

УДК 621.833

**В.П. Прохоров, профессор, канд. техн. наук**

**В.А. Щипаков, ст. научный сотр.**

*Научно-образовательный Центр инновационных технологий им. академика А.М. Прохорова,*

*Александровский филиал Российского нового университета*

*ул. Советская 25 а, г. Александров, Россия, 601652*

*E-mail: afrosnou2009@yandex.ru*

## **АЛГОРИТМ ЭВОЛЮЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛОСКОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПРИ ИЗНОСЕ ПРОФИЛЕЙ ЗУБЬЕВ ОТ ИСТИРАНИЯ**

*Рассмотрена задача анализа эволюции плоского зацепления при износе зубьев от истирания. Предложен алгоритм анализа на основе мультипликативных критериев износа. Полученные результаты могут быть использованы для оценки и прогнозирования надежности и долговечности зубчатых передач.*

**Ключевые слова:** абразивный износ механизмов, оптимизация плоских зацеплений, зубчатая передача.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Анализ эволюции формы профилей зубьев передач и прогнозирование на его основе долговечности являются актуальными для функционирования автономных систем (например, подводных и космических аппаратов дальнего следования), для которых пока еще нет возможности автоматической замены вышедших из строя компонентов.

Известно, что вследствие износа рабочих поверхностей зубьев колес происходит снижение кпд, точности преобразования движения и изгибной прочности из-за утонения основания зуба колеса (в опасном сечении), а также возрастают шум и динамические нагрузки. Механизм износа достаточно сложен. Рабочие поверхности подвергаются абразивному, адгезионному, химическому, окислительному и другим видам износа. В настоящее время нет точного аналитического метода расчета долговечности зубчатых передач по износу вследствие значительной сложности протекающих при этом процессов и многообразия влияющих факторов [1].

Целью данного исследования является разработка алгоритма анализа эволюции геометрии зубчатых передач с плоским зацеплением вследствие износа профилей зубьев от истирания. При этом эволюционный процесс в зубчатой передаче может быть представлен как изменения в процессе износа следующих существенных характеристик: геометрических (форма профилей зубьев, положение и величина опасного сечения, линия зацепления, дрейф полюса, кривизны), кинематических (скорость скольжения, удельное скольжение, передаточное отношение) и силовых (угол давления, контактные напряжения, нормальный износ).

Полученные результаты могут быть использованы для оценки и прогнозирования надежности и долговечности зубчатых передач указанных выше систем.

### **I. Постановка задачи**

**Принятые допущения и критерии износа.** Экспериментальные и теоретические исследования износа высших пар зубчатых, кулачковых, мальтийских и др. механизмов [1-6] указывают на его зависимость в общем случае от целого ряда геометрических, кинематических, силовых факторов, физико-механических свойств материалов звеньев, температуры и состояния рабочих поверхностей и промежуточной среды, однопарности или многопарности контакта, числа циклов нагружения, и др., одновременный учет которых в рамках данной работы не представляется целесообразным.

Для исключения малозначимых факторов и упрощения исследования нами в работе приняты следующие допущения: первое колесо является абсолютно твердым, оно не подвержено износу и деформациям; вид износа второго колеса – истирание; температура поверхностных слоев зубьев, свойства материалов колес, состояние трущихся поверхностей и окружающей среды в процессе износа изменяются незначительно; износ происходит в условиях сухого трения; исследование ограничено зоной однопарного зацепления; исходные неизношенные профили зубьев являются заданными (например, эвольвентными) и интерпретируются как начальные условия.

Анализ множества применяемых различными авторами критериев износа (законов эволюции) позволяет с учетом принятых допущений выделить из него следующие характерные группы.

