z_2 – исход, благоприятствующий состоянию θ_2 .

Вариант 2.

Множества A и Θ имеют следующий вид: $A = \{a_1, a_2\}$, $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$, где z_0 – это фиктивный исход, z_1 – исход, благоприятствующий состоянию θ_1 , z_2 – исход, благоприятствующий состоянию θ_2 . Распределения вероятностей $P_{z|e, \theta}$ представлены в следующей таблице.

z_h	E			
	e_0		e_1	
	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
z_0	1,0	1,0	0,0	0,0
z_1	0,0	0,0	0,65	0,25
z_2	0,0	0,0	0,35	0,75

Для θ_j ($j = \overline{1,2}$) распределение вероятностей имеет вид: $P'_{\theta_1} = 0.55$, $P'_{\theta_2} = 0.45$.

Значения полезности для соответствующих стратегий проведения эксперимента и принятия решений следующие: $U(e_0, z_0, a_1, \theta_1) = 65$, $U(e_0, z_0, a_1, \theta_2) = 60$, $U(e_0, z_0, a_2, \theta_1) = 80$, $U(e_0, z_0, a_2, \theta_2) = 80$, $U(e_1, z_1, a_1, \theta_1) = 50$, $U(e_1, z_1, a_1, \theta_2) = 58$, $U(e_1, z_1, a_2, \theta_1) = 65$, $U(e_1, z_1, a_2, \theta_2) = 65$, $U(e_1, z_2, a_1, \theta_1) = 80$, $U(e_1, z_2, a_1, \theta_2) = 90$, $U(e_1, z_2, a_2, \theta_1) = 40$, $U(e_1, z_2, a_2, \theta_2) = 68$. В качестве стратегий реализации экспериментов и принятия решений применены следующие:

- 1) стратегия 1 - (e_0, d_{01}) , где $d_{01}(z_0) = a_1$, т.е. стратегия (e_0, d_{01}) предполагает не проведение теста (эксперимент e_0) и т.к. результатом e_0 является z_0 , то $d_{01}(z_0) = a_1$, т.е. не проводится регулирование прибора;
- 2) стратегия 2 - (e_0, d_{02}) , где $d_{02}(z_0) = a_2$, т.е. не проводить тест, но выполнять регулирование прибора, получив фиктивный исход z_0 ;
- 3) стратегия 3 - (e_1, d_{11}) , где $d_{11}(z_1) = a_1$ и $d_{11}(z_2) = a_2$ (т.е. если в случае реализации эксперимента e_1 будет получен исход z_1 , то не выполнять регулирование прибора, если получен исход 2, то реализовать регулирование прибора – решение a_2). Т.к. только решение a_2 связано с выполнением конкретного действия с прибором, то непосредственно решение по выполнению действия (в соответствии с правилом $d_{11}(z_2) = a_2$) определяется только в состоянии z_2 - регулировать только тогда, когда исход эксперимента z_2 ;
- 4) стратегия 4 - (e_1, d_{12}) , где $d_{12}(z_1) = a_2$ и $d_{12}(z_2) = a_1$ (т.е. регулировать только тогда, когда исход e_1 равен z_1).

С использованием метода анализа дерева решений в нормальной форме определить эффективную стратегию проведения эксперимента и принятия решения.

Вариант 3.

Для дерева принятия решений, представленного на Рис.2.3, и соответствующих этому дереву распределений вероятностей, выполнить определение эффективных стратегий проведения эксперимента и принятия решений с использованием метода анализа дерева решений в экстенсивной форме. Таблицы распределений вероятностей, состав множеств экспериментов, исходов, решений и состояний системы сформировать самостоятельно в соответствии с видом дерева.

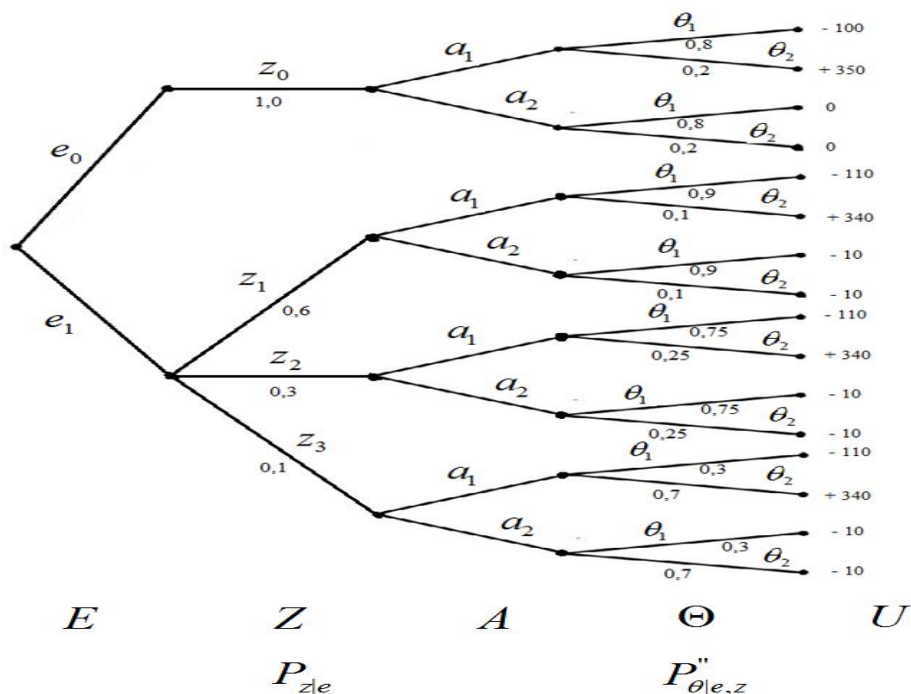


Рисунок 2.3 – Вид дерева решений для реализации Варианта 3 задания

4. Контрольные вопросы

1. В чем заключается задача принятия решений в условиях стохастической неопределенности?
2. Определить множества характеристик (параметров) задачи принятия решений в условиях неопределенности?
3. Какие вероятности должны быть заданы для реализации процедуры принятия
4. Что из себя представляют математические ожидания соответствующих вероятностных мет, каким образом они вычисляются и для чего используются?
5. Что из себя представляет процесс принятия решений в условиях неопределенности, в какой форме этот процесс может быть задан?
6. В чем заключается процедура принятия решений при экстенсивном анализе дерева решений, каким образом может быть формализована процедура принятия решений при экстенсивном анализе?
7. В чем состоит принятие решений при анализе дерева игры (решений) в нормальной форме, что такое стратегия принятия решений?

8. В чем состоят особенности применения решающего правила d при анализе дерева решений в нормальной форме?
9. Каким образом реализуется определение вероятностей принятия решений для задаваемых состояниях системы и исходах экспериментов?
10. В чем заключается логика процедуры определения вероятностей при анализе решений в нормальной форме и каким образом эта процедура формализуется?
11. Каким образом выполняются вычисление значений полезности u для стратегий (e,d) в разных состояниях θ_j системы?
12. Каким образом выполняется вычисление обобщенных оценок полезности для каждой стратегии?

Лабораторная работа №3

Исследование применения понятия нечеткого отношения, операций импликации и композиции при реализации нечетких высказываний и построении нечетких рассуждений

1. Цель работы: исследовать способы применения понятия нечеткого отношения, операций импликации и композиции при реализации нечетких высказываний.

2. Теоретическое введение

2.1. Понятие нечетких и лингвистических переменных

Нечеткая переменная (НП) определяется совокупностью параметров вида:

$$\langle p, X, A \rangle,$$

где p - название нечеткой переменной, X - область определения нечеткой переменной (множество значений $x \in X$, для которых (на которых) определена нечеткая переменная (все множество X), $A = \{x \in X, \mu_A(x)\}$ - нечеткое множество (НМ) на X , элементы которого – нечеткие значения $\mu_A(x)$, которые принимает нечеткая переменная на X . Тогда нечеткое множество A определяет возможные значения ($\mu_A(x)$), которые принимает нечеткая переменная p для соответствующего значения $x \in X$.

Пример. Интенсивность трафика, передаваемого через сетевое устройство, может быть: малой – первая нечеткая переменная p_1 , средней – вторая нечеткая переменная p_2 и большой – третья нечеткая переменная p_3 . Все переменные ($p_i \mid i = \overline{1,3}$) определены на одном универсальном множестве X , допустим:

$$100 < X < 1000 \text{ мбит/с, т.е. } X = [100, 1000].$$

Для каждой переменной ($p_i \mid i = \overline{1,3}$) определена своя функция принадлежности $\mu_A^i(x)$, определяющая НМ, соответствующее нечеткой переменной.

Тогда:

1) <Малая интенсивность трафика, $(100 < X < 1000), A_1$ >, где

$$A_1 = \{x, \mu_{A_1}^1(x)\} - \text{нечеткое множество, соответствующее НП } p_1;$$

2) <Средняя интенсивность, $(100 < X < 1000), A_2$ >, где

$$A_2 = \{x, \mu_{A_2}^1(x)\} - \text{нечеткое множество соответствующее } p_2;$$

3) <Высокая интенсивность, $(100 < X < 1000), A_3$ >, где

$$A_3 = \{x, \mu_{A_3}^1(x)\} - \text{нечеткое множество соответствующее } p_3.$$

Графический вид нечетких переменных ($p_i \mid i = \overline{1,3}$) представлен на Рис. 3.1 (три переменные сведены на один рисунок).

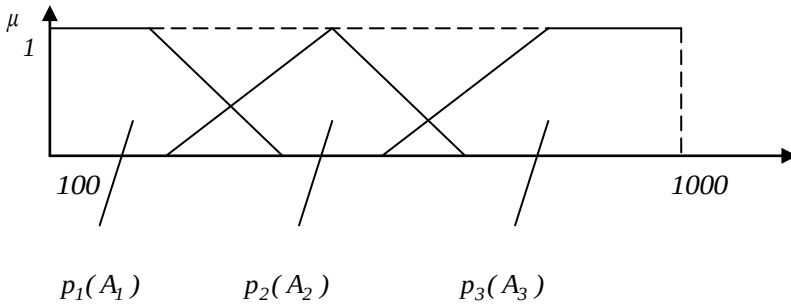


Рисунок 3.1– Вид нечетких множеств для соответствующих переменных

Лингвистическая переменная определяется как совокупность параметров вида:

$$\langle LP, NLP, X, G, M \rangle,$$

где:

- LP – название лингвистической переменной, характеризующей некоторые процессы (в рассматриваемом случае LP – «интенсивность трафика»);
- NLP – терм - множество значений лингвистической переменной (значения ЛП называются термами, совокупность этих значений образует множество NLP); терм-значение ЛП сопоставляется (однозначно) с соответствующим ему значением нечеткой переменной (т.е. должен быть задан способ сопоставления множества термов и соответствующего множества нечетких переменных); обозначим способ сопоставления через S , тогда $S : NLP \rightarrow \{p_i | i = \overline{1, n}\}$ – отображение множества NLP на множество нечетких переменных $\{p_i | i = \overline{1, n}\}$ где n - количество нечетких переменных;
- X – область определения нечетких переменных (задаваемое универсальное множество);
- G – процедура, описывающая процесс формирования новых значений – термов лингвистической переменной LP на основе имеющихся термов множества NLP (т.е. способ формирования новых термов-значений ЛП с именем LP на основе имеющихся термов из множества NLP).
- M – процедура, сопоставляющая каждому новому терму-значению ЛП с именем LP , сгенерированному процедурой G , соответствующее ему (этому терму) нечеткое множество, таким образом, процедура G позволяет формировать (реализует формирование) новые значения термов на основе использования либо логических операций «И», «ИЛИ», либо с использованием модификаторов исходных термов вида: «очень», «не», «более – менее» («слегка»), «не очень» и т.д.

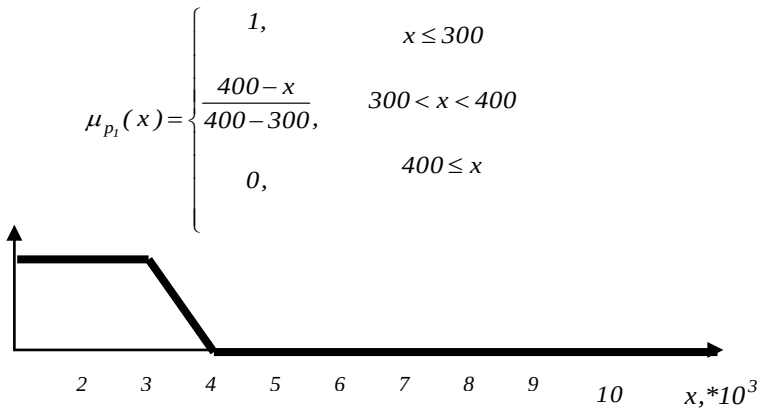
Процедура M выполняет расчет значений ФП ($\mu(x)$) для соответствующих сгенерированных процедурой G термов (полученных модификацией исходных значений–термов).

Пример формирования лингвистических переменных.

Переменная, описывающая значения интенсивности трафика, поступающего на маршрутизатор. Имя переменный LP - «Интенсивность трафика». Параметры переменной:

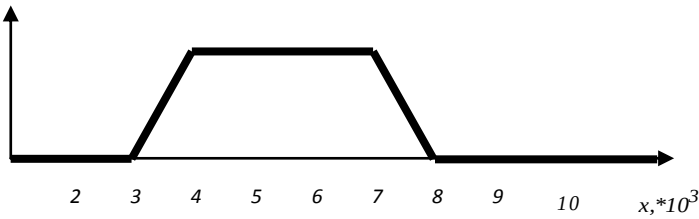
- 1) множество значений – термов лингвистической переменной NLP ;
- 2) $NLP = \{\text{«Малая»}, \text{«Средняя»}, \text{«Большая»}\}$. Так как $|NLP| = 3$, то должны быть определены три значения нечетких переменных, т.е. множество $(p_i / i = \overline{1,3})$.
- 3) универсальное множество X представляет собой интервал $[100, 1000]$ мбит/с, тогда $X = [100, 1000]$. Значения нечетких переменных задаются следующим образом (вид НП $(p_i / i = \overline{1,3})$ и формализация способа определения значений $(\mu_{p_i}(x))$):

а) переменная p_1 :



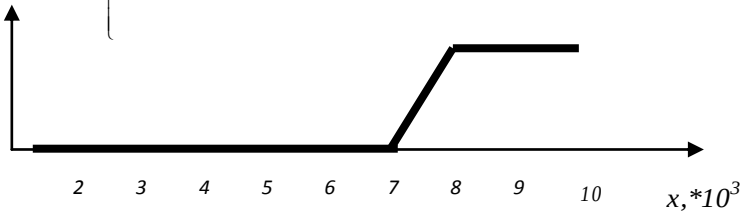
б) переменная p_2 :

$$\mu_{p_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 300 \\ \frac{x-300}{400-300}, & 300 < x < 400 \\ 1, & 400 \leq x \leq 700 \\ \frac{800-x}{800-700}, & 700 < x \leq 800 \\ 0, & 800 < x \end{cases}$$



в) переменная p_3 :

$$\mu_{p_3}(x) = \begin{cases} 0, & x < 700 \\ \frac{x-700}{800-700}, & 700 \leq x \leq 800 \\ 1, & 800 < x \end{cases}$$



Сопоставление термов-значений лингвистической переменной LP (множество NLP) с соответствующими значениями нечетких переменных $p_i (i = 1, 3)$:

«Малая» $\rightarrow p_1$; «Средняя» $\rightarrow p_2$; «Большая» $\rightarrow p_3$.

Графическое представление значений лингвистической переменной на Рис. 3.2.

