

УДК 519.25

В.П. Долгин, доцент, канд. техн. наук,**И.В. Долгин, инженер***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: autosev@ukr.net***СИГНУМ - ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА**

Изложена методика оценки устойчивости линейной динамической системы по результатам анализа характеристического полинома в частотной области. Сформулирован аналитический критерий устойчивости. Приведены результаты имитационного моделирования.

Ключевые слова: критерий, передаточная функция, устойчивость, полином, вектор.

Введение. При анализе устойчивости линейных динамических систем широко пользуются частотными критериями [1, 2], из которых наиболее простым по своей сути является критерий Михайлова. Однако из-за низкой разрешающей способности он редко применяется для анализа устойчивости динамических систем высокого порядка. С ростом частоты начальная часть годографа при порядке характеристического полинома $n \geq 5$ становится практически неразличимой и требуется проводить дополнительный ее анализ. Обладая наглядностью, критерий Михайлова не позволяет в явной форме аналитически выразить критерий.

Целью статьи является повышение разрешающей способности метода критериальной оценки устойчивости линейных детерминированных систем с сосредоточенными параметрами.

Критерий основан на анализе характеристического уравнения, получаемого в результате преобразования операторной дробно-рациональной передаточной функции исследуемой системы, и сведения его к полиномиальной форме. Операторную дробно-рациональную передаточную функцию системы можно свести к виду

$$W(p) = \frac{k \sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j},$$

где m – порядок числителя; n – порядок знаменателя; b_i, a_j – коэффициенты; k – коэффициент передачи (усиления); p – оператор Лапласа.

Характеристическим является полином $Q(p) = \sum_{j=0}^n a_j p^j$, который обычно представляется в стандартной операторной форме

$$Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

Этот полином можно разложить на множители

$$Q(p) = a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ – корни характеристического уравнения системы $Q(p) = 0$

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Задача состоит в проверке условий, при которых все корни характеристического уравнения $Q(p) = 0$ лежат слева от мнимой оси комплексной плоскости. Выражение для полинома $Q(p)$ остается справедливым при любых значениях текущей координаты p и, в частности, при значении $p = j\omega$

$$Q(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n).$$

Каждый из сомножителей

$$q_i(j\omega) = (j\omega - p_i); (i = [1; n])$$

представляет собой элементарный вектор, выходящий из начала координат.

В показательной форме выражение элементарного вектора $q_i(j\omega)$ можно представить как

$$q_i(j\omega) = q_i(\omega) \cdot e^{j\varphi_i(\omega)},$$

где $q_i(\omega) = \sqrt{\omega^2 + p_i^2}$ – модуль i -го элементарного вектора, $\varphi_i(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{p_i}$ – его фаза.

Поскольку функция $Q(j\omega)$ равна произведению элементарных векторов $q_i(j\omega)$, то и сама эта функция является вектором

$$Q(j\omega) = q_1(j\omega) \cdot q_2(j\omega) \cdots q_n(j\omega)$$

или в показательной форме

$$Q(j\omega) = Q(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

где $Q(\omega) = q_1(\omega) \cdot q_2(\omega) \cdots q_n(\omega)$ – амплитуда, $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots + \varphi_n(\omega)$ – фаза вектора $Q(j\omega)$.

При изменении ω от 0 до $+\infty$ фаза любого i -го элементарного вектора изменится на величину

$$\Delta\varphi_i = 0 - \varphi_i(\infty) = \frac{\pi}{2},$$

так как

$$\varphi_i(0) = \arctg\left(\frac{0}{p_i}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_i(\infty) = -\arctg\left(\frac{\infty}{p_i}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, фаза каждого элементарного вектора, отображающего один корень характеристического уравнения, лежащий слева от мнимой оси комплексной плоскости, изменится на угол $+\frac{\pi}{2}$ при изменении ω от 0 до $+\infty$.

Фаза каждого элементарного вектора, отображающего один корень характеристического уравнения, лежащий справа от мнимой оси комплексной плоскости, изменится на угол $-\frac{\pi}{2}$ при изменении ω от 0 до $+\infty$.

Если все n корней характеристического уравнения системы находятся в левой полуплоскости, что соответствует устойчивой системе, то фаза вектора $Q(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ изменится на $n\frac{\pi}{2}$, т.е. вектор $Q(j\omega)$ повернется против часовой стрелки на угол $n\frac{\pi}{2}$.