**Мультипликативные критерии износа.** Основаны на операции умножения частных критериев. Так, в [6] предложен мультипликативный критерий, который зависит при прочих равных условиях от контактных напряжений  $\sigma$  и скорости скольжения  $v_{12}$  в виде:

$$\Delta_{1j} = \frac{\beta f}{\delta_r} \left( \frac{\sigma}{\sigma_B} \right) v_{12} T, \quad (1)$$

где  $\beta$  – часть работы сил трения, которая идет на разрушение поверхностного слоя,  $f$  – коэффициент трения,  $\delta_r$  – относительное удлинение, при котором происходит разрушение элемента материала,  $\sigma_B$  – предел прочности материала,  $T$  – время, за которое был изношен слой толщиной  $\Delta_{1j}$ . Здесь  $j=1,2$  – индекс колеса. Для контактного напряжения из формулы Герца получим

$$\sigma = C \sqrt{\frac{\omega_2(\omega_1 - \omega_2) \operatorname{tg} \alpha}{v_1 v_2}}, \quad C = 0,418 \left( \frac{M_2 E_{12}}{b} \right)^{0,5} = \text{const},$$

где  $v_j$  – относительная скорость точки контакта,  $\omega_j$  – угловая скорость  $j$ -го колеса,  $\alpha$  – угол зацепления,  $M_2$  – момент сопротивления на оси колеса 2,  $E_{12}$  – приведенный модуль упругости материалов колес,  $b$  – длина линии мгновенного контакта. Полагая величины  $\beta, f, \delta_r, \sigma_B$  постоянными, представим (1) в виде

$$\Delta_{1j} = C_1 \sqrt{IT},$$

где  $C_1 = \frac{\beta f}{\delta_r \sigma_B} C = \text{const}$ ;  $I = \omega_2(\omega_1 - \omega_2) \operatorname{tg} \alpha \frac{(v_1 - v_2)^2}{v_1 v_2}$ ;  $v_j = -a_j \omega_j \sin \alpha + (\dot{\alpha} - \omega_j)r + \dot{a}_j \cos \alpha$ , где  $a_j$  – радиус центроиды  $j$ -го колеса;  $r, \alpha$  – полярные координаты точки контакта на линии зацепления.

В [2,3] и, несомненно, в др. работах, используются критерии, зависящие от контактных напряжений и удельных скольжений  $\lambda_j$  в виде:

$$\Delta_{2j} = C_2 \sigma \lambda_{2j}, \quad C_2 = \text{const}. \quad (2)$$

В [4] Н.И. Колчиным предложен критерий нормального износа, который можно записать в виде

$$\Delta_{3j} = q^l \lambda_j^m v_{12}^n k_{12}^p C_3, \quad C_3 = \text{const}, \quad (3)$$

где  $l, m, n, p$  – весовые коэффициенты ( $l + m + n + p = 1$ ),  $q$  – удельное давление,  $k_{12}$  – приведенная кривизна.

К недостаткам приведенных мультипликативных критериев (1)–(3) относится то, что в особых точках (например, в полюсе зацепления) они обнуляются при обращении в нуль любого входящего в него частного критерия, что затрудняет учет влияния на процесс износа других частных критериев в этих точках.

**Аддитивные критерии износа.** Для более адекватного описания процесса износа целесообразно применение аддитивных критериев, основанных на суммировании частных критериев с определенными весовыми коэффициентами  $w_i$ , например, в виде предложенного нами ниже

$$\Delta_{4j} = \frac{\sigma}{\sigma^0} w_1 + \frac{v_{12}}{v_{12}^0} w_2 + \frac{\lambda_j}{\lambda_j^0} w_3 + \frac{M_{mp.k.}}{M_{mp.k.}^0} w_4, \quad \sum_{i=1}^4 w_i = 1, \quad (4)$$

где  $\sigma^0, v_{12}^0, \lambda_j^0, M_{mp.k.}^0$  – нормирующие множители,  $M_{mp.k.}$  – момент трения качения в контакте. Заметим, что при использовании (3) и (4) возникает проблема выбора весовых коэффициентов. Она может быть решена экспериментально для конкретных условий работы зубчатой передачи, либо гипотетически исследователем на базе накопленного опыта.