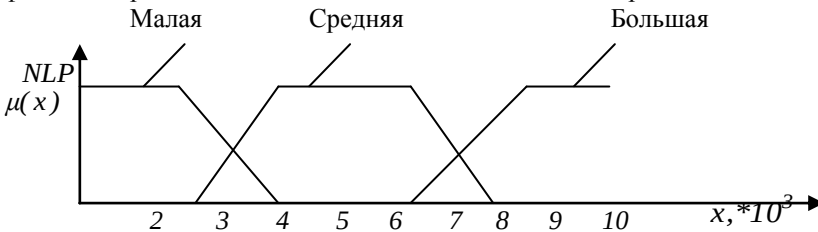


Рисунок 3.2 – Сопоставление значений ЛП и НП

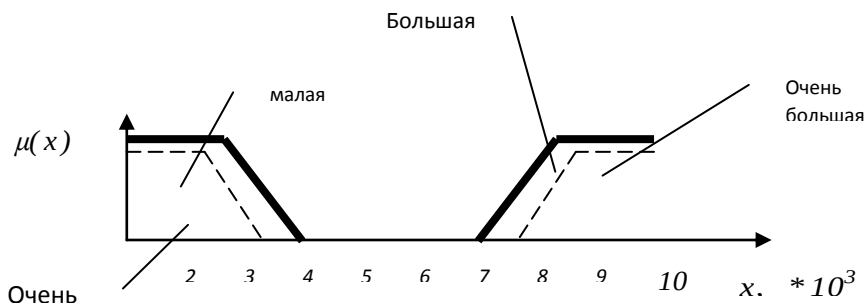
Процедура G , формирующая новые значения – термы с использованием модификаторов «и», «или», «не», «очень», «более-менее» и т.д. Тогда значения (термы) лингвистической переменной LP следующие (новые значения, полученные путем модификации имеющихся): **«не малая»**, **«не большая»**, **«очень большая»**,

«очень малая», «не очень большая», «более-менее средняя», «малая или средняя» .

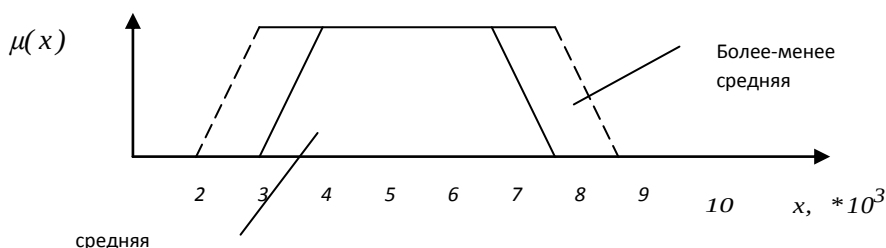
Процедура M , реализующая определение значений ФП для соответствующих новых значений термов ЛП, использует следующие выражения:

- а) $LP_i \rightarrow \text{не } LP_i \rightarrow 1 - \mu_{p_i}(x)$ «не»;
 б) $LP_i \rightarrow \text{очень } LP_i \rightarrow (\mu_{p_i}(x))^2$ «очень»;
 в) $LP_i \rightarrow \text{более менее } LP_i \rightarrow [\mu_{p_i}(x)]^{0.5}$ «более-менее»;
 г) $LP_i \text{ и } LP_j \rightarrow LP_i \cap LP_j \rightarrow \min[\mu_{p_i}(x), \mu_{p_j}(x)]$ «и»;
 д) $LP_i \text{ или } LP_j \rightarrow LP_i \cup LP_j \rightarrow \max\{\mu_{p_i}(x), \mu_{p_j}(x)\}$ «или».

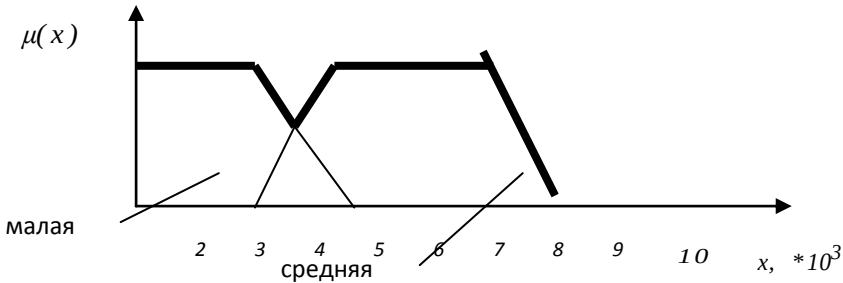
Вычисление значений ФП $\mu(x)$ для вновь полученных термов-значений ЛП «Интенсивность трафика» выполнено следующим образом:



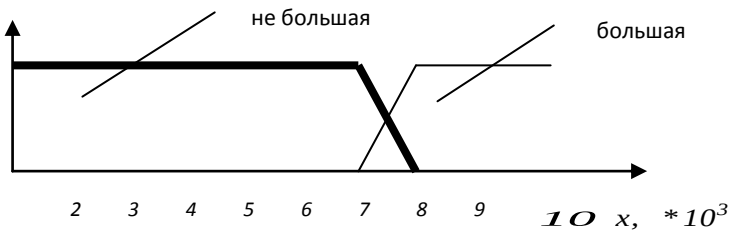
«Средняя» → «более менее средняя» («сравнительно средняя»)



«Малая», «Средняя» → «Малая или средняя» (сравнить с «Не большая»)



«Большая» → «Не большая»



2.2. Основы нечеткой логики.

Понятия четкой логики.

Высказывание – утверждение, для которого возможно определить истинность или ложность.

Пример: «2 – натуральное число».

Для составления сложных высказывание на основе простых используются логические операции: «и», «или», «не», «если..., то...».

Истинность сложных высказываний определяется значениями истинности элементарных высказываний. Тогда имеется возможность исчисления высказываний (т.е. определение их истинности или ложности).

Образование (модификация) высказываний

1) Операция «не» – высказывание «не А», где А – исходное высказывание.

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

Если высказывание «2 – натуральное число» есть истина, то «2 – не натуральное число» есть ложь.

Если «-5 – натуральное число» - ложь, то «-5 – не натуральное число» - истина.

2) Конъюнкция высказываний

A	B	A и B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Высказывание A: 2 – натуральное число.

Высказывание B: 2 – целое число.

Составное высказывание 1: «2 – натуральное число» и «2 – целое число» является истинным.

Составное высказывание 2: «1.5 – натуральное число» и «1.5 – целое число» является ложным.

3) По аналогии рассматривается дизъюнкция высказываний.

4) Импликация двух высказываний, соответствует союзу «если..., то...» и обозначается символом $\rightarrow$. Импликация $\rightarrow$ интерпретируется с.о.: «Если A, то B» или «Если высказывание A верно, то верно высказывание B», или «из A следует B». Операция импликации – это логическое следование. В импликации $A \rightarrow B$ высказывание A называют условием (посылкой) импликации, B – заключение (следствие) импликации.

Пример: высказывание A – треугольник равносторонний, высказывание B – треугольник равноугольный.

Если «треугольник равносторонний» то «треугольник равноугольный» («Если A, то B»).

В операции импликации высказывание, определяющее условие, может быть как простым, так и составным. Составные высказывания образуются из простых с использованием конъюнкции (операция «и») и дизъюнкции (операция «или»).

Пример составного высказывания на месте условия и действия.

Если A_1 и A_2 то B;

Если A_1 или A_2 то B;

Если A_1 и A_2 то B_1 и B_2 ;

Если A_1 и A_2 то B_1 или B_2 ;

Здесь A_i , B_j - высказывания

Таким образом, сформулированная операция импликации может быть обобщена в правило вывода истинного заключения B (правило «модус поненс»).

Посылка	A есть истинно
Импликация	Если A_1 то B
Логический вывод	B есть истинно

В соответствии с правилом вывода определяется заключение «B есть истинно», если известно, что «A истинно» и существует правило «Если A то B».

Понятие нечеткого высказывания

Нечетким высказыванием называется утверждение, относительно истинности которого возможно судить в некоторой степени уверенности. Таким образом степень истинности элементарного нечеткого высказывания принимает значение из замкнутого интервала $[0,1]$. Степень истинности высказывания A обозначена как

$$\mu_A(x).$$

Примеры элементарных нечетких высказываний.

3- малое число (степень истинности – 0,9),

15 – не очень большое число (степень истинности – 0,7)

Интенсивность трафика очень большая.

Отрицанием нечеткого высказывания A является высказывание $\bar{A}$, степень истинности которого определяется выражением $\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$, где μ_A – степень истинности высказывания A .

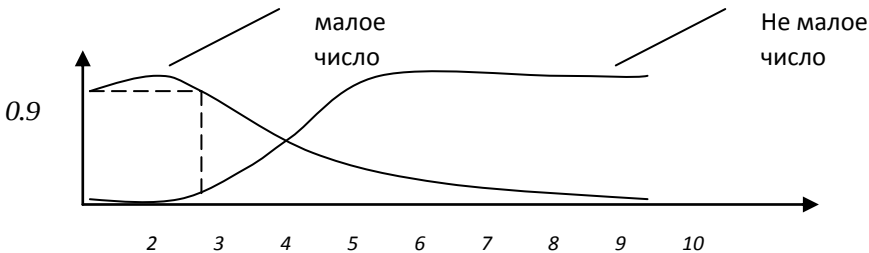
Пример определения степени истинности высказываний.

Нечеткое множество A – "Малое число".

Нечеткое множество "Не A " – "Не малое число".

$$\mu_A(3) = 0,9;$$

$$\mu_{\bar{A}}(3) = 0,1;$$



Таким образом, степень истинности высказывания "3- малое число" равна 0,9, а высказывания "3- не малое число" равна 0,1.

Конъюнкцией нечетких высказываний A и B называется нечеткое высказывание $A \cap B$, степень истинности которого определяется выражением:

$$\mu_{A \cap B}(x_1, x_2) = \mu_A(x_1) \cap \mu_B(x_2) = \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)).$$

Пример конъюнкции нечетких высказываний.

Определены две лингвистические переменные – интенсивность трафика и объем буфера для хранения пакетов. Соответствующие множества NLP_1 и NLP_2 имеют вид: $NLP_1 = \{\text{малая, средняя, большая}\}$, $NLP_2 = \{\text{малый, средний, большой}\}$.

Высказывание A : «220 – малая интенсивность трафика».

Высказывание B : «500 – большой размер буфера».

Вычисление значения функции принадлежности для конъюнкции нечетких высказываний выполняется следующим образом:

$$\mu_{A \cap B}(x_1, x_2) = \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)) = \mu_B(x_2).$$

Дизъюнкция нечетких высказываний A и B называется нечеткое высказывание $A \cup B$, степень истинности которого определяется выражением вида:

$$\mu_{A \cup B}(x_1, x_2) = \max(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)).$$

Вычисление степени истинности высказывания $\mu_{A \cup B}(x_1, x_2)$ выполняется аналогично, при этом $\mu_{A \cap B}(x_1, x_2) = \mu_A(x_1)$.

В общем виде выражения для вычисления значений $\mu_{A \wedge B}$ и $\mu_{A \vee B}$ могут быть записаны следующим образом:

$$\mu_{A \cap B}(x_1, x_2) = T(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)),$$

$$\mu_{A \cup B}(x_1, x_2) = S(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)),$$

где $T(\cdot)$ и $S(\cdot)$ – функции, называемые t -нормой и t -конормой (s -нормой).

Тогда один из способов задания t - и s -норм является:

$$t(x_1, x_2) = \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2));$$

$$s(x_1, x_2) = \max(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)).$$

Понятия t - и s -норм определены ниже следующим образом:

1) t -норма, обозначаемая как $T(\cdot)$ – коммутативная, ассоциативная бинарная функция, для которой выполняются условия: $T(x, 0) = 0$; $T(x, 1) = 1$, $\forall x \in X$. Виды t -норм $T(\cdot)$:

а) логическое произведение:

$$T(\mu_A, \mu_B) = \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2));$$

б) граничное произведение:

$$T(\mu_A, \mu_B) = \max(\mu_A(x_1) + \mu_B(x_2) - 1, 0);$$

в) алгебраическое произведение:

$$T(\mu_A, \mu_B) = \mu_A(x_1) \cdot \mu_B(x_2).$$

2) t -конорма (s -норма), обозначаемая как $S(\cdot)$ – это коммутативная ассоциативная бинарная функция, для которой выполняются условия:

$$S(x, 0) = x; S(x, 1) = 1, \forall x \in X. \text{ Виды } s\text{-норм:}$$

а) логическая сумма:

$$S(\mu_A, \mu_B) = \max(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2));$$

б) алгебраическая сумма:

$$S(\mu_A, \mu_B) = \mu_A(x_1) + \mu_B(x_2) - \mu_A(x_1) \cdot \mu_B(x_2);$$

в) граничная сумма:

$$S(\mu_A, \mu_B) = \min(\mu_A(x_1) + \mu_B(x_2), 1).$$

Таким образом при определении степени истинности высказывания $A \cup B$ может быть использована любая из функций, являющихся s -нормой (t -конормой), при вычислении степени истинности высказывания $A \cap B$ может быть использована любая функция, являющаяся t -нормой.

Импликацией нечетких высказываний A и B называется нечеткое высказывание $A \rightarrow B$ (где $\rightarrow$ знак импликации), степень истинности которого $\mu_{A \rightarrow B}(x_1, x_2)$ определяется следующим образом:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x_1, x_2) = I(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)),$$

где I – знак функции импликации.

Виды функций – импликаторов:

- 1) $(1 - \mu_A(x_1) + \mu_A(x_1) \cdot \mu_B(x_2))$;
- 2) $\max(1 - \mu_A(x_1), \mu_B(x_2))$ – импликатор Клина-Дайнела;
- 3) $\min(1 - \mu_A(x_1) + \mu_B(x_2), 1)$ – импликатор Лукасевича;
- 4) $\min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2))$ – импликатор Мандани.

Тогда для $A \rightarrow B$ в качестве примера применим импликатор Клина-Дайнела:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x_1, x_2) = \max(1 - \mu_A(x_1), \mu_B(x_2)).$$

В импликации $A \rightarrow B$ выполняется связывание элемента $x_1 \in X_1$, обладающего свойством A , с элементом $x_2 \in X_2$, обладающим свойством B . Тогда, выражение (значение) $\mu_{A \rightarrow B}(x_1, x_2)$ соответствует степени истинности свойства (отношения), связывающего $x_1 \in X_1$ с $x_2 \in X_2$.

Если x_1 и x_2 – конкретные значения (с заданными $\mu_A(x_1)$ и $\mu_B(x_2)$), то $\mu_{A \rightarrow B}(x_1, x_2) = \mu_R(x_1, x_2)$ – значение функции принадлежности отношения R , соответствующего свойству, связывающему множества X_1 и X_2 .

Пример. Если «200 – малая интенсивность трафика», то «500 – большой размер буфера».

В качестве импликатора используем импликатор Лукасевича. Степень истинности высказываний определяется значениями функций принадлежности в виде: $\mu_A(x_1) = 0,9$, $\mu_B(x_2) = 0,6$. Тогда

$$\mu_{A \rightarrow B}(x_1, x_2) = \min(1 - 0,9 + 0,6; 1) = \min(0,7; 1) = 0,7.$$

2.3. Механизмы логического вывода (с использованием понятия отношения и операции композиции)

Пусть LP_1 и LP_2 – наименования входной и выходной лингвистических переменных, A и B – значения–термы ЛП LP_1 и LP_2 (значениям A , B соответствуют нечеткие переменные p_i и p_j , то есть нечеткие множества).

Лингвистическим правилом логического вывода «Если ..., то...» называется конструкция вида:

K : Если LP_1 есть A , то LP_2 есть B ; либо в альтернативной записи:

K : Если $LP_1 = A$, то $LP_2 = B$;

В правиле K выражение « $LP_1 = A$ » - это нечеткое высказывание, называемое предпосылкой, « $LP_2 = B$ » - нечеткое высказывание называемое следствием правила. Правило K интерпретируется как нечеткое следствие (отношение, импликация), то есть в виде $A \rightarrow B$, либо в виде нечеткого отношения R между предпосылкой и следствием, то есть $R = A \rightarrow B$.

