

УДК 378.147:519.28

Т.М. Мазлумян, К.Д. Филиппова, А.Ф. Хрусталеv

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: rt.sevgtu@stel.sebastopol.ua

О ПРОВЕДЕНИИ АУДИТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассматривается вопрос о поддержке курса теории вероятностей массовыми опытами, проводимыми на лекциях и практических занятиях.

Преподавание теории вероятностей и математической статистики в техническом университете не должно резко отличаться от преподавания других наук. В этих курсах в некоторых случаях допустимо и даже желательно отступление от строгого дедуктивного метода изложения материала. В них достойное место должны занять такие полезные приемы нематематических наук как аналогия, ссылка на опыт, словесная, а не формально-логическая аргументация и, конечно же, вычислительный эксперимент [1].

Главный педагогический принцип, положенный нами в основу построения лекций и практических занятий по теории вероятностей и математической статистике, состоит в разумном сочетании дедуктивных рассуждений с убедительными экспериментами [2,3].

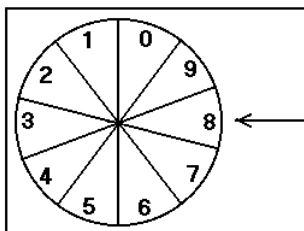
Для достижения большего психологического воздействия на студентов мы пользуемся при статистическом моделировании случайных величин вместо таблицы случайных чисел множеством последних цифр номеров телефонов, помещенных в телефонном справочнике, например, города Севастополя.

Задача 1

В ящике 10 деталей (одинаковых), помеченных номерами 0, 1, 2, ..., 9. Наугад выбирается одна деталь. Какова вероятность, что она имеет номер 2?

Решение:

Очевидно, возможны 10 случаев. Ни одному из них нельзя отдать предпочтение, поскольку детали вынимаются из ящика наугад. Поэтому, пользуясь теоретико-вероятностными представлениями, $P=0,1$.



Если задачу решать экспериментально, то следует заметить, что в чистом виде провести эксперимент трудно, так как тщательно перемешивать и вытаскивать детали неудобно. В вероятностном отношении можно провести эквивалентный

эксперимент. Например, урна с шарами, где номер шара или лото соответствует номеру детали. Можно усовершенствовать эксперимент с помощью рулетки (рисунок 1).

Запустим рулетку, при этом, когда вращающийся диск остановится, выбираем ту цифру, на которую указывает неподвижная стрелка. Таким образом, получим последовательность и из нее определим, сколько раз в ней встречается номер 2, и его относительную частоту, т.е. оценку вероятности.

Для получения последовательности случайных чисел можно также применить телефонный справочник. Для этого берем справочник и, начиная с любой страницы, рассматриваем множество последних цифр номеров телефонов. У нас нет оснований считать, что цифры 0, 1, 2, ..., 9 встречаются в них не одинаково часто. Для нас эти числа (цифры) являются случайными. С их помощью мы получаем возможность имитировать реальную случайность, а именно, выбор детали с номером 2.

Так, рассмотрев множество последних цифр для 100 номеров, видно, что 2 встречается в нем примерно 10 раз. Поэтому

$$P \approx 10/100 = 0,1.$$

Такой эксперимент можно провести непосредственно в аудитории с участием студентов, что имеет большее психологическое воздействие на обучающихся, чем таблица случайных чисел. Этот метод может быть применен не только к вероятностным задачам.

Задача 2

Найти $\int_0^1 x dx$, исходя из вероятностных представлений.

Решение:

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^1 1 * x dx, \quad (1)$$

явно выделив в качестве множителя в подынтегральном выражении единицу, которая будет играть роль плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x < 0; x > 1. \end{cases}$$

Но тогда выражение (1) будет математическим ожиданием случайной величины x , равномерно распределенной в интервале $[0;1)$.

$$M(x) = \int_0^1 1 * x dx.$$

Математическое ожидание можно оценить средним арифметическим наблюдаемых значений случайной величины:

$$M(x) = \int_0^1 x dx \approx (x_1 + x_2 + \dots + x_n) : n.$$

Возьмем $n=16$ (малая выборка) и воспользуемся телефонным справочником для получения случайных чисел (берем последние цифры). Так как у нас интервал $[0;1)$, то удовлетворять этому условию будут 0; 0,1; 0,2; ...; 0,9.

Итак, просматривая последние цифры 16 номеров телефонов, выпишем их последовательность, например, полученную в нашем эксперименте:

6; 9; 3; 1; 5; 3; 8; 4; 7; 6; 0; 2; 4; 7; 8; 9.