Если хотя бы один корень характеристического уравнения системы окажется в правой полуплоскости, что соответствует неустойчивой системе, то вектор $Q(j\omega)$ повернется против часовой стрелки на угол меньший, чем $n\frac{\pi}{2}$ при изменении ω от 0 до $+\infty$.

Таким образом, система автоматического управления устойчива, если годограф характеристического вектора $Q(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ последовательно пройдет n квадрантов против часовой стрелки, начиная от положительной вещественной оси, где n – порядок характеристического полинома системы.

Постановка задачи. Для характеристического полинома $Q(p) = \sum_{j=0}^n a_j p^j$ можно получить его вещественную и мнимую составляющие в виде

$$\operatorname{Re}(\omega) = \sum_{i=0}^n a_i \omega^i \cos\left(\frac{i\omega\pi}{2}\right); \quad \operatorname{Im}(\omega) = \sum_{i=0}^n a_i \omega^i \sin\left(\frac{i\omega\pi}{2}\right),$$

положив $p = j\omega$.

Амплитуда вектора $Q(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)}$ изменяется с изменением ω от $Q(0) = a_0$, так как $\operatorname{Re}(0) = a_0$ и $\operatorname{Im}(0) = 0$, до предельного значения $Q(\omega_m) > a_n \omega_m^{n/2}$, т.е. более чем в $a_n \omega_m^{n/2} / a_0$ раз, где ω_m – максимальная частота диапазона. Поэтому при значениях степени характеристического полинома $n \geq 5$ начальный участок годографа трудно различим, что осложняет анализ устойчивости системы. В этой связи актуальным является повышение разрешающей способности процедуры оценки устойчивости динамической системы.

Решение. С целью упрощения анализа устойчивости динамической системы целесообразно изобразить трассу годографа, фиксируя квадранты, через которые он проходит в диапазоне исследуемых

частот $\omega = [0 \dots \omega_m]$. Для этого достаточно определить знаки вещественной $\text{signum}(\text{Re}(\omega))$ и мнимой $\text{signum}(\text{Im}(\omega))$ составляющих в середине интервалов, на которые разбивают функции $\text{Re}(\omega)$ и $\text{Im}(\omega)$ ось частот ω , где $\text{signum}(x) = x/|x|$; $\text{signum}(0) = 0$.

Найдя корни функций $\text{Re}(\omega)$ и $\text{Im}(\omega)$, получим множество точек на оси частот ω , образующих требуемые интервалы.

Разместив точки с координатами $[\text{signum}(\text{Re}(\omega)), \text{signum}(\text{Im}(\omega))]$ на комплексной плоскости, получим трассу годографа характеристического полинома. Если порядок следования квадрантов, через которые проходит годограф, не нарушается, то система устойчива.

Версия реализации. Рассмотрим пример оценки устойчивости системы с операторной передаточной функцией

$$W_r(p) = \frac{k(1 + T_m p)^m}{(1 + T_r p)^n},$$

охваченной звеном обратной связи с операторной передаточной функцией

$$W_s(p) = \frac{1}{(1 + T_s p)^s}.$$

Операторная передаточная функция замкнутой системы с отрицательной обратной связью $W_z(p) = W_r(p)/(1 + W_r(p)W_s(p))$ может быть представлена после преобразований в виде

$$W_z(p) = \frac{k(1 + T_m p)^m (1 + T_s p)^s}{(1 + T_r p)^n (1 + T_s p)^s + k(1 + T_m p)^m}.$$

Характеристическим полиномом исследуемой системы является знаменатель передаточной функции $W_z(p)$

$$Q(p) = (1 + T_r p)^n (1 + T_s p)^s + k(1 + T_m p)^m.$$

Перейдем к частотной форме характеристического полинома

$$Q(j\omega) = R(\omega) + jJ(\omega),$$

где $R(\omega) = \text{Re}(Q(j\omega))$ – вещественная составляющая, $J(\omega) = \text{Im}(Q(j\omega))$ – мнимая составляющая, и получим их аналитические выражения.

Затем вычислим корни $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ системы уравнений

$$R(\omega) = 0; J(\omega) = 0,$$

где q – общее число корней, частотных составляющих $R(\omega)$ и $J(\omega)$ характеристического полинома.