Отношение R задано на декартовом произведении универсальных множеств X_1 и X_2 , являющихся областями определения нечетких (лингвистических) параметров LP_1 и LP_2 .

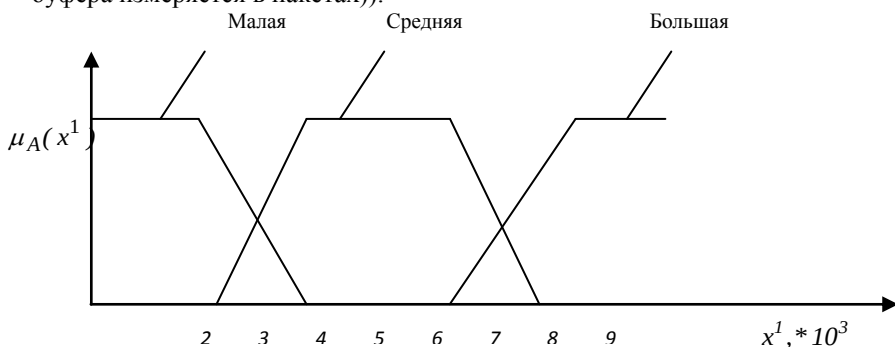
Если $A \rightarrow B$ в правиле K – это нечеткая импликация (отношение), то отношение R (значение ФП для нечеткого отношения R $\mu_{A \rightarrow B} = \mu_R$) может быть определено с использованием одной из функций импликаторов I .

Пример определения значений ФП отношения R при заданном правиле нечеткого вывода:

K : Если интенсивность трафика = малая, то размер буфера = малый.

Таким образом имеется 2 ЛП: LP_1 = «Интенсивность трафика» и LP_2 = «Размер буфера».

Лингвистические значения и их сопоставление с значениями нечетких переменных имеет следующий вид (при $X_1 = [100,1000]$ $X_2 = [300,800]$ (размер буфера измеряется в пакетах)).

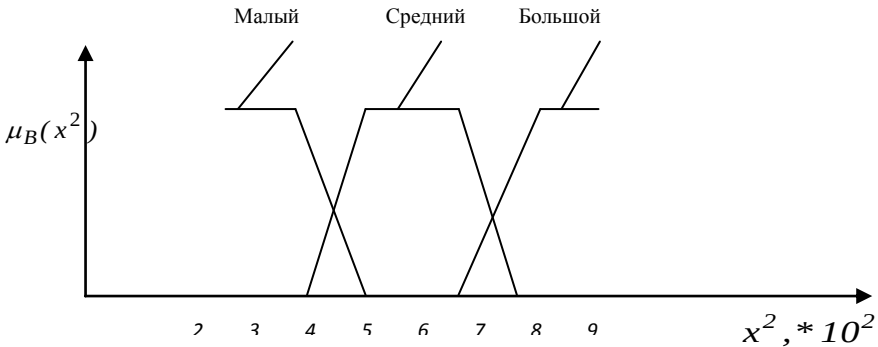


$LP_1 = \text{«Малая»} \rightarrow p_{11}$;

$LP_1 = \text{«Средняя»} \rightarrow p_{12}$;

$LP_1 = \text{«Большая»} \rightarrow p_{13}$;

p_{ii} – i -ые значения (нечетные множества) для ЛП LP_1 .



$$LP_2 = \text{«Малый»} \rightarrow p_{21};$$

$$LP_2 = \text{«Средний»} \rightarrow p_{22};$$

$$LP_3 = \text{«Большая»} \rightarrow p_{23};$$

p_{2i} – i -ые значения (НМ) для ЛП LP_2 .

$$X_1 = \{100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000\}$$

$$X_2 = \{300, 400, 500, 600, 700, 800\}$$

Нечеткая переменная p_{11} , соответствующая значению $LP_1 = \text{«Малая»}$, определяется следующим образом:

$$p_{11} = \{100/1; 200/1; 300/0,5; 400/0; 500/0; 600/0; 700/0; 800/0; 900/0; 1000/0\}$$

Нечеткая переменная P_{21} определяется в виде:

$$p_{21} = \{300/1; 400/1; 500/0; 600/0; 700/0; 800/0\}$$

Для определения $\mu_{A \rightarrow B} = \mu_R$ применим импликатор Лукасевича:

$$I = \min(1 - \mu_A(x_1) + \mu_B(x_2), 1)$$

Матрица A_R (значений ФП для отношения R) размером $[10 \times 6]$ имеет вид:

$$A_R = \begin{matrix} & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & x_2^5 & x_2^6 \\ \begin{matrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \\ x_1^4 \\ x_1^5 \\ x_1^6 \\ x_1^7 \\ x_1^8 \\ x_1^9 \\ x_1^{10} \end{matrix} & \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \end{matrix}$$

Определим способ вычисления значений выходных лингвистических переменных на примере. В случае, если заданы X_1 и X_2 , значение ЛП LP_1 в условии правила, а также отношение R , то может быть определено значение ЛП LP_2 (значение НП p_{21}) с использованием композиционного правила вывода.

В рассматриваемом случае являются заданными X_1 , X_2 , значение LP_1 и отношение R , необходимо определить значение LP_2 (при этом отношение R определено на множестве $X_1 \times X_2$). Нечеткая переменная p_{11} определена следующим образом:

$$p_{11} = \{(1/1), (2/0,6), (3/0,2), (4/0)\}.$$

Значение p_{11} (НП p_{11}) соответствует значению ЛП LP_1 = «малое число». Отношение R задано матрицей значений ФП μ_R – матрица A_R – в виде:

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Значение НП p_{21} может быть получено с использованием макси-миной ($\max \min$ – ой) композиции в виде:

$$\mu_B(x_2) = \cup [\mu_A(x_1) \cap \mu_R(x_1, x_2)] = \max(\min(\mu_A(x_1), \mu_R(x_1, x_2))) =$$

$$= [1 \quad 0,6 \quad 0,2 \quad 0] \circ \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0,6 \quad 0,5 \quad 0,2].$$

 Заключение

 LP_2 есть B'

Так как посылка 1 есть нечто иное, как отношение $R(p_i, p_j) = A \rightarrow B$, где A – значение–терм, p_i – соответствующая этому значению нечеткая переменная, то с использованием операции композиции может быть определено НМ p'_j , соответствующее лингвистическому значению B' .

Таким образом, суть решаемой задачи состоит в определении какой должны быть LP_2 , если $LP_1 = A$ и выполняется предпосылка 1. Последовательность при определении B следующая:

1) определение $R = A \rightarrow B$ с использованием какой-либо функции импликатора, например:

$$\mu_R(A, B) = \min(1 - \mu_A(x_1) + \mu_B(x_2), 1); \quad \forall x_1 \in X_1, \quad \forall x_2 \in X_2;$$

2) с использованием *maxmin*-ой композиции определение нечеткого множества (нечеткой переменной p_j):

$$\mu_{B'}(x_2) = \max(\min(\mu_{A'}(x_1), \mu_R(A, B)), \mu_{A \rightarrow B}(x_1, x_2));$$

3) в результате выполнения шага 2 будет определена НП p'_j , соответствующая значению–терму B' (то есть нечеткое множество). Для перехода от нечеткого множества (нечеткой переменной) p'_j к четкому значению необходимо выполнить этап дефазификации НМ по одному из методов.

Пример реализации операции композиции при получении значения B' (имена переменных: LP_1 – интенсивность трафика, LP_2 – размер буфера).

Схема логического вывода имеет вид:

Посылка 1	Если $LP_1 = \text{«малая»}$, то $LP_2 = \text{«малый»}$
Посылка 2	$LP_1 = \text{«очень малая»}$

Заключение (вывод)	$LP_2 = B'$
--------------------	-------------

$$X_1 = [100, 1000], \quad X_2 = [300, 800].$$

Значению–терму ЛП $LP_1 = \text{«малая»}$ соответствует нечеткая переменная P_{11} :

$$P_{11} = \{100/1, 200/1, 300/0.5, 400/0; 500/0; 600/0; 700/0; 800/0; 900/0; 1000/0\}.$$

Значение–терму ЛП $LP_2 = \text{«малый»}$ соответствует нечеткая переменная P_{21} :

$$P_{21} = \{300/1, 400/1, 500/0, 600/0; 700/0; 800/0\}.$$

Алгоритм получения значения LP_2 предусматривает выполнение следующих шагов:

1. Для определения значений элементов $\mu_{A \rightarrow B} = \mu_R$ матрицы отношения A_R использована функция–импликатор Мамдани в виде:

$$\mu_{A \rightarrow B} = \mu_R = \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)).$$

Значения элементов матрицы A_R для рассматриваемых переменных p_{11} и p_{21} получены с использованием введенного выражения.

2. Модификатор значения ЛП LP_1 «очень» соответствует операции концентрирования НМ (т.е. $[\mu_A(x^1)]^2$). Тогда НМ (НП) p_{11} , определенное на основе НП p_{11} с использованием операции концентрирования, примет следующий вид:

$$p_{11} = \{100/1, 200/1, 300/0,25, 400/0; 500/0; 600/0; 700/0; 800/0; 900/0; 100/0\}.$$

3. Значение переменной p'_{21} определено в результате операции композиции нечетких множеств (НП p_{11} и НО $R(A,B)$) следующим образом:

$$p'_{21} = (1 \quad 1 \quad 0,25 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0,25 \quad 0,25 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0);$$

Тогда исходный вид НП p_{21} и полученный вид НП p'_{21} представлены на Рис.3.3.

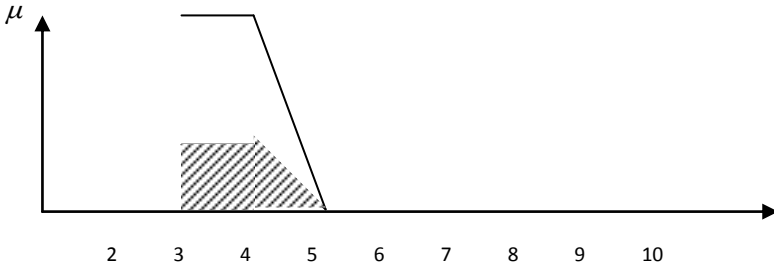


Рисунок 3.3 – Вид нечетких переменных p_{21} и p'_{21}

Определение четкого значения размера буфера для исходного множества p_{21} и модифицированного множества p'_{21} используется метод центра тяжести, т.е. вычисление x_2 и x'_2 - четких значений по формулам:

$$x_2^{четк} = \frac{\sum_{r=1}^m x_2^r \mu_B(x_2^r)}{\sum_{r=1}^m \mu_B(x_2^r)} = 350; \quad x'_2{}^{четк} = \frac{\sum_{r=1}^m x_2^r \mu_{B'}(x_2^r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{B'}(x_2^r)} = 350.$$

Таким образом, для хранения пакетов при малой интенсивности трафика достаточно 350 ячеек (каждая ячейка – один пакет), для хранения пакетов при очень малой интенсивности трафика также достаточно 350 ячеек.

Возможные варианты выражений для реализации операции композиции нечетких множеств

Для определения $\mu_B(x_2)$ использовалась *maxmin*-ая композиция в виде:

$$\mu_B(x_2) = \max(\min(\mu_{A'}(x_1), \mu_{A \rightarrow B}(x_1, x_2)),$$

где $\min(\mu_{A'}(x_1), \mu_{A \rightarrow B}(x_1, x_2))$ – это выражение для t - нормы.

Оператор t - нормы обозначен через T , тогда способ вычисления композиции НМ может быть представлен в следующем виде:

$$\mu_B(x_2) = \max(\mu_{A'}(x_1) T \mu_{A \rightarrow B}(x_1, x_2)).$$

Тогда вместо T при выполнении операции композиции может быть указан любой способ вычисления значений, предусматривающий использование выражений для t - норм (в скобках для рассматриваемого выражения используется любая из приведенных выше t - норм).

В тоже время наиболее часто используемыми выражениями для определения операции композиции являются:

- 1) (*maxmin*)-ная композиция $\max(\min(\mu_{A'}(x_1), \mu_R(x_1, x_2)))$;
- 2) (*maxprod*)-композиция $\max(\mu_{A'}(x_1) \bullet \mu_R(x_1, x_2))$, где $\bullet$ – знак произведения.

2.4. Система продукционного вывода, основанная на лингвистических правилах «ЕСЛИ...ТО...»

Нечеткой системой логического вывода, основанного на лингвистических правилах «ЕСЛИ..., ТО...» (нечеткой системой логического вывода), называется конструкция вида:

K_1 : если X есть A_1 , то Y есть B_1 ;

K_2 : если X есть A_2 , то Y есть B_2 ;

· · ·

K_m : если X есть A_m , то Y есть B_m ;

где A_i и B_i ($i = \overline{1, m}$) – соответствующие значения–термы ЛП X и Y , для которых определены нечеткие переменные p_i и p_j . Т.е. значениям– термам A_i, B_i лингвистических переменных X и Y поставлены в соответствие нечеткие множества.

Существует необходимость определения с использованием вводной системы правил K_i ($i = \overline{1, m}$) для вводимого значения A' лингвистической переменной X значения B' выходной лингвистической переменной Y . Для решения поставленной задачи могут быть применены два способа определения значения B' ЛП Y при вводимом значении A' ЛП X :

1) предварительная агрегация нечетких отношений (определение некоторого отношения R , являющегося обобщающим отношения R_i с использованием операции агрегации вида $R = \text{Agg}(R_1, R_2 \dots R_m)$; в последствии результат B' при заданном втором значении A' определяется с использованием композиционного правила ввода $B' = A' \circ R$, где $\circ$ - знак операции композиции НМ и НО; в качестве оператора агрегации $\text{Agg}(\bullet)$ может быть использована любая s - норма (t - конорма), в частности операция:

$$\max(\mu_{A \rightarrow B_i}(x_1, x_2), \mu_{A_{i+1} \rightarrow B_{i+1}}(x_1, x_2)),$$

где $A_i \rightarrow B_i$ – соответствующая операция импликации (отношения между множествами); это же выражение может быть записано следующим образом $\max(\mu_{R_i}(x_1, x_2), \mu_{R_{i+1}}(x_1, x_2))$; для операции агрегации $\text{Agg}(\bullet)$, предполагающей использование s - нормы в виде $\max(\mu_{R_i}, \mu_{R_{i+1}})$, введено обозначение:

$\text{Agg}(R_1, \dots R_m) = \bigcup_{i=1}^m R_i$, где операция объединения НО R_i в виде $\bigcup_{i=1}^m R_i$ и представляет собой определение максимума для соответствующих значений R_i - ых отношений;

2) первоначальное определение выходов для каждого i -го правила с использованием композиции $B'_i = A'_i \circ R_i$ ($i = \overline{1, m}$); после определения всех m нечетких значений B'_i выполняется их агрегация в виде:

$$B' = \text{Agg}(B'_1, B'_2, \dots, B'_m) = \bigcup_{i=1}^m (A' \circ R_i).$$

Для агрегации может быть применена s - норма, использованная в предыдущем пункте.

Пример определения значения B' по заданному значению A' при заданной системе правил логического вывода и первом способе получения логического значения (первом способе агрегации правил).

Система правил имеет вид:

K_1 : если LP_1 = малая, то LP_2 = малый;

K_2 : если LP_1 = средняя, то LP_2 = средний;

K_3 : если LP_1 = большая, то LP_2 = большой;

Значение A' определено с использованием модификаторов «не» и «очень» в виде LP_1 = "не очень большая". Необходимо определить значение размера буфера (в пакетах) – переменная LP_2 , который необходимо выделить для хранения пакетов при задаваемой в соответствии с значением A' интенсивности трафика.