Откуда, учитывая, что каждое случайное число должно принадлежать интервалу $[0; 1)$, получаем

$$M(x) = (0,6+0,9+0,3+0,1+0,5+0,3+0,8+0,4+0,7+0,6+0+0,2+0,4+0,7+0,8+0,9)/16 = 0,5.$$

(Ответ записан с точностью до одной значащей цифры).

Точное значение этого интеграла равно 0,5, так как $\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 0,5$.

Задача 3

Исходя из вероятностных представлений, вычислить число π .

Решение:

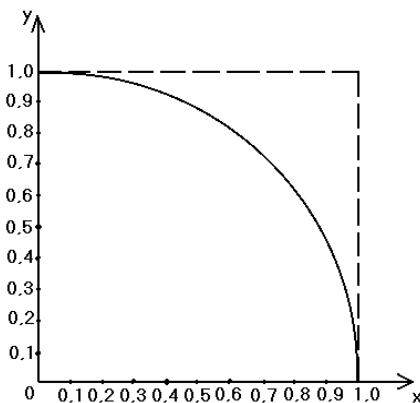


Рисунок 2 — Пояснение к задаче 3

Рассмотрим квадрат со стороной равной единице и четверть круга в нем (рисунок 2). Тогда геометрическая вероятность попадания случайной величины в четверть круга, площадь которого $S_{кр} = \pi/4$ будет $P = S_{кр}/1 \approx N_{кр}/N_{кв}$, где $N_{кр}$ и $N_{кв}$ – число случайных точек попадания соответственно в четверть круга и в квадрат соответственно. Отсюда $\pi \approx 4(N_{кр})/(N_{кв})$. Как и при решении предыдущей задачи для определения $N_{кр}$ и $N_{кв}$ используем те же случайные числа, объединив их в пары:

$$(0,6; 0,9), (0,3; 0,1), (0,5; 0,3), \\ (0,8; 0,4), (0,7; 0,6), (0; 0,2), \\ (0,4; 0,7), (0,8; 0,9).$$

В нашем эксперименте $N_{кр} = 6$, $N_{кв} = 8$. Следовательно $\pi \approx 4 \cdot 6/8 = 3$.

Нами также поставлен и внедрен в педагогическую практику эксперимент по проверке гипотезы о вероятности события. Выдвигая статистическую гипотезу о вероятности события A : $P(A) = P_0$, мы проводим « n » испытаний ($n > 10$).

Тогда, используя оценку частоты по вероятности с надежностью 0,997, т.е. с вероятностью выполнения правила 3σ нормально распределенной случайной величины, будем иметь неравенство

$$|\tilde{P} - p_0| < 3\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}.$$

Если это неравенство выполняется, то с надежностью 0,997 гипотеза не противоречит экспериментальным данным, в противном случае гипотеза отклоняется.

Пример. Проверить гипотезу о том, что любая последняя цифра номеров телефонов, помещенных в телефонном справочнике города Севастополя, имеет вероятность 0,1.

Гипотеза $P(A) = p_0 = 0,1$.

Запишем неравенство

$$|\tilde{P} - 0,1| < 3\sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{n}} \Leftrightarrow \left| \frac{k}{n} - 0,1 \right| < 0,9 \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow |k - 0,1n| < 0,9\sqrt{n} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,1n - 0,9\sqrt{n} < k < 0,9\sqrt{n} + 0,1n.$$

Пусть $n = 16$. Тогда $0 \leq k \leq 5$.

Для проверки гипотезы воспользуемся той же выборкой:

6; 9; 3; 1; 5; 3; 8; 4; 7; 6; 0; 2; 4; 7; 8; 9.

Теперь легко видеть, что каждая цифра встречается в ней не более 5 раз. Поэтому гипотеза не противоречит экспериментальным данным.

Одна из основных целей изучения теории вероятностей в техническом университете состоит в том, чтобы с самого начала приучить студентов к пониманию того, что в области случайных явлений можно делать предсказания, но такие, которые осуществляются не наверняка, но почти наверняка, с вероятностью весьма близкой к единице.

Ярким примером такого рода является практически достоверный прогноз того, что если в потоке примерно 70 студентов, то среди них существуют хотя бы два человека, дни рождения которых совпадают.

Следуя Е.С.Вентцель, мы не только делаем это предсказание с помощью теоретического расчёта, но и проводим его экспериментальную проверку. При этом лектор, обращаясь к студентам, говорит: « Я не ходил в

студенческий отдел кадров и не знакомился с вашими личными делами. Да и вряд ли знакомство с ними помогло бы мне сделать такой прогноз: ведь число студентов, присутствующих на лекции, есть случайная величина, так как некоторые из них по разным причинам отсутствуют».

