

УДК 518.5

В.Ф. Ротко, доцент, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ИСТИННОСТИ ЗАМКНУТОЙ ЛОГИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ В ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

*Предлагается булеву формулу считать $\forall$ -замкнутой, если перед ней подразумевается квантор общности относительно всех булевых переменных. В этом случае эту формулу можно трактовать как утверждение со значениями истинности *false*, *false/true* и *true*. В такой постановке значение истинности замкнутой булевой формулы определяется путем вычисления ее $\wedge$ -свертки и $\vee$ -свертки.*

К определению значения истинности замкнутой логической формулы могут быть сведены многие задачи из различных предметных областей [1,2]. Исчисление высказываний является простейшим логическим языком. В этом языке предлагается булеву формулу считать $\forall$ -замкнутой, если в качестве префикса подразумевается квантор общности относительно всех булевых переменных. В этом случае эту формулу можно трактовать как утверждение со значениями истинности *false*, *false/true* и *true*, которым соответствуют понятия противоречивой, нейтральной и общезначимой формул соответственно. Разработка эффективного алгоритма характеристики булевой формулы в исчислении высказываний остается актуальной до настоящего времени [3].

Будем для простоты значения истинности *tv* замкнутой булевой формулы обозначить через 0/0, 0/1 и 1/1 (или в числовом представлении через 0, 1 и 3) для *false*, *false/true* и *true* соответственно.

Пусть $\Phi(V)$ – некоторая формула в исчислении высказываний, где $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – множество булевых переменных $v_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим через $[v/c] \Phi(V)$ формулу, полученную из $\Phi(V)$ путем подстановки вместо вхождения переменной $v \in V$ константы $c \in \{0, 1\}$. Эта формула может быть редуцирована к виду $\Phi'(V')$, $V' \subset V$ по законам алгебры логики: $\Phi'(V') = R([v/c] \Phi(V))$, $c \in \{0, 1\}$.

Введем операцию свертки $[*v]$ относительно переменной $v \in V$ формулы $\Phi(V)$: $[*v] \Phi(V) = \Phi^*(V^*) = R([v/0] \Phi(V) * [v/1] \Phi(V))$, $* \in \{\wedge, \vee\}$, $V^* \subset V$. Тогда $*$ -свертку Φ^* формулы $\Phi(V)$ определим следующим

щим

образом:

$$\Phi(V) = \Phi_0^*(V_0^*);$$

$$\Phi_{i+1}^*(V_{i+1}^*) = [*v] \Phi_i^*(V_i^*), v \in V_i^*; \Phi^* = \Phi_k^*(V_k^*), V_k^* = \emptyset.$$

Значение истинности замкнутой формулы $\Phi(V)$ в исчислении высказываний будет определяться ее $\wedge$ -сверткой и $\vee$ -сверткой: $\Phi^\wedge / \Phi^\vee$.

Постановка задачи. Задана формула $\Phi(V)$ в исчислении высказываний, трактуемая как $\forall$ -замкнутая. Требуется определить ее значение истинности $tv(\Phi(V)) \in \{0/0, 0/1, 1/1\}$ (или в числовом представлении) $tv(\Phi(V)) \in \{0, 1, 3\}$.

Приведем некоторые утверждения, позволяющие уточнить описание алгоритма характеристики истинности $\forall$ -замкнутой формулы в исчислении высказываний.

Утверждение 1. Для любой $\forall$ -замкнутой формулы $\Phi(V)$ в исчислении высказываний справедливо $\Phi^\wedge \leq \Phi^\vee$.

Справедливость этого утверждения вытекает из свойств операций $\wedge$ и $\vee$.

Утверждение 2. Из $\Phi^\wedge = 1$ следует $\Phi^\vee = 1$ и из $\Phi^\vee = 0$ следует $\Phi^\wedge = 0$.

Справедливость этого утверждения следует из справедливости утверждения 1.