Шаг №1. Определение отношений $R_i (i = \overline{1,3})$ с использованием импликации Мамдани (выбор минимума из двух значений ФП). Универсальные множества X_1 и X_2 имеют вид: $X_1 = [100, 1000]$, $X_2 = [300, 800]$. Нечеткая переменная p_{11} , определенная для лингвистического значения «Малая» лингвистической переменной LP_1 , имеет вид:

$$p_{11} = \{100/1; 200/1; 300/0,5; 400/0; 500/0; 600/0; 700/0; 800/0; 900/0; 1000/0\}.$$

Нечеткая переменная p_{21} определяемая для лингвистического значения «малый» лингвистической переменной LP_2 имеет вид:

$$p_{21} = \{300/1, 400/1, 500/0, 600/0, 700/0, 800/0\}.$$

Тогда матрица A_{R_i} значений функции принадлежности $\mu_{R_i}(x_1, x_2)$ отношения R_i примет следующий вид (используется импликация Мандини):

$$A_{R_i} = A_{A_i \rightarrow B_i} = \begin{array}{c|cccccc} & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & x_2^5 & x_2^6 \\ \hline x_1^1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^3 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Аналогичным образом выполняются действия для правила K_2 . Нечеткая переменная p_{12} соответствует значению–терму лингвистической переменной LP_1 = «средняя»:

$$p_{12} = \{100/0, 200/0, 300/0,5, 400/1, 500/1, 600/1, 700/0,5, 800/0, 900/0, 1000/0\}.$$

Нечеткая переменная p_{22} соответствует значению–терму лингвистической переменной $LP_2 = \text{«средний»}$:

$$P_{22} = \{300/0, 400/0, 500/1, 600/1, 700/0, 800/0\}.$$

Тогда матрица A_{R_2} отношения R_2 имеет вид:

$$A_{R_2} = A_{A_2 \rightarrow B_2} = \begin{array}{c|cccccc} & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & x_2^5 & x_2^6 \\ x_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^3 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ x_1^4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1^5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1^6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1^7 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ x_1^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Аналогично для правила K_3 . Нечеткая переменная p_{13} соответствует значению $LP_1 = \text{«Большая»}$. Нечеткая переменная p_{23} соответствует значению $LP_2 = \text{«Большой»}$.

$$p_{13} = \{100/0, 200/0, 300/0, 400/0, 500/0, 600/0, 700/0,5, 800/1, 900/1, 1000/1\};$$

$$p_{23} = \{300/0, 400/0, 500/0, 600/0, 700/1, 800/1\}.$$

$$A_{R_3} = A_{A_3 \rightarrow B_3} = \begin{array}{c|cccccc} & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & x_2^5 & x_2^6 \\ x_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ x_1^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}.$$

Определение значения «очень большая» $(\mu_{A_3}(x_1))^2 = \mu_{A_3}(x_1)$ – операция концентрирования:

$$p'_{13} = \{100/0, 200/0, 300/0, 400/0, 500/0, 600/0, 700/0, 25, 800/1, 900/1, 1000/1\}.$$

Определение значения «не очень большая» $(\mu_{A_3}(x_1) = 1 - \mu_{A_3}(x_1))$:

$$p'_{13} = \{100/1, 200/1, 300/1, 400/1, 500/1, 600/1, 700/0, 75, 800/0, 900/0, 1000/0\}.$$

В результате агрегации матрица обобщающего отношения имеет вид:

$$A_R = \begin{matrix} \begin{matrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_4^1 \\ x_5^1 \\ x_6^1 \\ x_7^1 \\ x_8^1 \\ x_9^1 \\ x_{10}^1 \end{matrix} & \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

Получение выходного значения B' в результате *maxmin*-ой композиции значения A' и отношения R .

$$p'_{23} = \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0,75 \ 0 \ 0 \ 0\} \circ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5\}.$$

Этап дефазификации по центру тяжести позволяет получить четкое значение размера буфера (в пакетах) по полученному НМ p'_{23} ($x_2^{uem} = 550$).

3. Программа выполнения работы

3.1. Изучить теоретические положения аппарата выполнения операций теории нечетких множеств.

3.2. Определить способ представления значений нечетких переменных p_{1k} и p_{2s} ($k = \overline{1,3}$; $s = \overline{1,3}$), соответствующих значениям лингвистических переменных LP_1 – "интенсивность входного трафика" и LP_2 – "Размер буфера для хранения пакетов", в виде треугольных чисел (при учете, что универсальные множества X_1 и X_2 заданы следующим образом : $X_1 = [100,1000]$; $X_2 = [300,800]$). Реализовать программно способ представления значений нечетких переменных p_{1k} и p_{2s} (разработать соответствующую процедуру).

3.3. Для заданного по варианту нечеткого правила (из базы правил) K_i разработать процедуру определения отношения между значениями нечетких переменных p_{1k} и p_{2s} (лингвистических переменных LP_1 и LP_2), используя заданную по варианту функцию импликации.

3.4. Для заданного по варианту модификатора исходного значения нечеткой переменной p_{1k} (соответствующей лингвистической переменной LP_1), разработать процедуру определения измененного значения этой переменной.

3.5. Используя заданный по варианту способ выполнения операции композиции, разработать процедуру определения модифицированного значения нечеткой переменной p_{2s} (соответствующей лингвистической переменной LP_2). Разработать процедуру дефагификации полученного нечеткого значения (значения нечеткой переменной p_{2s}) с использованием метода центра тяжести.

3.6. Для введенной в рассмотрение базы правил разработать процедуру определения значений функции принадлежности отношений R_i ($i = \overline{1,3}$) для каждого из правил K_i ($i = \overline{1,3}$) (использовать для того заданную по варианту функцию импликации).

3.7. Разработать процедуру, выполняющую модификацию значения нечеткой переменной p_{1k} (соответствующего задаваемому по варианту значению лингвистической переменной LP_1), в которой применен способ модификации, заданный по варианту

3.8. Реализовать процедуру агрегации полученных отношений, с использованием полученного обобщенного (агрегированного) отношения определить модифицированное значение нечеткой переменной p_{2s} (переменной LP_2). С использованием разработанной ранее процедуры выполнить дефагификацию по методу центра тяжести полученного значения нечеткой переменной p_{1k} .

3.9. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

4. Методика выполнения работы

- 4.1. В среде программирования Visual Studio создать проект, в котором реализовать все определенные в пункте 3 настоящих методических указаний процедуры.
- 4.2. Реализовать выполнение программы, продемонстрировать результаты ее выполнения.
- 4.3. Полученные результаты выполнения программы включить в отчет
- 4.4. Оформить отчет, сделать выводы.

5. Задание на работу

При реализации задания на лабораторную работу рассматриваются лингвистические переменные, соответствующие параметрам процесса передачи данных через сетевое устройство: LP_1 – "интенсивность входного трафика" и LP_2 – "Размер буфера для хранения пакетов". Множества значений лингвистических переменных LP_1 и LP_2 имеют вид:

$$NLP_1 = \{\text{малая, средняя, большая}\}, NLP_2 = \{\text{малый, средний, большой}\}.$$

Универсальные множества X_1 и X_2 определены следующим образом: $X_1 = [100, 1000]$; $X_2 = [300, 800]$. Для получения значений аргументов x_1 и x_2 дискретизация заданных интервалов выполнена с шагом 100. Аппроксимация функций принадлежности для нечетких переменных p_{1k} и p_{2s} ($k = \overline{1,3}$; $s = \overline{1,3}$) выполнена с использованием аналитических выражений, форма записи которых соответствует треугольным числам. Способ задания переменных p_{1k} и p_{2s} определяется выражениями вида:

Для p_{11} :

$$\mu_{p_{11}}(x) = \begin{cases} \frac{400-x}{400-100}, & 100 < x < 400; \\ 0, & 400 \leq x; \end{cases}$$

Для p_{12} :

$$\mu_{p_{12}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 300; \\ \frac{x-300}{600-300}, & 300 < x \leq 600; \\ \frac{800-x}{800-600}, & 600 < x < 800; \\ 0, & 800 \leq x; \end{cases}$$

Для p_{13} :

$$\mu_{p_{13}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 700; \\ \frac{x-700}{1000-700}, & 700 < x < 1000; \\ 1, & 1000 \leq x; \end{cases}$$

Для p_{21} :

$$\mu_{p_{21}}(x) = \begin{cases} \frac{500-x}{500-300}, & 300 \leq x < 500; \\ 0 & 500 \leq x; \end{cases}$$

Для p_{22} :

$$\mu_{p_{22}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 400; \\ \frac{x-400}{550-400}, & 400 < x \leq 550; \\ \frac{700-x}{700-550}, & 550 < x < 700; \\ 0, & 700 \leq x; \end{cases}$$

Для p_{23} :

$$\mu_{p_{23}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 600; \\ \frac{x-600}{800-600}, & 600 < x < 800; \\ 1, & 800 \leq x; \end{cases}$$

В лабораторной работе также используется введенная в теоретической части база правил следующего вида:

K_1 : если LP_1 = "малая", то LP_2 = "малый";

K_2 : если LP_1 = "средняя", то LP_2 = "средний";

K_3 : если LP_1 = "большая", то LP_2 = "большой".

После того, как исходные данные для задания определены, необходимо сформулировать само задание, содержание которого будет зависеть от назначенного студенту варианта. Содержание вариантов заданий следующее.

Вариант 1.

1. В соответствии с правилом K_1 базы правил необходимо определить отношение между значениями нечетких переменных p_{1k} и p_{2s} (лингвистических переменных LP_1 и LP_2), используя импликатор Клина–Дейнела. После этого, используя модификатор "очень", определить значение нечеткой переменной p_{1k} , соответствующей лингвистической переменной LP_1 , для которого с использованием *maxmin*-ой композиции вычислить значение p_{2s} (соответствующее LP_2). Для полученного нечеткого значения переменной p_{2s} выполнить операцию дефазификации (с использованием метода центра тяжести).

2. Для введенной в рассмотрение базы правил выполнить определение значений функций принадлежности отношений R_i ($i = \overline{1,3}$) с использованием импликатора Мамдани. Для значения $LP_1 = \text{"большая"}$ применить модификатор "не очень", сформировать новое значение нечеткой переменной p_{2s} (лингвистической переменной LP_1). С использованием агрегации полученных отношений определить модифицированное значение переменной p_{2s} , для которого выполнить дефазификацию по методу центра тяжести.

Вариант 2.

1. В соответствии с правилом K_2 базы правил необходимо определить отношение между значениями нечетких переменных p_{1k} и p_{2s} (лингвистических переменных LP_1 и LP_2), используя импликатор Лукасевича. После этого, используя модификатор "более менее", определить значение нечеткой переменной p_{1k} (лингвистической переменной LP_1), для которого с использованием *maxmin*-ой композиции вычислить значение p_{2s} . Для полученного нечеткого значения переменной p_{2s} (лингвистической переменной LP_2) выполнить операцию дефазификации (с использованием метода центра тяжести).

2. Для введенной в рассмотрение базы правил выполнить определение значений функций принадлежности отношений R_i ($i = \overline{1,3}$) с использованием импликатора Мамдани. Для значений $LP_1 = \text{"малая"}$ и $LP_1 = \text{"средняя"}$ применить модификатор "или", сформировать новое значение нечеткой переменной p_{1k} (лингвистической переменной LP_1). Выполнив предварительную агрегацию полученных отношений, определить модифицированное значение переменной p_{2s} (переменной LP_2), для которого выполнить дефазификацию по методу центра тяжести.

Вариант 3.

1. В соответствии с правилом K_3 базы правил необходимо определить отношение между значениями нечетких переменных p_{1k} и p_{2s} (лингвистических переменных LP_1 и LP_2), используя импликатор Мамдани. После этого, используя модификатор "не", определить значение лингвистической переменной LP_1 (нечеткой переменной p_{1k}) для которого с использованием *maxmin*-ой композиции вычислить значение p_{2s} (значение LP_2). Для полученного нечеткого значения переменной p_{2s} выполнить операцию дефазификации (с использованием метода центра тяжести).

2. Для введенной в рассмотрение базы правил выполнить определение значений функций принадлежности отношений R_i ($i = 1, 3$) с использованием импликатора Лукасевича. Для значений $LP_1 = \text{"малая"}$ и $LP_1 = \text{"средняя"}$ применить модификатор "или", сформировать новое значение нечеткой переменной p_{1k} (лингвистической переменной LP_1). Выполнив определение модифицированных значений нечеткой переменной p_{2s} на основе базы правил, реализовать агрегацию полученных результатов (обобщение результатов правил). Для полученного агрегированного значения переменной p_{2s} реализовать операцию дефазификацию по методу центра тяжести. Сравнить результаты пунктов 1 и 2.

6. Контрольные вопросы

- 6.1. Что означает понятие нечеткого множества, как оно интерпретируется для элементов универсального множества X .
- 6.2. Что представляют из себя простые правила нечеткого продукционного вывода.
- 6.3. Какие могут быть применены выражения для аналитического задания функций принадлежности.
- 6.4. Какие применяются выражения для реализации операции импликации для нечетких множеств.
- 6.5. Какие виды выражений используются для реализации операции композиции нечетких множеств.
- 6.6. Что означает модификация значений-термов лингвистических переменных, каковы способы выполнения этой модификации и способы вычисления модифицированных значений нечетких переменных для полученных новых значений-термов.
- 6.7. Какие могут быть применены способы агрегации при вычислении значений функций принадлежности результирующих значений нечетких переменных для совокупности продукционных правил.

Лабораторная работа №4

Исследование способов построения систем нечеткого управления и алгоритмов их функционирования

1. Цель работы: исследовать способы построения систем нечеткой обработки данных, построенные на основе составных продукционных правил, при управлении процессами.

2. Теоретическое введение

2.1. Применение нечётких множеств и составных нечётких продукционных правил в задачах управления системами

Модели статических и динамических систем, построение, использование и анализ которых базируется на положениях теории нечётких множеств и нечёткой логики, называют *нечёткими моделями*. Нечёткие продукционные модели являются наиболее общим видом нечётких моделей, используемых для описания, анализа и моделирования сложных слабо формализуемых систем и процессов.

Системы нечеткого управления – это системы, основанные на правилах логического вывода. Правила, называемые нечеткими правилами, определяют механизм управления процессом функционирования системы. На рисунке 1 изображена схема организации системы управления на нечеткой логике, который включает в себя четыре основных компонента: интерфейс фаззификации (введения нечеткости для используемых при управлении параметров), база знаний, содержащая продукционные правила (составные продукционные правила), механизм логического вывода и интерфейс дефаззификации (восстановления четкости— определения четких значений для управляемых параметров). Приведенная на Рис. 1 функциональная схема системы нечеткой обработки данных при реализации управления динамическими процессами, реализуется в составе контроллера управления на нечеткой логике.



Рисунок 1 –Функциональная схема системы нечеткого управления

Результат вычислений контроллера на нечеткой логике согласно рисунку 1 используется для настройки параметров системы (управления системой) в соответствии с некоторой встроенной программой, действия которой основаны на анализе ее состояния (анализе значений входных параметров). Данный механизм управления является адаптивным. Создание контроллера нечеткого управления обеспечивает замену опытного оператора нечеткой системой, основанной на продукционных правилах нечеткой логики.