Далее для решения задачи используем аналитическую модель плоской кинематической пары с переменным передаточным отношением, предложенную в [4] и методику определения изношенной поверхности, разработанную в [6].

## II. Алгоритм анализа эволюции зацепления при износе

**Линия зацепления и передаточное отношение при износе.** Здесь мы решаем обратную задачу теории зацеплений, т.е. для заданных профилей зубьев колес определяем линию зацепления, передаточное отношение и др. значимые характеристики.

Пусть исходные профили заданы параметрически функциями координат в системе  $O_j, x_j(u_j), y_j(u_j)$ . При повороте колеса 1 вокруг оси  $O_1$  на угол  $\phi_1$  для этих координат получим

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(u_1, \varphi_1) &= a_1(u_1) \cos \varphi_1 + r(u_1) \sin(\alpha(u_1) - \varphi_1) = x_1(u_1) \cos \varphi_1 - y_1(u_1) \sin \varphi_1, \\ \tilde{y}_1(u_1, \varphi_1) &= -a_1(u_1) \sin \varphi_1 - r(u_1) \cos(\alpha(u_1) - \varphi_1) = x_1(u_1) \sin \varphi_1 + y_1(u_1) \cos \varphi_1.\end{aligned}$$

При повороте колеса 2 вокруг оси  $O_2$  на угол  $\varphi_2$  координаты его профиля запишем в виде

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2(u_2, \varphi_2) &= a_2(u_2) \cos \varphi_2 + r(u_2) \sin(\alpha(u_2) - \varphi_2) = (x_2(u_2) - a) \cos \varphi_2 - y_2(u_2) \sin \varphi_2 + a, \\ \tilde{y}_2(u_2, \varphi_2) &= -a_2(u_2) \sin \varphi_2 - r(u_2) \cos(\alpha(u_2) - \varphi_2) = (x_2(u_2) - a) \sin \varphi_2 + y_2(u_2) \cos \varphi_2,\end{aligned}$$

где  $a = O_1O_2$  – межосевое расстояние вдоль оси  $x$ .

Очевидно, что в точке контакта координаты сопряженных профилей зубьев совпадают, и оба профиля имеют общую нормаль. Проекция вектора нормали  $\vec{n}$  к заданному профилю вычисляем методами дифференциальной геометрии по формулам:  $n_x = \frac{\partial y}{\partial u}$ ,  $n_y = -\frac{\partial x}{\partial u}$ . Соответственно, для повернутых на угол  $\varphi_j$  профилей имеем:

$$n_{jx} = \frac{\partial y_j}{\partial u_j} \cos \varphi_j + \frac{\partial x_j}{\partial u_j} \sin \varphi_j, \quad n_{jy} = \frac{\partial y_j}{\partial u_j} \sin \varphi_j - \frac{\partial x_j}{\partial u_j} \cos \varphi_j, \quad k_j = \frac{n_{jy}}{n_{jx}},$$

где  $k_j$  – угловой коэффициент.

Таким образом, для определения точки контакта при повороте на угол  $\varphi_1$  получаем систему 3 нелинейных уравнений с 3 неизвестными  $u_1, u_2, \varphi_2$ :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(u_1, \varphi_1) = \tilde{x}_2(u_2, \varphi_2), \\ \tilde{y}_1(u_1, \varphi_1) = \tilde{y}_2(u_2, \varphi_2), \\ k_1(u_1, \varphi_1) = k_2(u_2, \varphi_2), \end{cases} \quad (5)$$

Зная функции профилей  $x_j(u_j), y_j(u_j)$ , решаем эту систему численно, в результате чего определяем координаты контактной точки  $x(\varphi_1) = \tilde{x}_j(u_j, \varphi_j)$  и  $y(\varphi_1) = \tilde{y}_j(u_j, \varphi_j)$  в системе  $O_1x y$  неподвижного звена. Полярные координаты линии зацепления вычислим по формулам

$$r(\varphi_1) = \sqrt{(x(\varphi_1) - a_1(\varphi_1))^2 + y(\varphi_1)^2}, \quad \alpha(\varphi_1) = \arctan \left( -\frac{x(\varphi_1) - a_1(\varphi_1)}{y(\varphi_1)} \right). \quad (6)$$