Утверждение 3. Если известны априорные вероятности P_0, P_1 и P_3 $\forall$ -замкнутой формулы, то при определении порядка вычисления сверток $\Phi^\wedge$ и $\Phi^\vee$ следует руководствоваться следующим:

- 0) определить $p = \max(P_0, P_1, P_3)$;
- 1) если $p = P_0$, то начинать с вычисления свертки $\Phi^\vee$;
- 2) если $p = P_1$, то порядок вычисления сверток не имеет значения (предпочтение можно отдать $\Phi^\wedge$);
- 3) если $p = P_3$, то начинать с вычисления свертки $\Phi^\wedge$.

Статистическая справедливость этого утверждения следует из справедливости утверждения 2.

Утверждение 4. В качестве переменной $v \in V_i^*$ при выполнении свертки $[*v]$ формулы $\Phi_i^*(V_i^*)$ целесообразно выбирать переменную с максимальным числом вхождений в формулу $\Phi_i^*(V_i^*)$.

Это утверждение статистически обосновано, так как в этом случае в большей степени упрощается формула $\Phi_{i+1}^*(V_{i+1}^*)$.

Описание алгоритма. Будем полагать, что исходными данными для описываемого алгоритма являются:

1) формула $\varphi(V)$ в исчислении высказываний с множеством V переменных, трактуемая как $\forall$ - замкнутая;

2) априорные вероятности P_0, P_1 и P_3 значений истинности $\forall$ - замкнутой формулы $\varphi(V)$.

Конкретизируем для определенности базис логических примитивов $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ и польскую инверсную запись (ПОЛИЗ) формулы $\varphi(V)$. Результатом выполнения алгоритма должно быть истинностное значение $tv \in \{0, 1, 3\}$ $\forall$ - замкнутой формулы $\varphi(V)$.

Алгоритм определения значения истинности $\forall$ - замкнутой формулы в исчислении высказываний.

1. Найти $p = \max(P_0, P_1, P_3)$.
2. Если $p = P_0$, то перейти к шагу 3; иначе – к шагу 7.
3. $clor(\varphi(V)/h)$.
4. Если $h=0$, перейти к шагу 5; иначе – к шагу 6.
5. Положить $l=0$ и перейти к шагу 11.
6. $cland(\varphi(V)/l)$ и перейти к шагу 11.
7. $cland(\varphi(V)/l)$.
8. Если $l=1$, перейти к шагу 9; иначе – к шагу 10.
9. Положить $h=1$ и перейти к шагу 11.
10. $clor(\varphi(V)/h)$.
11. Положить $tv = 2l + h$.
12. Конец.

Здесь $cland(\varphi(V)/l)$ и $clog(\varphi(V)hl)$ представляют процедуры $\wedge$ - свертки и $\vee$ - свертки формулы $\varphi(V)$ соответственно.

Работу алгоритма проиллюстрируем на трех примерах.

Пример 1. Рассмотрим формулу, приведенную в работе [3]:

$$(((q \rightarrow r) \wedge (p \vee (r \rightarrow t))) \wedge (q \vee (t \rightarrow s))) \rightarrow ((p \wedge \neg (q \rightarrow \neg t)) \vee (r \rightarrow ((q \rightarrow (s \vee r)) \wedge s))).$$

Эта формула в ПОЛИЗе имеет следующий вид:

$$\Phi(p, q, r, s, t) = qr \rightarrow prt \rightarrow \vee \wedge qts \rightarrow \vee \wedge pqt \neg \rightarrow \neg \wedge rqs r \vee \rightarrow s \wedge \rightarrow \vee \rightarrow .$$

Будем полагать, что эта формула с наибольшей вероятностью является общезначимой (т.е. P_3 принимает максимальное значение).

При этих условиях будем вычислять вначале $\Phi^\wedge$. Вектор кратностей вхождения переменных p, q, r, s и t в исходную формулу имеет вид $\langle 2, 4, 4, 3, 3 \rangle$, поэтому для свертки выбираем переменную q с кратностью $k(q) = 4$.