Под *нечёткой продукционной моделью* понимается согласованное множество отдельных нечётких продукционных правил вида:

ЕСЛИ $x=A$ И $y=B$, ТО $z=C$;

(где $x=A$, $y=B$ и $z=C$ – предпосылки и заключение данного правила в виде нечётких высказываний, x , y и z – лингвистические переменные, A , B и C – соответствующие значения этих лингвистических переменных). Данные модели предназначены для определения степени истинности заключений нечётких продукционных правил на основе предпосылок с известной степенью истинности исходных правил. Результатом работы с продукционными моделями (нечёткими правилами) являются конкретные числовые значения управляющих воздействий.

Для построения системы нечеткого управления необходимо определить способы формирования составляющих ее компонент:

- процедуру введения нечёткости (фаззификация);
- базу нечётких продукционных правил;
- способ (схему) нечёткого вывода заключений;
- процедуру агрегирования степени истинности предпосылок по каждому из нечётких продукционных правил;
- процедуру активизации заключений каждого из нечётких продукционных правил (формирования нечеткого значения выходной переменной по каждому из нечетких правил);
- процедуру аккумулялирования активизированных заключений всех нечётких продукционных правил для каждой выходной переменной;
- процедуру приведения к чёткости для каждой аккумулялированной выходной переменной (дефаззификация);

2.2. Процедура фаззификации входных параметров системы (введение нечёткости для анализируемых системой параметров управляемых процессов)

При введении нечёткости в модель, использующую составные нечёткие продукционные правила, предполагается:

1) определение параметров, используемых при построении нечетких продукционных моделей управления процессами (параметров, которые являются входными в модель, значения которых анализируются, и параметров, являющихся выходными для модели (управляемых параметров), значения которых формируются), каждый из определенных таким образом параметров является лингвистической переменной, которой присваивается соответствующее имя;

2) для каждого из параметров (лингвистических переменных) определяются их значения–термы (т.е. для каждой лингвистической переменной формируется ее множество лингвистических значений–термов), эти значения–термы используются в составных правилах нечеткого вывода;

3) каждому значению лингвистической переменной, соответствующей входному либо выходному параметру системы, ставится в соответствие нечеткое множество A_{ij} (i -е значение j -й лингвистической переменной x_j)– значение нечеткой переменной, которое используется при реализации процедуры нечеткого вывода для построения результирующего нечеткого значения соответствующего выходного параметра (для построения заключения на основе совокупности составных продукционных правил нечеткого вывода).

Таким образом, под процедурой фазификации параметров управляемого процесса (входных и выходных параметров управляемого процесса) понимается процедура сопоставления нечётких множеств A_{ij} (значений нечетких переменных) значениям-термам лингвистических переменных, соответствующих входным и выходным параметрам x_j , для всех предпосылок и заключений всех нечётких продукционных правил.

Этап фазификации заключается в разбиении интервалов значений входных и выходных переменных на пересекающиеся подинтервалы и сопоставление с этими подинтервалами нечетких множеств (соответствующих функций принадлежности, задаваемыми (L-R)-числами). Полученные значения (L-R)-чисел (нечеткие значения) соответствуют значениям лингвистических переменных. Пусть известны минимальные и максимальные значения каждой переменной:

$$x_1 \in [x_1^{(\min)}, x_1^{(\max)}], x_2 \in [x_2^{(\min)}, x_2^{(\max)}], x_3 \in [x_3^{(\min)}, x_3^{(\max)}], \\ y \in [y^{(\min)}, y^{(\max)}].$$

Выполним разбиение областей определений этих переменных на пересекающиеся подинтервалы. Причём число этих подинтервалов, а так же длина для каждой переменной подбираются индивидуально. На рисунке 2 показан пример такого разбиения при условии, что число подинтервалов для $x_1 \in [x_1^{(\min)}, x_1^{(\max)}]$, $x_2 \in [x_2^{(\min)}, x_2^{(\max)}]$, $x_3 \in [x_3^{(\min)}, x_3^{(\max)}]$ и $y \in [y^{(\min)}, y^{(\max)}]$ равно трём. (таким образом, для каждого из параметров (управляющих и управляемого) должно быть задано по три значения соответствующих им лингвистических переменных). Для каждого подинтервала значений параметров (значения–терма лингвистической переменной) задана функция принадлежности, например треугольной формы с вершиной в его (отрезка) центре.

Для входных параметров x_1 , x_2 и выходного параметра y определены соответствующие лингвистические переменные и терм множества их значений (низкое-Low, среднее-Middle, высокое-Hight), функция принадлежности соответствующих нечетких множеств подбирается таким образом, чтобы она перекрывалась на уровне от 0,1 до 0,5. Следует отметить, что как вид функции принадлежности, так и способ разбиения пространств входных и выходных переменных могут быть иными.

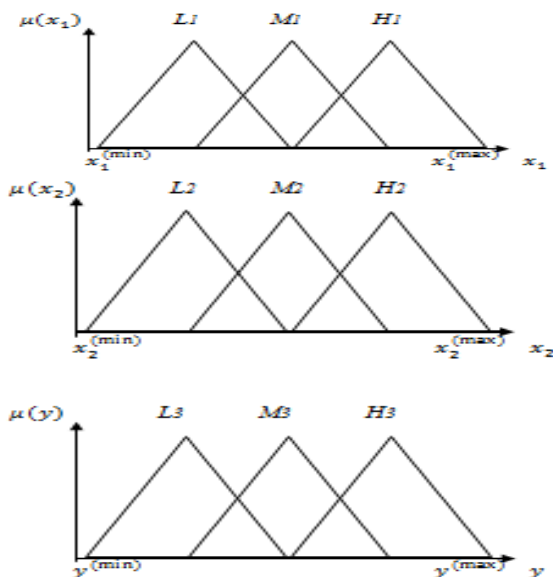


Рисунок 2 – Пример разделения пространств входных параметров x_1 , x_2 и выходной переменной y .

Для задания форм треугольных (L-R)-чисел (видов функций принадлежности нечетких множеств), соответствующих лингвистическим значениям, используются следующие выражения:

- для треугольной формы:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b; \\ \frac{c-x}{c-b}, & b < x < c; \\ 0, & c \leq x; \end{cases}$$

где a – левая граница подинтервала значений переменной x , b – середина подинтервала, c – правая граница подинтервала значений переменной x ;

- для трапецевидной формы:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 1, & b < x \leq c \\ \frac{c-x}{c-b}, & c < x < d; \\ 0, & d \leq x; \end{cases}$$

где a – левая граница рассматриваемого подинтервала, b – значение аргумента x , для которого функция принадлежности принимает единично значение, c – значение аргумента x – правая граница подинтервала, в котором функция принадлежности имеет единичное значение, d – правая граница всего подинтервала.

В рассматриваемых в лабораторных работах случаях используется треугольная, трапецевидная и колоколообразная формы представления нечетких значений, соответствующих значениям-термам лингвистических переменных.

2.3. Формирование базы составных нечётких продукционных правил

При формировании простых нечётких высказываний в предпосылках и заключениях нечётких продукционных правил должны быть заданы значения соответствующих лингвистических переменных.

При построении базы нечетких правил используется подход, предполагающий генерацию множества правил, исходя из возможных сочетаний нечётких высказываний в предпосылках и заключениях правил, в соответствии с которым максимальное их (правил) количество в базе определяется соотношением:

$$n = l_1 \times l_2 \dots l_m \times l_y,$$

где $l_1, l_2, \dots, l_m$ – число значений лингвистических переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$; l_y – количество значений выходной лингвистической переменной y . В этом случае

Общий вид правил:

Π_1 : ЕСЛИ x_1 есть A_{11} И x_2 есть A_{12} ТО y есть B_1 ;

Π_2 : ЕСЛИ x_1 есть A_{21} И x_2 есть A_{22} ТО y есть B_2 ;

...

Π_n : ЕСЛИ x_1 есть A_{n1} И x_2 есть A_{n2} ТО y есть B_y ;

Например, для двух входных лингвистических переменных (y каждой из них по три значения) и для одной выходной лингвистической переменной (y которой также три значения) число правил в базе правил равно 18, а сама база правил имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 P_1: & \text{ЕСЛИ } x_1 \text{ есть L И } x_2 \text{ есть L ТО } y \text{ есть L;} \\
 P_2: & \text{ЕСЛИ } x_1 \text{ есть L И } x_2 \text{ есть M ТО } y \text{ есть L;} \\
 & \dots \\
 P_{18}: & \text{ЕСЛИ } x_1 \text{ есть N И } x_2 \text{ есть N ТО } y \text{ есть N;}
 \end{aligned}$$

Другой подход к формированию начальной базы правил основан на анализе статистических данных по реализации управляемого процесса. В этом случае каждому примеру из выборки ставится в соответствие отдельное правило. Для этого для каждого примера (x_1, x_2, y_k) , $k = 1, \dots, K$, определяются степени принадлежности заданных значений переменных к соответствующим нечётким множествам (см. рис. 2). После этого каждому примеру ставятся в соответствие те нечёткие множества, степени принадлежности к которым у соответствующих значений переменных из этого примера являются максимальными. В рассмотренном выше примере x_1 ставится в соответствие нечёткое множество M_1 , x_2 – M_2 , y – L_y .

Таким образом, примеру $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ из обучающей выборки ставится в соответствие следующее правило:

$$\text{ЕСЛИ } x_1 \text{ есть } M_1 \text{ И } \dots \text{ И } x_n \text{ есть } M_n, \text{ ТО } y \text{ есть } M_y.$$

Сформированное множество правил составляет начальную базу нечётких правил. Следует отметить, что использование первого подхода при формировании начальной базы правил целесообразно при небольшом числе переменных и функций принадлежности, используемых для задания этих переменных. Вторым подходом необходимо использовать при сравнительно небольшом количестве примеров.

Как в предпосылках, так и в заключениях нечётких продукционных правил составные нечёткие высказывания образуются из простых, для комбинирования которых используются нечёткие логические операции конъюнкции «И» и дизъюнкции «ИЛИ».

При определении агрегированной степени истинности по всем предпосылкам каждого правила с использованием связок «И» и «ИЛИ» используют операции $\min$ -конъюнкции и $\max$ -дизъюнкции. *Конъюнктивная форма предпосылки* (с использованием только нечётких логических операций «И») является наиболее общим видом предпосылки.

Вид правил, в которых в качестве связки между предпосылками использована $\min$ -конъюнкция «И»:

$$\begin{aligned}
 P_1: & \text{ЕСЛИ } x_1 \text{ есть } A_{11} \text{ И } x_2 \text{ есть } A_{12} \text{ ТО } y \text{ есть } B_1; \\
 P_2: & \text{ЕСЛИ } x_1 \text{ есть } A_{21} \text{ И } x_2 \text{ есть } A_{22} \text{ ТО } y \text{ есть } B_2; \\
 & \dots \\
 P_n: & \text{ЕСЛИ } x_1 \text{ есть } A_{n1} \text{ И } x_2 \text{ есть } A_{n2} \text{ ТО } y \text{ есть } B_n;
 \end{aligned}$$

Если в качестве связки между предпосылками в составных правилах используется операция «ИЛИ» (операция max-дизъюнкции для связывания предпосылок), то вид правил следующий:

P_1 : ЕСЛИ x_1 есть A_{11} ИЛИ x_2 есть A_{12} ТО y есть B_1 ;

P_2 : ЕСЛИ x_1 есть A_{21} ИЛИ x_2 есть A_{22} ТО y есть B_2 ;

P_n : ЕСЛИ x_1 есть A_{n1} ИЛИ x_2 есть A_{n2} ТО y есть B_n ;

Полученный начальный вид базы нечетких правил может быть оптимизирован. Для этого необходимо оценить и обеспечить полноту использования нечетких правил для управления процессом, непротиворечивость нечетких правил, по возможности, устранить корреляции между отдельными нечёткими правилами в базе. В рамках лабораторной работы вопросы оптимизации базы нечетких правил не рассматриваются.

2.4. Процедура дефаззификации (приведение к чёткости)

Процедура заключается в преобразовании нечётких значений найденных выходных переменных в чёткие. При этом все методы получения чёткого значения выходной переменной можно разделить по две группы:

- методы дефаззификации аккумулязированной на предыдущем этапе (из активизированных заключений всех правил базы) выходной переменной;
- методы дефаззификации выходной переменной без предварительного аккумуляирования активизированных заключений отдельных правил.

Для первого из рассмотренных методов способом реализации дефаззификации является метод «центра тяжести». Метод «центра тяжести» может быть использован для моделей, основанных на нечётких лингвистических продукционных правилах, в которых следствия являются нечёткими высказываниями. Чёткое значение y' выходной переменной рассчитывается как центр тяжести функции принадлежности $\mu_{B'}(y_r)$ и вычисляется по формуле:

$$y_{четк} = \frac{\sum_{r=1}^m y_r \mu_{B'}(y_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{B'}(y_r)};$$

где $r=1$ – индекс, соответствующий левой границе интервала изменения выходного параметра y , $r=m$ – соответствующий правой границе интервала изменения выходной переменной.

2.5. Механизмы нечёткого вывода

Совокупность отдельных реализаций описанных выше компонентов нечёткой продукционной модели определяет механизм нечёткого вывода. Далее рассматриваются методы нечеткого вывода Мамдани и Ларсена. Рассмотрим реализацию нечёткого вывода на основе алгоритма Мамдани для базы составных продукционных правил следующего вида:

$$\begin{aligned} \Pi_1: & \text{ЕСЛИ } x_1 \text{ есть } A_{11} \text{ И } x_2 \text{ есть } A_{12} \text{ ТО } y=B_1; \\ \Pi_2: & \text{ЕСЛИ } x_1 \text{ есть } A_{21} \text{ И } x_2 \text{ есть } A_{22} \text{ ТО } y=B_2; \end{aligned}$$

где x_1 и x_2 — имена входных лингвистических переменных (соответствующих входным параметрам), y — имя выходной лингвистической переменной (при дефазификации будет получено четкое значение соответствующего выходного параметра), A_{11} , A_{21} , A_{12} , A_{22} , B_1 , B_2 — заданные значения-термы лингвистических переменных (им соответствуют значения нечетких переменных — нечеткие множества с заданными функциями принадлежности). Для реализации принятия решения на основе приведенной базы правил задаваемыми являются четкие значения входных параметров x_{10} и x_{20} , необходимо определить четкое значение y_0 выходного параметра y .

Нечеткий логический вывод включает следующие этапы:

1. **Введение нечеткости**– находятся степени истинности для предпосылок каждого правила:) $A_{11}(x_{10})$, $A_{21}(x_{10})$, $A_{12}(x_{20})$, $A_{22}(x_{20})$;
2. **Логический вывод**– находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого из правил (с использованием операции $\min$):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mu_{A_{11}}(x_{10}) \cap \mu_{A_{12}}(x_{20}); \\ \alpha_2 &= \mu_{A_{21}}(x_{10}) \cap \mu_{A_{22}}(x_{20}); \end{aligned}$$

где через $\cap$ обозначена операция логического $\min$; реализация приведенных действий соответствуют операции агрегации степени истинности предпосылок правил, в результате данной процедуры определяются агрегированная степень истинности по всем предпосылкам каждого правила α_i (при $i=\overline{1,2}$, где i – число правил в их базе). Затем в ходе логического вывода определяются «усеченные» функции принадлежности для выходного параметра y :

$$\begin{aligned} B'_1 &= (\alpha_1 \cap \mu_{B_1}(y)) = \min(\alpha_1, \mu_{B_1}(y)); \\ B'_2 &= (\alpha_2 \cap \mu_{B_2}(y)) = \min(\alpha_2, \mu_{B_2}(y)). \end{aligned}$$

В результате будут получены виды функций принадлежности выходных значений для каждого из правил. Реализация приведенных действий соответствует операции активизации заключений правил.