Прогноз лектора сразу вызывает в аудитории оживление и даже недоверие, поскольку кажется, что его вероятность невелика, так как в году максимум 366 дней, а в аудитории около 70 человек. (Если бы в аудитории было бы более 366 студентов, например, 367, то наверняка нашлись бы в ней два человека, дни рождения которых, совпадают). Однако, решение этой задачи показывает, что вероятность осуществления прогноза не менее 99,9%.

Чтобы подтвердить или не подтвердить этот расчёт экспериментально лектор передаёт студентам табель-календарь и просит каждого из них отметить дату своего рождения вертикальной чёрточкой (лучше конечно звёздочкой, если размеры календаря достаточны). Если дата оказалась уже отмеченной, то нужно на ней сделать ещё одну отметку горизонтальной или наклонной чёрточкой.

Через некоторое время студенты заявляют, что на одной и той же дате появились две отметки. Прогноз лектора осуществился! На этом эксперимент можно было бы закончить. Однако аудитория всегда просит провести его до конца, чтобы каждый мог принять в нём участие. После того как табель-календарь обойдёт всех присутствующих, объявляется результат.

Итак, предсказание осуществилось. Однако лектор подчёркивает, что оно могло и не осуществиться и ещё раз объясняет природу вероятностных прогнозов, которые отличаются одной существенной особенностью: они осуществляются не наверняка, а почти наверняка, с вероятностью весьма близкой к 100%.

На практических занятиях также полезно проводить опыты в том числе и характеризующие вероятностную (корреляционную) зависимость между случайными величинами.

Например, если X – рост наугад взятого человека, а Y – его вес, то между этими величинами существует вероятностная, не функциональная зависимость, состоящая в том, что в общем люди с большим ростом имеют и больший вес. Эту зависимость можно выразить эмпирической формулой

$$Y(\text{кг}) = X(\text{см}) - 100, \quad (2)$$

которая выражается линейной функцией, приближённо отражающей реальную ситуацию. Чтобы в этом убедиться достаточно из множества студентов группы сделать выборку например из десяти человек и предложить каждому записать на доске свой рост и вес и подставить эти значения в формулу (2). Указание такой зависимости и проведение соответствующего аудиторного эксперимента даёт в понимании

корреляционной связи гораздо больше, чем решение какой-то отвлеченной задачи.

Не менее полезно проведение на практических занятиях натуральных экспериментов вообще и в частности с бросанием монет. Такие эксперименты позволяют убедиться в том, что теоретические результаты согласуются с практическими. Сравним вероятность выпадения герба и цифры при подбрасывании двух монет с её эмпирическим аналогом – относительной частотой, определяемой экспериментально. Теоретическая, идеализированная частота, то есть вероятность, в этом случае равна 0,5. Экспериментальное решение можно получить так: каждый студент из группы, например в 25 человек, десять раз подбрасывает две монеты, и регистрирует сколько раз выпали герб и цифра. Всего, таким образом, будет проведено 250 опытов, примерно в половине которых выпадет герб и цифра, а потому относительная частота указанного события 0,5.

В этой связи заметим, что Даламбер, как пишут в некоторых книгах, считал: при подбрасывании двух монет три события – выпадение двух гербов, двух цифр, а также одного герба и одной цифры – равновероятны. Если бы это было так, то относительная частота выпадения герба и цифры равнялась бы $1/3$. Но как было отмечено выше, относительная частота выпадения герба и цифры, получаемая на основе опыта близка к 0,5. Таким образом, гипотеза Даламбера неверна. (Правда, трудно поверить, чтобы он мог её высказать).

Перечень аудиторных экспериментов, которые целесообразно проводить при изучении теории вероятностей, можно продолжить. Однако и уже приведённые примеры хорошо демонстрируют их возможности в активизации творческой деятельности студентов, в повышении эффективности и качества преподавания этой дисциплины.

Задачами дальнейших исследований в данном направлении могут быть эксперименты по построению статистических функций распределения на основе заданной первичной статической совокупности, полученной в результате прямых экспертных опросов.

Библиографический список

1. Лукьянчук А.Г. Внедрение новых технологий обучения в учебный процесс специальности 7.090701 — Радиотехника / А.Г. Лукьянчук, И.Л. Афонин // Вестн. СевГТУ. Сер. Культура, педагогика, филология. — Севастополь, 1998. — № 12. — С. 23–24.
2. Барски Т. Система экспертов при решении проблем обучения / Т. Барски, В.К. Маригодов, А.А. Слободянюк // Вестн. СевГТУ. Сер. Культура, педагогика, филология. — Севастополь, 1998. — № 12. — С. 62–69.
3. Хрусталева А.Ф. Эксперимент как органический элемент обучения математике во втузе / А.Ф. Хрусталева, А.Т. Чуб // Проблемы высшей школы. — К., 1980. — № 41. — С. 54–57.

Поступила в редакцию 22.12.2003 г.