По найденным частотным составляющим $R(\omega)$ и $J(\omega)$ построен для сравнения годограф характеристического полинома (годограф Михайлова) устойчивого (рисунок 1, а) и неустойчивого (рисунок 1, б) состояний системы, которые трудно различимы. В меньшем масштабе на этих же рисунках изображены начальные участки годографов.

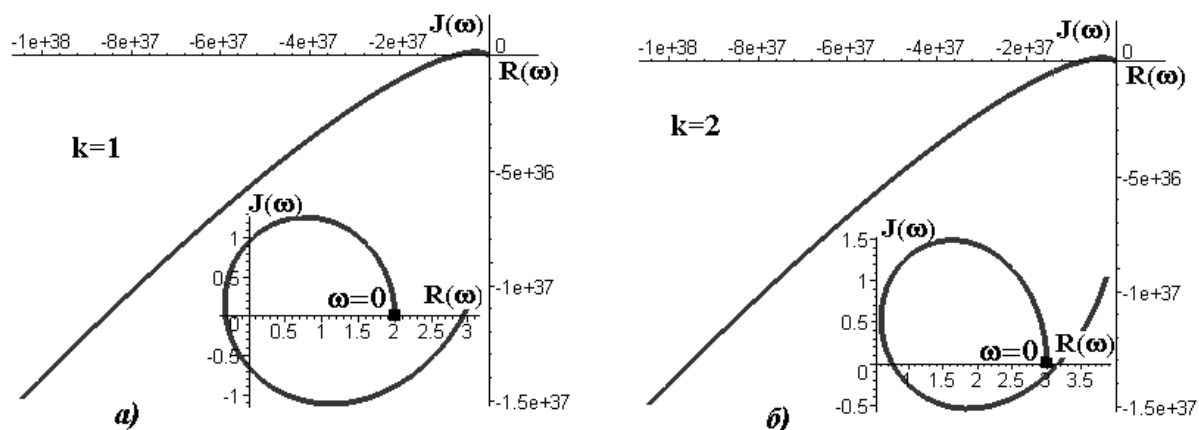


Рисунок 1 – Годографы характеристического полинома

Для анализа трассы годографа необходимо вычислить знаки составляющих $R(\omega)$ и $J(\omega)$ в середине частотных интервалов $[\omega_1; \omega_2], [\omega_2; \omega_3], \dots, [\omega_q; \omega_m]$, где $\omega_m = 1,1 \cdot \omega_q$ – граничная частота, взятая за пределами диапазона. В середине i -го интервала

$$u = (\omega_i + \omega_{i+1})/2 \quad (i = 1 \dots q)$$

необходимо вычислить знаки

$$\text{signum}(R(u)) \text{ и } \text{signum}(J(u))$$

и сравнить их со знаками, соответствующими i -му квадранту. Если знаки совпадают, то индикаторной функции присваивается значение номера квадранта $U_i = i$, в противном случае полагается $U_i = 0$

$$U_i = \begin{cases} i, & \text{if } \begin{aligned} \text{signum}(R(u)) &= (-1)^{\text{floor}(i/2)} \& \\ \text{signum}(J(u)) &= (-1)^{\text{ceil}(i/2)}; \end{aligned} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

где $\text{floor}(\cdot)$ и $\text{ceil}(\cdot)$ – функции целочисленного округления до ближайшего меньшего и большего соответственно.

Анализ устойчивости сводится к проверке наличия уклонений, соответствующих значениям $U(i) = 0$. При отсутствии уклонений система устойчива, в противном случае неустойчива.

На рисунке 2 изображены графики индикаторной функции устойчивого (рисунок 2, а) и неустойчивого (рисунок 2, б) состояний системы.