3. **Композиция.** Производится объединение найденных «усеченных» функций с использованием операции *max* (обозначенная далее как $\cup$), что приводит к получению итогового нечеткого подмножества для переменной выхода. Определение функции принадлежности выполняется в соответствии со следующим выражением:

$$\mu_{B'}(y) = B'_1(y) \cup B'_2(y) = (\alpha_1 \cap \mu_{B_1}(y)) \cup (\alpha_2 \cap \mu_{B_2}(y)).$$

4. **Приведение к четкости.** Проводится для нахождения четкого значения y_0 , например, методом центра тяжести.

На рисунке 3 приведена графическая реализация выполнения алгоритма нечеткого вывода Мамдани:

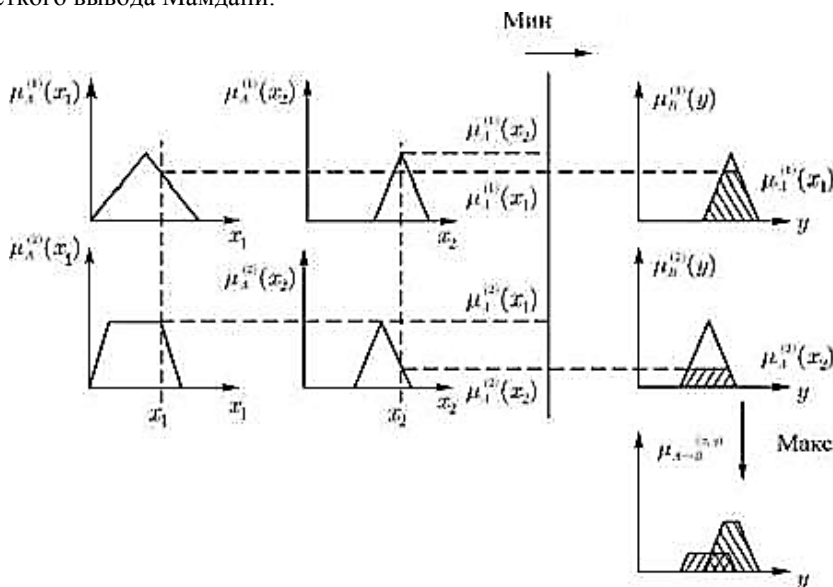


Рисунок 3 – Реализация алгоритма нечеткого вывода Мамдани.

Для метода нечеткого вывода Ларсена характерна выполнение тех же самых этапов построения решения, что и для метода Мамдани, за исключением выполнения операции активизации заключений каждого из нечетких

продукционных правил. Если в методе Мамдани используется *min*-активизация, то в методе Ларсена использована *prod*-активизация (активизация выполнением операции произведения). Таким образом, для двух правил нечеткого вывода выполнение операций активизации заключений может быть представлено в виде следующих выражений:

$$B'_1 = (\alpha_1 \cdot \mu_{B_1}(y));$$

$$B'_2 = (\alpha_2 \cdot \mu_{B_2}(y)).$$

Последующая композиция и деафизикация выполняются аналогично методу Мамдани.

2.6. Применение нечётких систем для управления сетевыми устройствами

Система управления на нечёткой логике может быть применена к сетевым устройствам. В зависимости от типов задач они могут формулироваться следующим образом.

Задача 1. Рассматривается система обработки данных (заявок) с параллельно работающими приборами (серверами). В систему поступают заявки с двух портов. В зависимости от интенсивностей входных потоков заявок на обслуживание с каждого из портов нечеткий контроллер определяет количество серверов, которое должно быть использовано для обеспечения требуемой скорости (требуемого качества) передачи. В соответствии с этим должны быть задействованы один, два, три и т.д. сервера.

Для примера рассмотрим систему состоящую из трех-серверов (общая производительность системы при всех трех работающих серверах равна 1.0). В случае низкой интенсивности поступления заявок по каждому из портов используется один сервер. В этом случае использование производительности системы составляет от 0 до 0.33. При увеличении интенсивностей поступления заявок на каждый из портов системой подключается второй сервер и использование ее производительности составит от 0.33 до 0.66. При максимальных интенсивностях поступления заявок по каждому порту будут задействованы все три сервера и использование производительности системы составит от 0.66 до 1.0.

Таким образом, нечеткий контроллер анализирует значения интенсивностей потоков заявок α_i ($i = 1, 2$) и формирует значение интенсивности обслуживания этих заявок приборами μ . В зависимости от полученного значения μ в работу по обслуживанию заявок включается один, два либо три сервера. В этом случае поступающие заявки распределяются между очередями соответствующих серверов.

Функциональная схема системы обработки заявок с нечетким управлением ее производительностью изображена на рисунке 4.

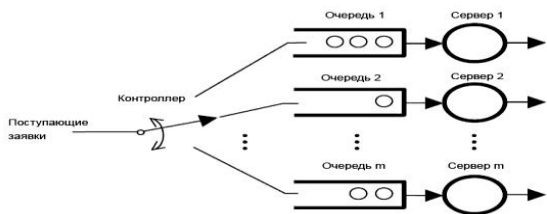


Рисунок 4– Функциональная схема многоканальной системы обслуживания заявок на нечетком управлении

Значение интенсивности поступления заявок на обслуживание также определяется как доля от максимально возможного значения. Если технология передачи данных поддерживает на порту скорость поступления сообщений (обслуживаемых заявок) в 100 мбит/с, что составляет 1.0 от максимально возможной скорости поступления, то реальная скорость поступления заявок на порт определяется как доля от этой максимально возможной. Например, при зафиксированной скорости поступления заявок в 10 мбит/с интенсивность поступления заявок составляет 0.1 от максимально возможной. Аналогичным образом определяется значение интенсивности обслуживания заявок как доля от максимально возможной интенсивности. В соответствии с формулировкой задачи должны быть определены три лингвистические переменные: интенсивность потока заявок на порту 1 – α_1 , интенсивность потока заявок на порту 2– α_2 , интенсивность обслуживания– μ . Для всех трех лингвистических переменных заданы одинаковые множества их значений-термов. Значения этих лингвистических переменных следующие: Малая, Средняя, Большая. Для этих термов лингвистических переменных определены интервалы значений соответствующих переменных α_1 , α_2 , μ : Малая– $\{a_{1j}, b_{1j}\}=(0;0.4)$; Средняя– $\{a_{2j}, b_{2j}\}=(0.2;0.7)$; Большая= $\{a_{3j}, b_{3j}\}=(0.5;1,0)$, где j –индекс соответствующей переменной. При данных значениях входных параметров база правил примет следующий вид:

$\alpha 1$	$\alpha 2$	μ
малая	малая	Малая
средняя	малая	Малая
большая	малая	Средняя
малая	высокая	Средняя
средняя	высокая	Средняя
высокая	высокая	Высокая
малая	средняя	Средняя
средняя	средняя	Средняя
высокая	средняя	средняя

В графическом виде условия задачи представлены на рисунке 5.

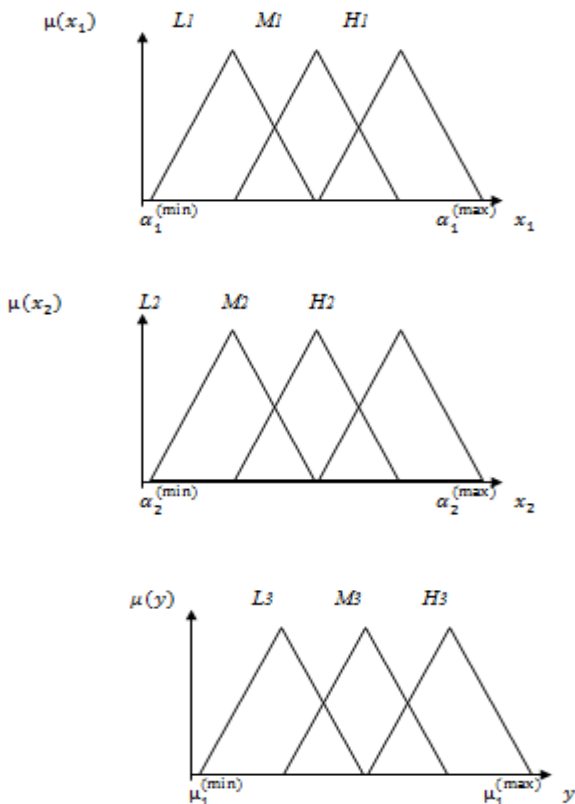


Рисунок 5 – Графическое представление нечетких переменных для соответствующих значений термов лингвистических переменных

Задача 2. Постановка задачи связана с определением размера буфера Q на обрабатывающем устройстве, предназначенного для накопления обрабатываемых заявок, в зависимости от интенсивности потока их поступления α и интенсивности μ их обслуживания на сервере. В силу того, что размер массивов данных, обрабатываемых на сервере, могут быть различными, различными является также и интенсивности обработки заявок. В этом случае данная задача является задачей управления обслуживанием заявок с динамическим буфером.

В соответствии с приведенной постановкой задачи в рассмотрение должны быть введены три лингвистические переменные: 1) интенсивность потока заявок, 2) интенсивность обслуживания, 3) размер буфера для хранения заявок. Для первой и второй переменных их значения-термы следующие: Низкая, Средняя, Высокая. Для интенсивностей поступления и обслуживания заявок интервалы значений

переменных α и μ определены аналогично задаче 1: Низкая— $\{a_{1j}, b_{1j}\}=(0;0.4)$; Средняя— $\{a_{2j}, b_{2j}\}=(0.2;0.7)$; Высокая— $\{a_{3j}, b_{3j}\}=(0.5;1.0)$, где j —индекс соответствующей переменной. ($j = \overline{1,2}$). Для третьей лингвистической переменной (размер буфера для хранения заявок) значения определены следующим образом: Малый, Средний, Большой. Максимально возможный размер буфера, который выделяется для хранения заявок составляет 10000 байт. Тогда вид интервалов, соответствующих значениям-термам лингвистических переменных имеют вид: Малый— $\{a_{13}, b_{13}\}=(0;400)$, Средний— $\{a_{23}, b_{23}\}=(200;700)$, Большой— $\{a_{33}, b_{33}\}=(500;1000)$. База правил при управлении размером буфера имеет следующий вид:

α	μ	$Q(\alpha, \mu)$
низкая	низкая	Малый
средняя	низкая	Средняя
высокая	низкая	Большой
низкая	средняя	Средний
средняя	средняя	Средний
высокая	средняя	Большой
низкая	высокая	Малый
средняя	высокая	Малый
высокая	высокая	Средний

Задача 3. Определение необходимой скорости обработки заявок при учете интенсивности поступления заявок на вход сервера (обслуживающего прибора) и количества заявок, находящихся в буфере хранения заявок (при учете ограничений на размер буфера и реализации требования об обслуживании всех заявок, т.е. пришедшие заявки не могут быть отклонены). В случае, если заявка не может быть обслужена, она размещается в буфере, но при высокой интенсивности входящего потока заявок ограниченный объем буфера может быть переполнен и заявке отказано в обслуживании потока, что является нарушением введенного требования. Поэтому при росте интенсивности входного потока заявок и заполнении буфера должна также изменяться (увеличиваться) интенсивность обслуживания заявок μ . Тогда в рассмотрение должны быть введены лингвистические переменные: интенсивность входного потока заявок, размер буфера, интенсивность обслуживания заявок. Для переменной «интенсивность входного потока заявок» заданы следующие значения-термы и соответствующие им интервалы значений переменной α : Низкая— $\{a_{11}, b_{11}\}=(0;0.4)$; Средняя— $\{a_{21}, b_{21}\}=(0.2;0.7)$; Высокая— $\{a_{31}, b_{31}\}=(0.5;1.0)$. Для переменной «объем буфера» введены значения-термы и соответствующие им интервалы: Малый— $\{a_{12}, b_{12}\}=(0;400)$, Средний— $\{a_{22}, b_{22}\}=(200;700)$, Большой— $\{a_{32}, b_{32}\}=(500;1000)$. Для переменной «интенсивность обслуживания заявок» заданы следующие значения-термы и соответствующие им

интервалы значений переменной α : Низкая— $\{a_{13}, b_{13}\}=(0;0.4)$; Средняя— $\{a_{23}, b_{23}\}=(0.2;0.7)$; Высокая— $\{a_{33}, b_{33}\}=(0.5;1,0)$. Вид базы правил следующий:

α	Q	μ
низкая	малый	Низкая
средняя	малый	Низкая
высокая	Малый	Средняя
низкая	Большой	Средняя
средняя	Большой	Высокая
высокая	Большой	высокая
низкая	Средний	средняя
средняя	Средний	средняя
средняя	средний	средняя

3. Программа выполнения работы

3.1. Изучить теоретические положения аппарата теории нечетких множеств и построения систем нечеткого вывода.

3.2. Определить способ представления значений нечетких переменных p_{1k} , p_{2s} и p_{3l} ($k = \overline{1,3}$; $s = \overline{1,3}$; $l = \overline{1,3}$), соответствующих значениям лингвистических переменных LP_1 , LP_2 и LP_3 , в соответствии с вариантом (при учете заданного вида универсальных множеств). Реализовать программно способ представления значений нечетких переменных p_{1k} , p_{2s} и p_{3l} (разработать соответствующую процедуру).

3.3. Для заданного по варианту метода нечеткого вывода и соответствующей базы нечетких правил реализовать процедуру, выполняющую операцию агрегации степени истинности предпосылок правил. в результате данной процедуры определяются агрегированная степень истинности по всем предпосылкам каждого правила.

3.4. Для заданного по варианту метода нечеткого вывода реализовать процедуру активизации заключений правил;

3.5. Выполнить разработку процедуры дефазификации полученных нечетких значений выходных параметров.

3.6. Выполнить определение управляющих воздействий для задаваемых преподавателем исходных данных.

3.7. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

4. Методика выполнения работы

4.1. В среде программирования Visual Studio создать проект, в котором реализовать все определенные в пункте 3 настоящих методических указаний процедуры.

4.2. Реализовать выполнение программы, продемонстрировать результаты ее выполнения.

4.3. Полученные результаты выполнения программы включить в отчет

4.4. Оформить отчет, сделать выводы.

5. Варианты заданий

По последней цифре зачётной книжки (по списку журнала старосты) необходимо выбрать входные данные из таблицы 1.

<i>№</i>	<i>Тип задачи</i>	<i>Кол-во лингв. значений входных параметров</i>	<i>(L-R)-функция</i>	<i>Тип оптимизации</i>
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	1	3	Треугольн.	М
1	2	3	Треугольн.	L
2	3	3	Трапеция	М
3	1	3	Треугольн.	L
4	2	3	Трапеция	М
5	3	3	Трапеция	L
6	1	3	Треугольн.	М
7	2	3	Треугольн.	L
8	3	3	Трапеция	М
9	1	3	Треугольн.	L

В таблице вариантов М –метод Мамдани при реализации нечеткого вывода, L– метод Ларсена при реализации нечеткого вывода.

6. Контрольные вопросы

6.1. Что означает операция агрегирования нечетких правил и как она реализуется.

6.2. Что означает операция активизации заключений правил и как она реализуется.

6.3. В чем состоит отличие метода нечеткого вывода Мамдани от метода нечеткого вывода Ларсена.

6.4. Каким образом выполняется построение составных продукционных правил логического вывода.

6.5. В чем смысл выполнения дефазификации полученных нечетких выходных значений и как она выполняется.

6.6. Каковы возможные применения систем нечеткого логического вывода при управлении сетевыми устройствами.

7. Каким образом реализуется формирование базы нечетких правил?

8. Каким образом реализуется фазификация исходных параметров?

9. В каком виде формализуются процедуры нечеткого вывода Мамдани и Ларсена?

Лабораторная работа №5

Исследование методов принятия решений при нечетком отношении предпочтения на множестве альтернатив

1. Цель работы: исследовать способы построения систем принятия решений на основе нечеткого отношения предпочтения на множестве альтернатив.

