

УДК 519.219.2:519.237.5

Е.Н. Татарченко

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

РАСЧЕТ СРЕДНЕГО МИНИМАЛЬНОГО КВАДРАТА ПОГРЕШНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Целью статьи является определение значений среднего минимального квадрата погрешности восстановления двумерного однородного изотропного случайного поля в зависимости от параметров пространственной дискретизации и отношения шум-сигнал. Выполнены оценки этого параметра для полей различной статистической структуры.

Повышение эффективности обработки информации является актуальной задачей для многих областей знания, от теоретических исследований до прикладных разработок. Увеличение объемов перерабатываемой информации ведет к росту вычислительных затрат и усложнению алгоритмов анализа данных; для многих приложений необходима высокая скорость обработки, в то время, как рост производительности оборудования полностью эту проблему не решает. Поэтому значительный интерес представляет исследование возможностей уменьшения объема данных при сокращении их количества без потери качества.

Общепринятым критерием качества цифровой обработки двумерных полей является средний квадрат относительной погрешности преобразования. Простейшим способом его оценки является вычисление этой величины в центре ячейки дискретизации поля, так как, на первый взгляд, именно там погрешность интерполяции будет максимальной за счет равноудаленности центра от точек измерения. Однако, как показано в [1], значения среднего квадрата относительной погрешности восстановления распределены по ячейке дискретизации неравномерно и не всегда он максимален в середине ячейки. Поэтому более представительным является значение минимального среднего квадрата погрешности восстановления по всей ячейке в целом. Эту величину естественно определить следующим образом:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{\iint_S \delta^2(x, y) dS}{S}.$$

Здесь δ^2 – минимальный квадрат погрешности восстановления случайного поля в точке с координатами (x, y) . Последняя величина может быть найдена по формуле [1]

$$\delta^2 = \frac{\varepsilon^2}{\sigma_X^2} = 1 - 2[a_1 R_X(\rho_1) + a_2 R_X(\rho_2) + a_3 R_X(\rho_3)] + (1 + \mu)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + \\ + 2[R_X(d) + R_{III}(d)](a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3),$$

где $R_X(\rho_i)$, $R_X(d)$ и $R_{III}(d)$ – нормированные корреляционные функции поля и шума; a_i – оптимальные весовые коэффициенты, зависящие от вида пространственной дискретизации поля и алгоритма интерполяции; S – площадь элементарной ячейки пространственной дискретизации, ρ_i – расстояния от точек измерения до точки с координатой (x, y) внутри элементарной ячейки дискретизации, для которой вычисляется погрешность восстановления. Площадь элементарной ячейки для треугольной дискретизации измеряемого поля равна $\frac{d^2 \sqrt{3}}{4}$, а для квадратной дискретизации поля $S = d^2$,

где d – размер стороны элементарной ячейки дискретизации.

Так как значение минимального квадрата погрешности восстановления поля существенно зависит от вида его корреляционной функции, то расчеты проводились для двух существенно различных функций. Экспоненциальная корреляционная функция описывает недифференцируемое поле, плохо аппроксимируемое полиномами, а колоколообразная корреляционная функция описывает гладкое в статистическом смысле поле, имеющее бесконечное количество производных.

На основе приведенной выше формулы численными методами были найдены зависимости среднего минимального квадрата погрешности оптимального восстановления поля $\overline{\varepsilon^2}$ от параметров μ и $\frac{d}{R_X}$. Здесь

$$\mu = \frac{\sigma_{III}^2}{\sigma_X^2} - \text{отношение дисперсий шума и поля в предположении их некор-}$$

релированности. Безразмерная величина $\frac{d}{R_X}$ – отношение длины стороны элементарной ячейки дискретизации к характерному масштабу поля. Результаты вычислений изображены на рисунках 1 и 2. Их получение потребовало значительных вычислительных ресурсов.

Для большей наглядности полученные результаты зависимости $\overline{\varepsilon^2}$ от $\frac{d}{R_X}$ для значения $\mu = 0,05$ вынесены на один график рисунка 3 для всех рассмотренных случаев. Подобные графики могут быть построены для любых значений μ и $\frac{d}{R_X}$.

а)

Рисунок 1 – Значения среднего минимального квадрата ошибки оптимального восстановления поля по треугольной ячейке

а)

Рисунок 2 – Значения среднего минимального квадрата ошибки оптимального восстановления поля по квадратной ячейке

Рассматривая полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

- средний минимальный квадрат ошибки оптимального восстановления поля с экспоненциальной корреляционной функцией при равных μ и $\frac{d}{Rx}$ существенно больше, чем для поля с колоколообразной корреляционной функцией;
- значение среднего минимального квадрата ошибки оптимального восстановления поля возрастает быстрее с ростом μ для поля с экспоненциальной корреляционной функцией;
- значение среднего минимального квадрата ошибки восстановления зависит от вида пространственной дискретизации: при равных μ и d у поля

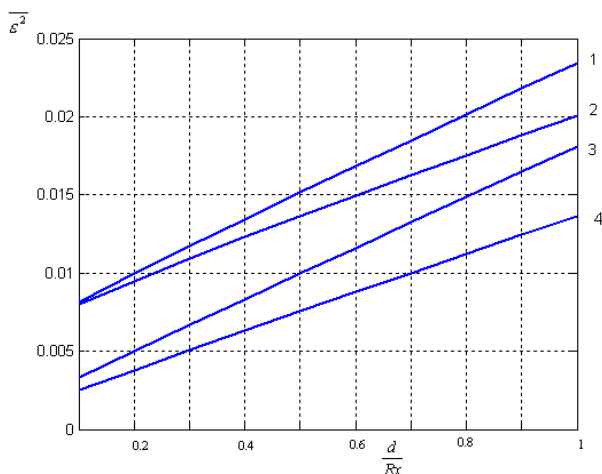


Рисунок 3 – Графики зависимости значения среднего минимального квадрата ошибки восстановления поля от размера стороны ячейки дискретизации:

- 1 – экспоненциальная корреляционная функция, треугольная дискретизация;
- 2 – экспоненциальная корреляционная функция, квадратная дискретизация;
- 3 – колоколообразная корреляционная функция, треугольная дискретизация;
- 4 – колоколообразная корреляционная функция, квадратная дискретизация

с квадратной дискретизацией средняя ошибка меньше, по крайней мере, в два раза, чем у поля с треугольной дискретизацией.

При использовании алгоритмов обработки случайных полей различной природы следует учитывать как свойства самого поля, так и свойства выполняемого над ним преобразования. Значения среднего минимального квадрата погрешности первичного преобразования поля для предложенных в [1] методов пространственной дискретизации могут быть получены по представленным графикам.

Предполагается исследование статистических характеристик реальных двумерных полей (в частности, цифровых фотографий) и выбор для них оптимальных значений параметров цифрового преобразования, что составляет предмет дальнейших разработок в данном направлении.

Библиографический список

1. Доценко С.В. Оценка погрешности восстановления случайного поля / С.В. Доценко, Е.Н. Татарченко// Вестн. СевГТУ. Сер. Информатика, электроника, связь: Сб. научн. тр. — Севастополь, 2005. — Вып. 68. — С. 25–34.

Поступила в редакцию 9.03.2006 г.