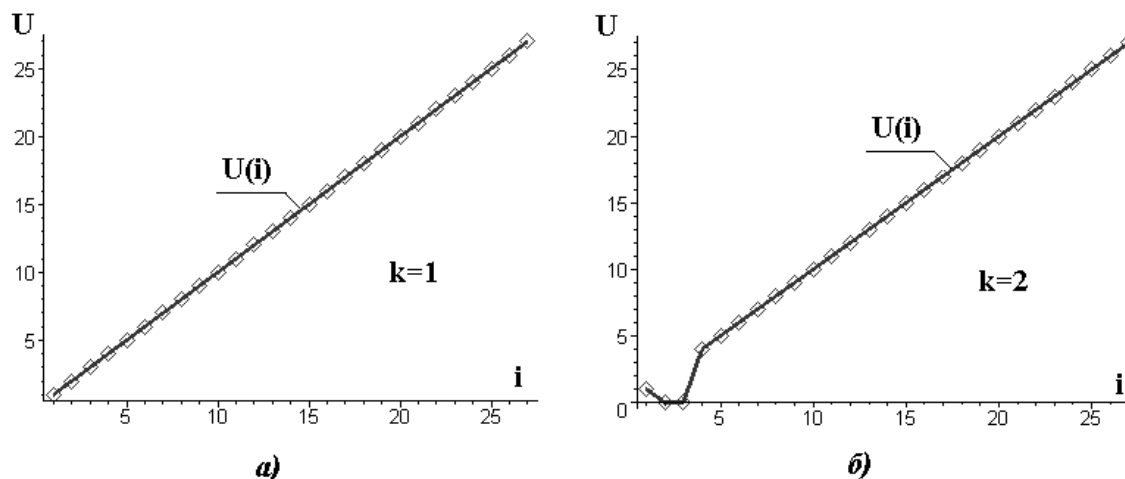


Рисунок 2 – Графики индикаторной функции

Сигнум-идентификация квадрантов для отображения трассы годографа представляет собой процедуру вычисления координат точек в середине интервалов, на которые разбита ось частот ω значениями корней вещественной $R(\omega)$ и мнимой $J(\omega)$ составляющих. Количество реперных точек, через которые проходит трасса годографа, равно порядку характеристического полинома q . Координатами каждой точки является номер квадранта i со знаком составляющей $R(u)$ и $J(u)$ в середине i -го интервала $u = (\omega_i + \omega_{i+1})/2$ ($i = 1 \dots q$). В этом случае описание координат i -й точки имеет вид

$$M_i = [\text{signum}(R(u)) \cdot i, \text{signum}(J(u)) \cdot i]; \quad (i = 1 \dots q).$$

Координаты начальной точки по определению составляют $M[1,0]$, так как $\text{signum}(R(0)) = 1$ при $R(0) = k$; $k > 0$ и $\text{signum}(J(0)) = 0$ при $J(0) = 0$.

Трасса годографа (рисунок 3) состоит из множества соединенных последовательно реперных точек, представляет собой стилизованную спираль и является дискретным образом годографа, показывая порядок прохождения квадрантов при изменении частоты. Нарушение последовательности прохождения квадрантов изменяет форму спирали.

На рисунке 3,а изображена трасса годографа устойчивой системы. Выходя из начальной точки ($\omega = 0$), годограф последовательно пересекает квадранты, начиная с первого. На рисунке 3,б изображена трасса годографа неустойчивой системы. Из начальной точки ($\omega = 0$) годограф входит в первый

квадрант и, не переходя во второй и третий, после первого квадранта переходит в четвертый. Нарушение порядка следования квадрантов является признаком неустойчивой системы.

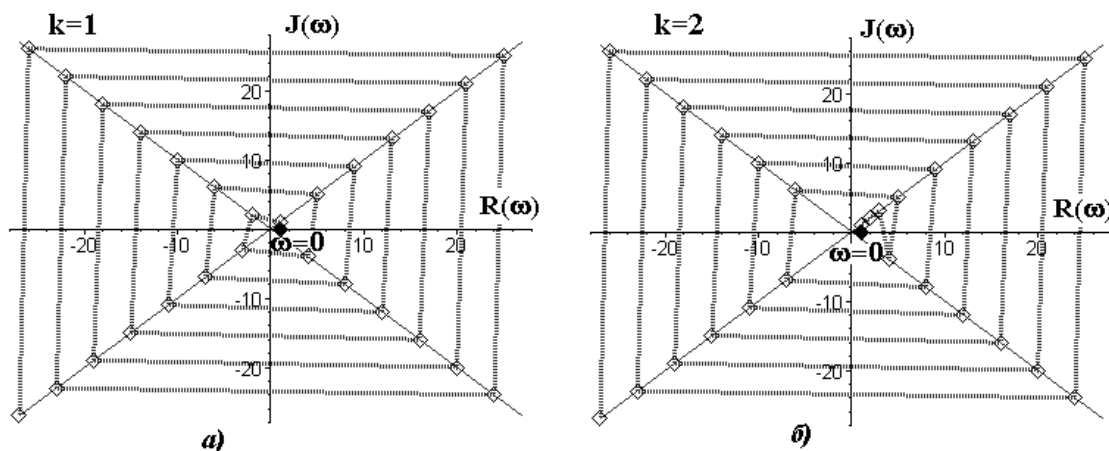


Рисунок 3 – Трасса годографа характеристического полинома

Переходные характеристики устойчивого (рисунок 4,а) и неустойчивого (рисунок 4,б) состояний системы приведены в качестве иллюстрации.