2. Теоретическое введение

Обозначим: X – множество возможных альтернатив (решений). Если $x_i \succ x_j$ вид отношения предпочтения, связывающего два решения x_i и x_j , то $\succ$ – четкое отношение предпочтения, то есть решение x_i является более предпочтительным, чем решение x_j (строго предпочтительным).

Для решений x_i и x_j может быть определено нечеткое отношение предпочтения, определяющее степень предпочтения решения x_i по сравнению с решением x_j . Таким образом принятие решений в условиях неопределённости (при использовании нечетких множеств) основывается на:

- 1) нечетком описании множества альтернатив (решений);
- 2) нечетком определении отношения предпочтения (на описании нечеткого отношения предпочтения).

Если X – универсально множество (множество альтернатив); x_i – некоторая текущая рассматриваемая альтернатива, тогда X – множество всех возможных решений рассматриваемой задачи, а $C \subset X$ – множество допустимых альтернатив, обеспечивающих рациональное решение поставленной задачи.

Тогда для каждого $x_i \in X$ может быть определено значение функции принадлежности $\mu_c(x_i) \in [0,1]$, которое определяет степень допустимости выбора альтернативы x_i в качестве рационального решения рассматриваемой задачи.

Обозначим через X^D – подмножество альтернатив, рациональных с точки зрения решаемой задачи, тогда $X^D = \{x \mid x \in X, \mu_c(x) = \sup_{x \in X} (\mu_c(x))\}$, где $\mu_c(x)$ – непрерывная функция, $\sup$ – верхний экстремум непрерывной функции $\mu_c(x)$. В случае, если $\mu_c(x_i)$ – дискретная функция для соответствующих решений $x_i \in X$, тогда множество X^D будет определено следующим образом:

$$X^D = \{x_i \mid x_i \in X, \mu_c(x_i) = \max_{x \in X} (\mu_c(x_i))\}.$$

Если $\mu_c(x_i)$ – степень (мера) соответствия решений $x_i \in X$ требованиям задачи, то может быть сформировано отношение предпочтения $x_i R x_j$.

Понятие и свойство четкого отношения нестрогого предпочтения

Обозначим R – подмножество, определенное на множестве $X \times X$ (подмножество множества пар $(x_i, x_j) \in X \times X$). Таким образом R – некоторая операция сравнения альтернатив (решений) x_i и x_j между собой. Обозначим через R прямое, а через R^{-1} – обратное отношения нестрогого предпочтения. Если R – прямое отношение предпочтения ($\succeq$), то при сравнении двух альтернатив « x_i не хуже x_j » имеем $x_i R x_j$ ($x_i \succeq x_j$). Тогда обратное отношение R^{-1} может быть проинтерпретировано следующим образом: « x_j не лучше x_i », т.е. эквивалентно, либо заведомо хуже (тогда $x_j R^{-1} x_i$).

Через R^S обозначим отношение строгого предпочтения, через R^I – отношение безразличия (несравнимости, эквивалентности). Альтернатива x_i доминирует альтернативу x_j (является строго лучше x_j), если выполняется условие $x_i \succ x_j$. Альтернативы x_i и x_j связаны отношением строгого предпочтения (т.е. $x_i R^S x_j$). Тогда R^S – это множество пар, в которых элемент x_i (альтернатива x_i) строго предпочтительнее альтернативы x_j . Отношение безразличия R^I определяется следующим образом. Альтернатива x_i и x_j находятся в отношении безразличия ($(x_i R^I x_j)$ либо $(x_i, x_j) \in R^I$), если не выполняется ни предпочтение $x_i \succ x_j$, ни предпочтение $x_j \succ x_i$ (т.е. $x_i \bar{\succ} x_j$ и $x_j \bar{\succ} x_i$).

Для четких отношений $R(R^S, R^I)$ при $(x_i R x_j)$ степень предпочтения альтернативы x_i над альтернативой x_j равна 1. Если R – нечеткое отношение предпочтения, то должна быть определена степень предпочтения альтернативы x_i относительно альтернативы x_j . Степень предпочтения для нечеткого отношения R определяется функцией принадлежности $\mu_R(x_i, x_j)$. Т.о. $\mu_R(x_i, x_j)$ определяет степень предпочтения альтернативы x_i относительно альтернативы x_j . Свойства функции $\mu_R(x_i, x_j)$:

- 1) $\mu_R : X \times X \rightarrow [0, 1]$, т.е. функция $\mu_R(x_i, x_j)$ каждой паре альтернатив $(x_i, x_j) \in X \times X$ ставит в соответствие значение из интервала $[0, 1]$, это значение есть степень предпочтения альтернативы x_i относительно альтернативы x_j ;
- 2) $\mu_R(x_i, x_i) = 1$, т.е. альтернатива x_i не может быть хуже сама себя;

3) $\mu_R(x_j, x_i) = 0$ в том случае, если для пары альтернатив (x_i, x_j) с положительной степенью выполнено отношение R (т.е. $\mu_R(x_i, x_j) > 0$ либо альтернативы x_i, x_j по выбранному критерию не могут быть сравнимы. Таким образом, если $\mu_R(x_i, x_j) > 0$, то $\mu_R(x_j, x_i) = 0$ и если $\mu_R(x_j, x_i) > 0$, $\mu_R(x_i, x_j) = 0$.

Т.о. для каждой пары $(x_i, x_j) \in R$ (либо, в общем виде $x_i R x_j$) определяется степень $\mu_R(x_i, x_j)$.

Виды нечетких отношений

1. Нечеткое отношение безразличия R^I предполагает, что альтернативы x_i и x_j не могут быть сравнимы с использованным отношением предпочтения R (здесь предполагается, что R – это отношение нестрогого предпочтения). Тогда если $x_i R^I x_j$, то $\mu_R^I(x_i, x_j)$ определяет степень безразличия альтернативы x_i по отношению к альтернативе x_j .

2. Отношение эквивалентности альтернатив R^E . Оно предполагает, что $R^E \subseteq R^I$. Отношение R^E определяется следующим образом: $R^E = R \cap R^{-1}$, где R – отношение «не хуже» (x_i не хуже x_j), R^{-1} – отношение «не лучше» (x_j не лучше x_i). Тогда если $(x_i, x_j) \in R^E$, то альтернативы x_i и x_j эквивалентны, а $\mu_R^E(x_i, x_j)$ определяет степень эквивалентности альтернатив x_i и x_j .

3. Нечеткое отношение строгого предпочтения R^S , тогда при $(x_i, x_j) \in R^S$ значение $\mu_R^S(x_i, x_j)$ определяет степень предпочтения альтернативы x_i над альтернативой x_j .

Таким образом отношения R^S, R^E, R^I могут связывать любую пару альтернатив $(x_i, x_j) \in X \times X$. Каждое из отношений R^S, R^E, R^I характеризуется своей функцией принадлежности $\mu_R(x_i, x_j)$, определяющей степень выполнения отношения для пары альтернатив (x_i, x_j) $\mu_R^S(x_i, x_j), \mu_R^E(x_i, x_j), \mu_R^I(x_i, x_j)$.

Если известны степени выполнения отношений R и R^{-1} (где R – отношение «не хуже» (x_i не хуже x_j), R^{-1} – отношение «не лучше» (x_j не лучше x_i), соответственно $\mu_R(x_i, x_j)$ и $\mu_{R^{-1}}(x_i, x_j)$), то значения, $\mu_R^S(x_i, x_j), \mu_R^E(x_i, x_j), \mu_R^I(x_i, x_j)$ могут быть вычислены следующим образом:

1) для отношения безразличия:

$$\mu_R^I = \max[1 - \max(\mu_R(x_i, x_j), \mu_{R^{-1}}(x_j, x_i)); \min(\mu_R(x_i, x_j), \mu_{R^{-1}}(x_i, x_j))];$$

2) для отношений эквивалентности:

$$\mu_R^E = \min(\mu_R(x_i, x_j), \mu_{R^{-1}}(x_i, x_j));$$

3) для отношения строгого предпочтения:

$$\mu_R^S(x_i, x_j) = \mu_R(x_i, x_j) - \mu_{R^{-1}}(x_j, x_i), \text{ если } \mu_R(x_i, x_j) > \mu_{R^{-1}}(x_j, x_i) \text{ и } \mu_R^S(x_i, x_j) = 0$$

в противном случае.

Линейность нечетких отношений

Если R (либо R^{-1}) связывает любые две альтернативы x_i и x_j , то отношение R является линейным. Т.о. в X нет несравнимых с помощью R (R^{-1}) решений, альтернативы из X могут быть упорядоченных с помощью R (R – нечеткое отношение нестрогого предпочтения). Если R – нечеткое отношение нестрогого предпочтения (с функцией принадлежности μ_R), то может быть сформулировано свойство, когда R не является линейным: если в X имеются 2 альтернативных x_i и x_j такие, что $\mu_R(x_i, x_j) = \mu_{R^{-1}}(x_i, x_j) = 0$.

Понятия сильно линейного нечеткого отношения предпочтения и слабо линейного нечеткого отношения предпочтения

Нечеткое отношение μ_R называется сильно линейным, если его функция принадлежности для любой пары альтернатив $(x_i, x_j) \in X \times X$ выполняется условие: $\max\{\mu_R(x_i, x_j), \mu_{R^{-1}}(x_j, x_i)\} = 1$. Нечеткое отношение μ_R называется слабо линейным, если его функция принадлежности удовлетворяет условию: из $\mu_R(x_i, x_j) = 0$ следует, что $\mu_{R^{-1}}(x_j, x_i) > 0$ для любой пары альтернатив $(x_i, x_j) \in X \times X$.

Пример сильно линейного отношения нестрогого предпочтения:

$$\mu_R(x_i, x_j) = x_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 0.2 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0.5 \\ x_3 & 0 & 0.8 & 1 & 1 \\ x_4 & 1 & 1 & 0.3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пример слабо линейного отношения нестрогого предпочтения:

$$\mu_R(x_i, x_j) = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0.55 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.8 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.7 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

Решение задачи рационального выбора альтернатив из множества X на основе нечеткого отношения нестрогого предпочтения R

Заданными являются:

- 1) множество альтернатив (решений) X в виде $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- 2) нечеткое отношение предпочтения R (μ_R) с функцией принадлежности $\mu_R(x_i, x_j)$, определяющей степень выполнения нестрогого отношения предпочтения R для пары альтернатив (x_i, x_j) следующим образом: $\mu_R : X \times X \rightarrow [0, 1]$, т.е. каждой паре (x_i, x_j) из декартового произведения $X \times X$ функция μ_R ставит в соответствие значение из интервала $[0, 1]$.

Т.к. множество X счетное и конечное, то должна быть задана матрица $\mu_R(x_i, x_j)$ отношения предпочтения μ_R .

Таким образом, обозначение нечеткого отношения нестрогого предпочтения R выполняется в виде μ_R . Если определено отношение $\mu_R(x_i, x_j)$, то является определенным и отношение $\mu_{R^{-1}}(x_j, x_i)$ (либо $\mu_R(x_j, x_i)$ в дальнейших обозначениях).

Решение задачи предполагает выбор из множества решений X подмножества недоминируемых альтернатив X^{nd} с учетом отношений μ_R . Множество недоминируемых альтернатив X^{nd} является нечетким, т.е. каждой из альтернатив $x_i \in X$ ставится в соответствие значение, определяющее степень, с которой x_i не доминируют другие альтернативы. Степень доминирования альтернативой x_i альтернативы x_j определяется при учете отношения строгого предпочтения R^S , связывающего эти альтернативы. Т.о. на основе нечеткого отношения нестрогого предпочтения R (связывающего пары альтернатив (x_i, x_j)) должно быть определено отношение R^S строгого предпочтения для пар (x_i, x_j) . Т.е. на основе $\mu_R(x_i, x_j)$ и $\mu_R(x_j, x_i)$ должно быть определено $\mu_{R^S}(x_i, x_j)$.

Множество недоминируемых альтернатив X^{nd} формируется следующим образом:

1. Определяется нечеткое отношение строгого предпочтения $R^S(\mu_R^S)$ для каждой пары альтернатив (x_i, x_j) :

$$\mu_R^S(x_i, x_j) = \mu_R(x_i, x_j) - \mu_{R^{-1}}(x_j, x_i),$$

Либо

$$\mu_R^S(x_i, x_j) = \mu_R(x_i, x_j) - \mu_R(x_j, x_i).$$

Т.о. значение $\mu_R^S(x_i, x_j)$ – это степень, с которой альтернатива x_i доминирует альтернативу x_j .

2. Если является заданной величина $\mu_R^S(x_i, x_j)$ и является определенной альтернатива x_j , тогда $\mu_R^S(\cdot) > 0$ может быть использована для определения всех альтернатив x_i , которое доминирует альтернативу x_j .

3. Аналогичным образом может быть определена степень недоминируемости альтернативы x_j какой-либо из альтернатив $x_i \in X$. Степень недоминируемости альтернативой x_i альтернативы x_j определяется следующим образом: $\mu_R^{HD}(x_i, x_j) = 1 - \mu_R^S(x_i, x_j)$, где $x_i \in X, i = \overline{1, n}$. В результате может быть получено n значений $\mu_R^{HD}(x_i, x_j)$ степени недоминируемости альтернативами $x_i \in X$ альтернативы x_j .

4. Если альтернатива x_j не доминируется альтернативой x_i со степенью $\mu_R^{HD}(x_i, x_j)$, то эта альтернатива x_j не доминируется всеми альтернативами x_i со степенью, определяемой следующим образом: $\mu_R^{HD}(x_j) = \min_{i=1, n} (1 - \mu_R^S(x_i, x_j))$, либо $\mu_R^{HD}(x_j) = \min_{i=1, n} (\mu_R^{HD}(x_i, x_j))$. Т.е. среди всех альтернатив определяется та (и ее степень $\mu_R^S(x_i, x_j)$ соответственно), которая не доминирует x_j в наименьшей степени (наименьшая степень недоминирования), т.о. получено нечеткое множество $\mu_R^{HD}(x_j) (i = \overline{1, n})$, где каждому элементу x_j поставлена в соответствие его степень недоминирования (т.е. с какой степенью x_j не доминируется другими альтернативами).

5. Среди всех элементов $x_j \in X$ с учетом соответствующих значений $\mu_R^{HD}(x_j)$ определяется альтернатива x_h , не доминируемая другими альтернативами, следующим образом:

$$x_h : \mu_R^{HD}(x_h) = \max_{x_i \in X} \mu_R^{HD}(x_j).$$

В результате может быть определена альтернатива x_h , у которой степень недоминирования другими альтернативами x_i максимальна среди всех возможных значений $\mu_R^{HD}(x_j)$. В итоге сформировано подмножество $X^{HD} \subset X$ недоминируемых альтернатив в виде:

$$X^{HD} = \{x_h \mid x_h \in X \ \& \ \mu_R^{HD}(x_h) = \max_{x_j \in X} \mu_R^{HD}(x_j)\}.$$

Таким образом, альтернативы $x_h \in X^{HD}$ являются наиболее эффективными среди всех альтернатив $x_j \in X$.

Пример реализации метода определения недоминируемых альтернатив. Множество альтернатив X имеет следующий вид: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

На множестве альтернатив X задано отношение нестрогого предпочтения R в виде:

$$\mu_R(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}.$$

В соответствии с нечеткими отношениями $\mu_R(\cdot)$ определено нечеткое отношение строгого предпочтения в виде:

$$\mu_R^S(x_i, x_j) = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.2 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

В соответствии с отношением $\mu_R^S(x_i, x_j)$ сформирована матрица (нечеткое множество) $\mu_R^{HD}(x_i, x_j)$ не доминируемых альтернатив в виде:

$$\mu_R^{HD}(x_i, x_j) = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.8 & 1 \\ 0.7 & 1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0.6 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0.8 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

Понятно что для каждого столбца матрицы $\mu_R^{HD}(x_i, x_j)$ – альтернативы x_j – должна быть выбрана минимальная степень недоминируемости (“наихудший” вариант

недоминируемости). В результате получено нечеткое множество X^{HD} недоминируемых альтернатив в следующем виде:

$$\mu_R^{HD}(x_i) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.8 & 0.5 \end{vmatrix}$$

Наибольшую степень недоминируемости имеет альтернатива x_3 ($\mu_R^{HD}(x_3) = 0.8$), которая должна быть выбрана в качестве эффективного решения.