Из уравнения нормали  $y = k_1x + b_1$  получим координату полюса  $x_P$  в точке пересечения нормали с межосевой линией ( $y = 0$ ) в виде

$$x_P(\varphi_1) = -\frac{b_1}{k_1} = -\frac{y - k_1x}{k_1} = x(\varphi_1) - \frac{y(\varphi_1)}{k_1(\varphi_1)}. \quad (7)$$

Отсюда для радиусов центроид колес имеем

$$a_1(\varphi_1) = x_P(\varphi_1), \quad a_2(\varphi_1) = a - x_P(\varphi_1). \quad (8)$$

Функцию передаточного отношения запишем в виде

$$i_{12}(\varphi_1) = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a}{x_P(\varphi_1)} - 1. \quad (9)$$

**Величина износа и координаты измененного профиля.** Определив координаты линии зацепления и функцию передаточного отношения, вычислим величину износа профиля зуба 2-го колеса. Будем считать, что в точке контакта  $M_j$  износ происходит по нормали, т.е. расстояние  $r$  от точки  $M_j$  до полюса изменяется на величину  $\Delta_{ij}$  (1)–(4). Координаты измененного профиля зуба 2-го колеса найдем из соотношений

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{x}}_2 &= (\tilde{x} - a) \cos \varphi_2 + \tilde{y} \sin \varphi_2 + a, \\ \tilde{\tilde{y}}_2 &= -(\tilde{x} - a) \sin \varphi_2 + \tilde{y} \cos \varphi_2,\end{aligned} \quad (10)$$

где  $\tilde{x}, \tilde{y}$  – измененные координаты точки контакта на линии зацепления:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= a_1 + (r - \Delta) \sin \alpha = x - \Delta \sin \alpha, \\ \tilde{y} &= -(r - \Delta) \cos \alpha = y + \Delta \cos \alpha.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (10), получим непосредственно формулы измененных координат вследствие износа профиля зуба 2-го колеса:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2(u_2) &= x_2(u_2) - \Delta \sin(\alpha - \varphi_2), \\ \tilde{y}_2(u_2) &= y_2(u_2) + \Delta \cos(\alpha - \varphi_2).\end{aligned}\quad (11)$$

Величину износа определим в соответствии с критериями (1)–(4).

**Алгоритм анализа эволюции зацепления при износе.** При износе профиль зуба 2-го колеса теоретически сразу же теряет свою начальную форму и продолжает изменяться после каждого цикла нагружения. Изменяются линия зацепления, угол зацепления, угловая скорость  $\omega_2$ , радиусы центроид  $a_j$ , передаточное отношение, начальное и конечное положения точки контакта на линии зацепления и профилях зубьев и соответствующие им начальное  $\varphi_{10}$  и конечное  $\varphi_{1k}$  значения угла поворота 1-го колеса. Изменяются также величина и направление силы нормального давления, положение полюса, положение и размер опасного сечения, дуга зацепления и коэффициент перекрытия. Эти изменения существенно влияют на ресурс работы.

Установим связь между износом и ресурсом работы. Ресурс работы (допустимое число циклов нагружения  $N_p$ ) может быть определен: 1) по функциональному критерию точности преобразования движения – назначением предельно допустимого изменения передаточного отношения

$$[\delta i_{12}] = i_{12(0)} - [i_{12}(N_p)], \quad (12)$$

где  $i_{12(0)}$  – исходное передаточное отношение; 2) из стандартного условия изгибной прочности зуба в опасном сечении.