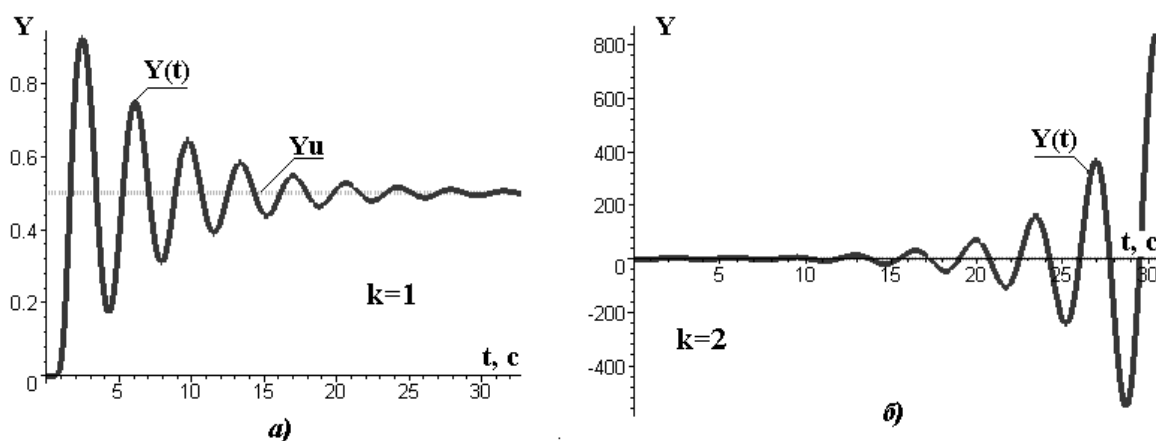


Рисунок 4 – Переходные характеристики системы

Моделирование состояний выполнено для системы со следующими параметрами: порядок собственного оператора $n = 19$; порядок оператора воздействия $m = 5$; порядок звена обратной связи $s = 8$; постоянная времени собственного оператора $T_n = 0,1$ с; постоянная времени оператора воздействия $T_m = 0,05$; постоянная времени звена обратной связи $T_s = 0,02$ с; порядок характеристического полинома составил $q = n + s = 27$. При изменении коэффициента k передачи (усиления) системы изменяется её состояние, и она может перейти в неустойчивое состояние. На графиках указаны значения k , которые соответствуют устойчивому и неустойчивому состояниям рассмотренной в примере системы.

Полученные результаты могут найти применение при проектировании, анализе и моделировании технических, технологических, транспортных [1,2] и других систем автоматического управления.

Выводы. 1. Устранены ограничения на порядок характеристического полинома. В рассмотренном примере порядок характеристического полинома составил $q = 27$ и может быть увеличен более чем в 2 – 3 раза без ущерба для разрешающей способности.

2. В результате введения функции индикации уклонений U_i ($i = 1 \dots q$) появилась возможность аналитически сформулировать условие устойчивости.

Перспективы дальнейших исследований состоят в разработке методов, упрощающих анализ состояний динамических систем.

Библиографический список использованной литературы

1. Топчиев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования / Ю.И. Топчиев. — М.: Машиностроение, 1989. — 752 с.
2. Долгин В.П. Автоматическое управление техническими и технологическими системами и объектами. Методы анализа систем и объектов / В.П. Долгин. — Севастополь, 2003. — 404 с.

Поступила в редакцию 01.10.2012 г.

Долгін В.П., Долгін І.В. Сигнум - інтерпретація критерію стійкості Михайлова

Наведена методика оцінки стійкості лінійної динамічної системи за наслідками аналізу характеристичного полінома в частотній області.

Ключові слова: критерій, передавальна функція, стійкість, поліном, вектор.

Dolgin V.P., Dolgin I.V. Signum - interpretation of the Michailov criterion stability

The method of estimation of stability of the linear dynamic system on results the analysis of characteristic polynomial in a frequency region is expounded.

Keywords: criterion, transmission function, stability, polynomial, vector.