Таким образом, для эффективных альтернатив $x_i \in X$ должно выполняться следующее условие:

$$\mu_R^{HD}(x) = \max_{x_j \in X} (\min_{x_i \in X} \mu_R^{HD}(x_i, x_j)) = \max_{x_j \in X} \min_{x_i \in X} (1 - \mu_R^S(x_i, x_j)).$$

Решения задачи принятия решений с группой экспертов, характеризующихся весовыми коэффициентами

Заданым является количество экспертов, каждый из которых формирует свое отношение предпочтения для множества альтернатив. Количество экспертов обозначим через K . Определенно множество альтернатив X , имеющих вид $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. На множестве альтернатив X определено K отношений нестрогого предпочтения $R_k (k = \overline{1, K})$.

Т.о. каждый k -ый эксперт сформировал свое отношение предпочтения для альтернатив, т.е. сформировал матрицу отношения $R_k - \mu_{R_k}(x_i, x_j)$. Тогда элемент $\mu_{R_k}(x_i, x_j)$ определяет степень предпочтительности альтернативы x_i по отношению к альтернативе x_j по мнению k -го эксперта.

ЛПР по разному относится к экспертам, что определяется весовыми коэффициентами λ_K , назначенными каждому из них.

Условия для весовых коэффициентов:

$$0 \leq \lambda_K \leq 1; \sum_k \lambda_K = 1;$$

Задача состоит в определении эффективных (недоминируемых) альтернатив на основе мнений (отношений предпочтения) группы экспертов.

Алгоритм решения задачи предполагаемое построение двух видов сверток нечетких отношений предпочтений R_K , для каждой из которых определяется множество недоминируемых альтернатив.

1. Формулируется свертка P отношений предпочтения как пересечения нечетких отношений нестрогого предпочтения R_K :

$$P = R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_N = \min_{K=1, N} (\mu_{R_K}(x_i, x_j))$$

В результате сформировано “новое” обещающее отношение нестрогого предпочтения для пар альтернатив (x_i, x_j) .

2. Для полученного нечеткого отношения нестрогого предпочтения P формулируется отношение строгого предпочтения P^S с функцией принадлежности μ_p^S следующим образом:

$$P^S = P \setminus P^{-1}; \mu_p(x_i, y_j) = \mu_p(x_i, y_j) - \mu_{p^{-1}}(x_i, y_j) \text{ при} \\ \mu_p(x_i, y_j) > \mu_{p^{-1}}(x_i, y_j))$$

$$\mu_p^S(x_i, x_j) = 0 \text{ в противном случае.}$$

3. По аналогии с вышеизложенным методом формируется нечеткое множество x^{HD} недоминирующих альтернатив ($x^{HD} \subset x$) следующим образом:

$$\mu_p^{HD}(x_j) = \min_{x_i \in X} (1 - \mu_p^S(x_i, x_j));$$

4. Формулируется свертка Q отношений R_K , которая определяется следующим образом:

$$Q = \sum_K \lambda_K R_K \Rightarrow \mu_Q(x_i, y_j) = \sum_K \lambda_K \mu_{R_K}(x_i, y_j)$$

В результате получено новое нечеткое отношение нестрогого предпочтения Q для которого д\б сформировано отношение строгого предпочтения Q^S и $\Rightarrow$ множество недоминируемых альтернатив x^{HD2} . Формирование множества недоминируемых альтернатив выполняется следующим образом:

$$\mu_Q^{HD2}(x_j) = \min_{x_i \in X} (1 - \mu_Q^S(x_i, x_j))$$

Таким образом, сформировано два множества недоминируемых альтернатив μ_p^{HD1} и μ_Q^{HD2} .

5. Определяется пересечение полученных множеств μ_p^{HD1} и μ_Q^{HD2} ($x^{HD1} \cap x^{HD2}$ соответственно), функция принадлежности результирующего нечеткого множества определяются следующим образом:

$$\mu^{HD}(x_j) = \min(\mu_p^{HD1}(x_j); \mu_Q^{HD2}(x_j))$$

6. Из полученного в результате множества $x^{HD}(x^{HD}(x))$ выбирается та альтернатива x для которой значение $x^{HD}(x)$ является максимальным т.е.:

$$x^* = \operatorname{arq} \max_{x_j \in X} \mu^{HD}(x_j), j = \overline{1, n}$$

Пример реализации определения эффективной альтернативы при нескольких ($N=5$) отношениях нестрогого предпочтения $R_K (k = \overline{1, K})$.

На множестве $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ заданы отношения предпочтения $\{R_K (k = \overline{1, N})\}$ матрицы $\mu_R(x_i, x_j)$ которых имеют вид:

$$\begin{aligned} \mu_{R_1}(x_i, x_j) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.8 & 1 \end{vmatrix}; \mu_{R_2}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \\ \mu_{R_3}(x_i, x_j) &= \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}; \mu_{R_4}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.8 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}; \\ \mu_{R_5}(x_i, x_j) &= \begin{vmatrix} 1 & 0.1 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0.3; \lambda_3 = 0.3; \lambda_5 = 0.1 \end{aligned}$$

В результате преобразований получены отношения Р и Q в следующем виде:

$$\mu_P(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \mu_Q(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.34 & 0.49 & 0.62 \\ 0.5 & 1 & 0.67 & 0.71 \\ 0.45 & 0.45 & 1 & 0.39 \\ 0.6 & 0.45 & 0.5 & 1 \end{vmatrix};$$

Откуда $\mu_P^S(x_i, x_j)$ и $\mu_Q^S(x_i, x_j)$ имеет вид:

$$\mu_P^S(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \mu_Q^S(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.02 \\ 0.16 & 0 & 0.22 & 0.77 \\ 0.45 & 0.45 & 1 & 0.39 \\ 0.6 & 0.45 & 0.5 & 1 \end{vmatrix};$$

Опуская вычисления $\mu_P^{HД1}(x)$ и $\mu_Q^{HД2}(x)$ сформулируем множества $\mu_P^{HД1}(x)$ и $\mu_Q^{HД2}(x)$ в виде:

$$\mu_P^{HД1}(x) = [0.5; 1; 0.8; 0.5]; \quad \mu_Q^{HД2}(x) = [0.84; 1; 0.78 \quad 0.74];$$

Откуда получаем $\mu^{HД}(x)$ в виде

$$\mu^{HД}(x) = [0.5; 1; 0.78; 0.5];$$

Следовательно, эффективная альтернатива x_2 .

Решение задачи определения эффективной альтернативы группой экспертов, характеризующихся отношением нестрогого предпочтения между ними.

По аналогии с рассмотренной выше задачей заданными являются нечеткие отношения нестрогого предпочтения $\mu_{R_k}(x_i, x_j)$ для группы экспертов ($k = \overline{1, N}$) и задается нечеткое отношение предпочтения для этой группы экспертов (т.е. на сколько мнение i -го эксперта является более предпочтительным мнения j -го эксперта). Т.о. определим $\mu_M(e_i, e_j)$, значение которой соответствует степени предпочтительности мнения i -го эксперта по сравнению с мнением j -го.

Алгоритм определения эффективных решений при заданном нечетком отношении предпочтения для экспертов состоит из следующих шагов:

1. Для каждого $\mu_{R_k}(x_i, x_j) (k = \overline{1, N})$ определяется $\mu_{R_k}^S(x_i, x_j)$ и соответственно $\mu_{R_k}^{HД}(x_i, x_j)$ полученный вектор значений $\mu_{R_k}^{HД}(x_j)$ является соответствующей K -ой строкой формулируемой матрицы Φ , т.е.

$$\mu_{R_k}^{HД}(x_j) = \mu_\Phi(k, x_j), j = \overline{1, n}; k = \overline{1, N}$$

Матрица Φ , сформированная на основе $\mu_{R_k}^{HД}(x_j)$ задает нечеткое соответствие между множеством экспертов $E = \{e_R | k = \overline{1, N}\}$ и множеством альтернатив $X = \{x_j | j = \overline{1, n}\}$.

2. Т.к заданной является матрица M , элементы $\mu_M(e_i, e_j)$ который задают нечеткое соответствие между экспертами (степень предпочтения экспертов), то м\б сформулирована свертка отношений Φ и M следующим образом:

$$\Gamma = \Phi^T \circ M \circ \Phi,$$

где операция $\circ$ представляют собой максимальную композицию для соответствующий матриц Φ^T, M, Φ . В результате формируется отношение Γ , а базе которого определяется $\mu_{\Gamma}^S(x_i, x_j), \mu_{\Gamma}^{HD}(x_j)$.

3. С использованием полученных значений $\mu_{\Gamma}(x_i, x_j)$ и $\mu_{\Gamma}(x_j)$ формулируется скорректированное значение $\mu_{\Gamma}^{HD}(x_j)$ (где $\mu_{\Gamma}(x_i, x_j)$ - диагональные элементы соответствующей матрицы) следующим образом:

$$\mu_{\Gamma}^{HD}(x_j) = \min(\mu_{\Gamma}^{HD}(x_j), \mu_{\Gamma}(x_i, x_j))$$

4. Среди полученных значений $\mu_{\Gamma}^{HD}(x_j)$ выбираются максимальное, которое и соответствует эффективной альтернативе:

$$x^* = \mathop{\text{arg max}}_{x_j \in X} \mu_{\Gamma}^{HD}(x_j), j = \overline{1, n}$$

Пример реализации принятия решений при заданном отношении предпочтения.

$\mu_M(e_1, e_j)$ для экспертов. Множество экспертов имеет вид:

$$E = \{e_j \mid j = \overline{1, 5}\}.$$

Матрица М задана в виде:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.9 \\ 0.4 & 1 & 0.3 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.5 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.8 & 0.3 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрицы $\mu_{R_k}(x_j)$ отношения предпочтения для N элементов заданы соответствующими этим матрицам из предыдущего примера. Для каждого $\mu_{R_k}(x_j)$ сформулировано $\mu_{\Gamma}^{HD}(x_j)$ все N векторов $\mu_{R_k}^{HD}(x_i)$ сведены в матрице Φ (K – ый вектор – k – ая строка матрицы Φ).

В результате матрица Φ имеет вид:

$$M_{\Phi} = \begin{vmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Выполняется максимальная композиция для получения свертки Γ в виде:

$$M_{\Gamma} = (M_{\phi}) \circ (M_M) \circ (M_{\phi}) = \begin{vmatrix} 0.7 & 0 & 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.6 & 0 & 1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.5 & 0.7 & 0 \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.9 \\ 0.4 & 1 & 0.3 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.5 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.8 & 0.3 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 1 \end{vmatrix} \circ$$

$$\begin{vmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.6 & 0.7 \\ 0.8 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 1 & 0.8 \\ 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.9 \end{vmatrix}$$

Отношение Γ^S определяется матрицей:

$$\mu_{\Gamma}^S(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Откуда $\mu_{\Gamma}^{HD}(x_j) = \{0.9 \ 0.8 \ 1 \ 0.9\}$, скорректированный-вектор $\mu_{\Gamma}^{HD}(x_j)$ имеет вид: $\mu_{\Gamma}^{HD}(x_j) = \{0.8 \ 0.8 \ 1 \ 0.9\}$. Откуда эффективная альтернатива (решение) - x_4

3. Варианты задания

Вариант задания, предполагает определение матриц отношений нестрогого предпочтения для каждого из экспертов, а также матрицы предпочтений для экспертов. Необходимо на основе исходных данных выполнить определение множества недоминируемых альтернатив с учетом отношения нечеткого предпочтения для экспертов.

Вариант 1.

$$\mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.8 & 1 \end{vmatrix}. \quad \mu_{R_2}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.33 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mu_{R_3}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{vmatrix} . \quad \mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.8 & 1 \end{vmatrix} .$$

$$\mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} . \quad M = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.8 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.6 & 1 & 0.4 \\ 0.6 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} .$$

Вариант 2.

$$\mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} . \quad \mu_{R_2}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 1 & 0.4 & 0.45 \\ 0.3 & 0.7 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.2 & 0.33 & 1 \end{vmatrix} .$$

$$\mu_{R_3}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{vmatrix} . \quad \mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} .$$

$$\mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} . \quad M = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} .$$

Вариант 3.

$$\mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.8 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} . \quad \mu_{R_2}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 1 & 0.4 & 0.45 \\ 0.3 & 0.7 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.2 & 0.33 & 1 \end{vmatrix} .$$

$$\mu_{R_3}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{vmatrix} . \quad \mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.6 & 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} .$$

$$\mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} . \quad M = \begin{vmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 & 0.1 \\ 0.8 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.8 & 1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 & 1 \end{vmatrix} .$$

Вариант 4.

$$\mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} . \quad \mu_{R_2}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 1 & 0.4 & 0.45 \\ 0.3 & 0.8 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.33 & 1 \end{vmatrix} .$$

$$\mu_{R_3}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{vmatrix} . \quad \mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} .$$

$$\mu_{R_i}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} . \quad M = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} .$$

4. Контрольные вопросы

1. Что такое функция принадлежности с точки зрения нечеткого отношения R?
2. Каким образом (с точки зрения формализации) задается степень предпочтения в отношении R– нечетком отношении нестрогого предпочтения?
3. Какие виды нечетких отношений могут быть использованы при принятии решений, как реализуется определение значений их функций принадлежности?
4. Что означает сильная линейность нечеткого отношения нестрогого предпочтения и слабая линейность нечеткого отношения нестрогого предпочтения?
5. Каким образом на основе нечеткого отношения нестрогого предпочтения определяется множество недоминируемых альтернатив?
6. Какой вид имеет формализация способа определения на основе нечеткого отношения нестрогого предпочтения множества недоминируемых альтернатив?
7. В чем состоит процедура определения множества недоминируемых альтернатив при принятии решений с группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами?
8. Какой вид имеет формализация процедуры определения множества недоминируемых альтернатив при принятии решений с группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами?
9. В чем состоит процедура определения множества недоминируемых альтернатив при принятии решений с группой экспертов, характеризуемых отношением нестрогого предпочтения?
10. Какой вид имеет формализация процедуры определения множества недоминируемых альтернатив при принятии решений с группой экспертов, характеризуемых отношением нестрогого предпочтения?

Библиографический список

а) Основная литература

1. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы./ Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. – М.: Изд-во «Горячая линия – Телеком», 2004.– 452с.
2. Ярушкина Н.Г. Основы теории нечетких и гибридных систем. Учебное пособие./ Н.Г.Ярушкина. – М.: Изд-во «Финансы и статистика», 2004.– 320с.
4. Усков А.А., Кузьмин А.В. Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечеткая логика./ А.А. Усков, А.В. Кузьмин– М.: Изд-во «Горячая линия– Телеком». 2004.– 144с.

б) дополнительная литература

1. Райфа Г. Прикладная теория статистических решений./ Г.Райфа, Р. Шлейфер.– М.: Статистика, 1977.– 350 с.
2. Леоненков А. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH./ А. Леоненков– СПб: Изд-во «БХВ-Петербург», 2003. – 736с.
3. Бочарников В.П. Fuzzy-Технология: математические основы практика моделирования в экономике./ В.П. Бочарников – Санкт-Петербург, 2001, 328 с.