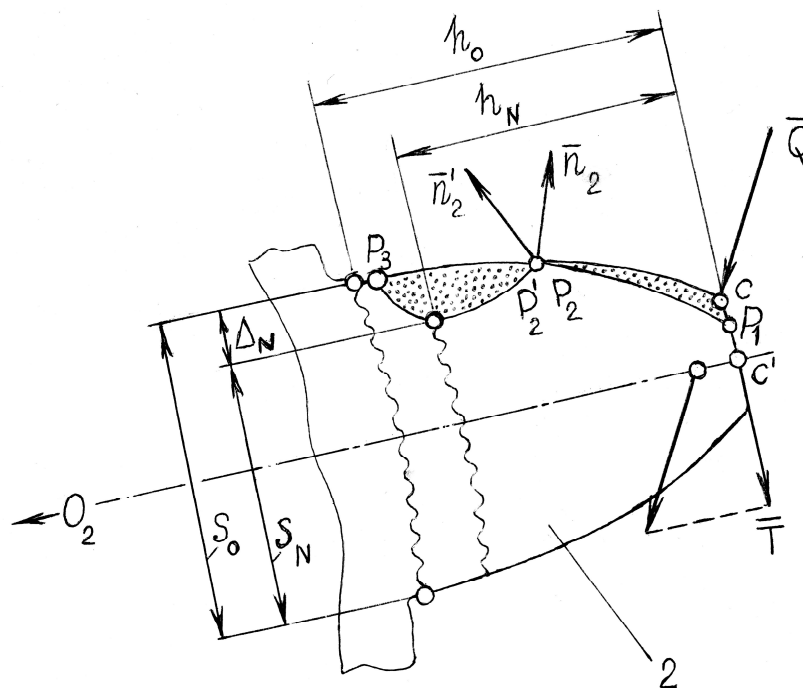


Рисунок 1 – Расчетная схема на изгибную прочность зуба колеса 2

На рисунке 1 приведена расчетная схема на изгибную прочность зуба колеса 2 при действии нормальной нагрузки  $\bar{Q}$ , приложенной в точке контакта с на вершине зуба с начальным профилем. Поместим окружную составляющую  $\bar{T}$  силы  $\bar{Q}$  в точку  $c'$  пересечения окружности выступов с осью симметрии зуба. Тогда  $T = M_2 / r_{e2} = \text{const}$ , где  $r_{e2} = O_2c'$  – радиус окружности вершин зубьев. На этом рисунке  $s_0$  – толщина зуба у основания (размер начального опасного сечения),  $h_0$  – высота зуба (координата начального опасного сечения).

Как видно из рисунка 1, после очередного цикла износа  $N = 1, 2, \dots, N_p$  опасное сечение (показано на рисунке 1 волнистой линией) перемещается из начального в новое положение вверх по высоте зуба с

координатой  $h_N$  и размером  $s_N = s_0 - \Delta_N$ . Для отыскания  $h_N$  воспользуемся стандартным условием изгибной прочности зуба в виде

$$\sigma_u(N) = \frac{6M_2}{br_{e2}} \left( \frac{h_N}{s_0 - \Delta_N} \right) \leq [\sigma_u], \quad (13)$$

где  $[\sigma_u]$  – допускаемое напряжение при изгибе,  $\Delta_N$  – проекция величины износа на направление  $s_0$ .

Для каждого отдельного  $N$ -го цикла нагружения  $N < N_p$  зададим на  $h_N < h_0$  дискретное множество точек (сечений). По формуле (13) вычисляем  $\sigma_u(N)$  в каждом сечении и определяем опасное сечение, в котором

$$\sigma_u(N) = \sigma_{u\max}(N). \quad (14)$$

Повторяем указанную процедуру для всех  $N = 1, 2, \dots, N_p$  и определяем ресурс  $N_p$  из условия

$$\sigma_{u\max}(N_p) = [\sigma_u]. \quad (15)$$

Алгоритм решения задачи анализа эволюции зацепления при износе от истирания представим в следующем виде:

1. Решаем обратную задачу теории зацеплений. По заданным функциям профилей  $x_j(u_j), y_j(u_j)$  (начальным условиям) из (5) определяем для всех  $\phi_1$  декартовы координаты линии зацепления  $x(\phi_1), y(\phi_1)$ , из (7) координату полюса  $x_p(\phi_1)$ , а из (8) – радиусы центроиды  $a_1(\phi_1), a_2(\phi_1)$  и угловую скорость  $\omega_2(\phi_1)$ , из (9) – передаточное отношение  $i_{12}(\phi_1)$ ;

2. Из (6) определяем полярные координаты  $r(\phi_1), \alpha(\phi_1)$  линии зацепления;

3. По формулам (1)–(4) вычисляем износ профиля зуба 2-го колеса;

4. Из (11) вычисляем координаты изношенного профиля;

5. Для каждого  $N < N_p$  из (9) определяем максимальное по профилю изменение передаточного отношения за цикл;

6. По формуле (12) определяем ресурс передачи по критерию допустимого изменения передаточного отношения;

7. По формулам (13)–(15) определяем ресурс передачи по изгибной прочности;

8. Делаем выводы об устойчивости процесса преобразования движения в передаче по мере износа по знаку приращения функции износа между предыдущим и последующим циклами  $\delta\Delta = \Delta(N) - \Delta(N-1)$ . Если  $\delta\Delta < 0$  – процесс устойчив во времени и соответствует минимуму производства энтропии [7], если  $\delta\Delta > 0$  – процесс неустойчив.

Выполняем шаги 1–8 для каждого цикла зацепления. Отметим, что предложенный алгоритм инвариантен относительно начальных условий (тип начального зацепления и др.).

#### **Библиографический список использованной литературы**

1. Трение, изнашивание и смазка. Справочник в 2-х кн. Кн. 2. / Под ред. И.В. Крагельского и В.В. Алисина. — М.: Машиностроение, 1979. — 358 с.
2. Бройдо Б.Е. Метод профилирования зубьев цилиндрических зубчатых передач по заданному параметру износа: дис.... канд. техн. наук / Б.Е. Бройдо. — Киев, 1951.
3. Будыка Ю.Н. Система зацепления наименьшего износа для открытых цилиндрических зубчатых передач с прямым зубом / Ю.Н. Будыка // Теория передач в машинах: тр. 2-ого совещания по основным проблемам теории механизмов и машин. — М., 1960.
4. Ленский М.Ф. Синтез зубчатых и кулачковых механизмов по качественным показателям: дис.... канд. техн. наук / М.Ф. Ленский. — Л.: ЛПИ, 1968.
5. Шульц В.В. Форма естественного износа деталей машин и инструмента / В.В. Шульц. — Л.: Машиностроение, 1990.
6. Галахов М.А. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения / М.А. Галахов, П.П. Усов. — М.: Наука, 1990.
7. Гленсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций / П. Гленсдорф, И. Пригожин. — М.: Мир, 1973. — 280 с.

*Поступила в редакцию 14.03.2014 г.*

**Прохоров В.П., Шипаков В.А. Алгоритм еволюційного моделювання плоского зачеплення при зношуванні профілів зубів від стирання**

Розглянуте завдання аналізу еволюції плоского зачеплення при зношуванні зубів від стирання. Запропонований алгоритм аналізу на основі мультиплікативних критеріїв зношування. Отримані результати можуть бути використані для оцінки й прогнозування надійності й довговічності зубчастих передач.

**Ключові слова:** абразивне зношування механізмів, оптимізація плоских зачеплень, зубчаста передача.

**Prokhorov V.P., Schipakov V.A. Evolutional modeling algorithm of plain engagements at abrasive wear of teeth profiles**

The problem of the analysis of plain engagements at the abrasive wear of teeth profiles is discussed. The algorithm of the analysis based on multiplicative wear criteria is proposed. The results can be used for estimation and forecasting of reliability and durability of the tooth gears.

**Keywords:** abrasive wearing, optimization of plain engagements, tooth gear.