Положим $\Phi_0^\wedge(p, q, r, s, t) = \Phi(p, q, r, s, t)$. Тогда

$$R([q/0]\Phi_0^\wedge(p, q, r, s, t)) = prt \rightarrow \vee ts \rightarrow \wedge rs \rightarrow \rightarrow ,$$

$$R([q/1]\Phi_0^\wedge(p, q, r, s, t)) = rp rt \rightarrow \vee \wedge pt \wedge rs r \vee s \wedge \rightarrow \vee \rightarrow \text{ и}$$

$$\Phi_1^\wedge(p, r, s, t) = prt \rightarrow \vee ts \rightarrow \wedge rs \rightarrow \rightarrow rp rt \rightarrow \vee \wedge pt \wedge rs r \vee s \wedge \rightarrow \vee \rightarrow \wedge .$$

Вектор кратностей вхождения переменных p, r, s и t имеет вид $\langle 3, 6, 4, 4 \rangle$, поэтому для свертки выбираем переменную r с кратностью $k(r)=6$.

$$\text{Имеем } R([r/0]\Phi_1^\wedge(p, r, s, t)) = 1,$$

$$R([r/1]\Phi_1^\wedge(p, r, s, t)) = pt \vee ts \rightarrow \wedge s \rightarrow pt \vee pt \wedge s \vee \rightarrow \wedge$$

$$\text{и } \Phi_2^\wedge(p, s, t) = pt \vee ts \rightarrow \wedge s \rightarrow pt \vee ts \rightarrow \wedge pt \wedge s \vee \rightarrow \wedge .$$

Вектор кратностей вхождения переменных p, s и t имеет вид $\langle 3, 3, 4 \rangle$, поэтому для свертки выбираем переменную s с кратностью $k(s)=4$. Имеем

$$R([t/0]\Phi_2^\wedge(p, s, t)) = ps \rightarrow ps \rightarrow \wedge , \quad R([t/1]\Phi_2^\wedge(p, s, t)) = ss \rightarrow ps \vee \wedge \text{ и}$$

$$\Phi_3^\wedge(p, s) = ps \rightarrow ps \rightarrow \wedge ss \rightarrow ps \vee \wedge \wedge .$$

Вектор кратностей вхождения переменных p и s имеет вид $\langle 3, 5 \rangle$, поэтому для свертки выбираем переменную s с кратностью $k(s)=5$.

$$\text{Имеем } R([s/0]\Phi_3^\wedge(p, s)) = p \neg p \neg \wedge p \wedge , \quad R([s/1]\Phi_3^\wedge(p, s)) = 1 \quad \text{и} \\ \Phi_4^\wedge(p) = p \neg p \neg \wedge p \wedge .$$

Выполнив свертку по переменной p , получим $\Phi_5^\wedge() = \Phi^\wedge = 0$.

Вычислим теперь $\Phi^\vee$. Имеем

$$\Phi_1^\vee(p, r, s, t) = prt \rightarrow \vee ts \rightarrow \wedge rs \rightarrow \rightarrow rp rt \rightarrow \vee \wedge pt \wedge rs r \vee s \wedge \rightarrow \vee \rightarrow \vee ,$$

$$\Phi_2^\vee() = \Phi^\vee = 1 .$$

Итак, значение истинности $tv(\Phi(V)) = 1$ для примера 1. Это означает, что формула $\Phi(V)$ является нейтральной, т.е. $F_0^{-1}(\Phi(V)) \neq \emptyset$ и $F_1^{-1}(\Phi(V)) \neq \emptyset$. Здесь $F_\sigma^{-1}(\Phi(V))$, $\sigma \in \{0,1\}$ означает множество наборов значений переменных из V , при которых функция F , описываемая формулой $\Phi(V)$, принимает значение σ .

Теперь можно решать задачу нахождения $F_\sigma^{-1}(\Phi(V))$. Для рассмотренного примера имеем $F_0^{-1}(\Phi(p, q, r, s, t)) = \{\langle 01101 \rangle, \langle 10100 \rangle, \langle 11100 \rangle\}$, $F_1^{-1}(\Phi(p, q, r, s, t)) = B^5 - F_0^{-1}(\Phi(p, q, r, s, t))$.

$$\text{Здесь } B = \{0,1\}, \quad B^5 = B \times B \times B \times B \times B .$$

Пусть $|\Phi_i^*|$ характеризует сложность формулы (число символов в ПОЛИЗе), $*$ $\in \{\wedge, \vee\}$, $i \in \{0, 1, \dots, e\}$, e указывает заключительный шаг $*$ -свертки.

Для рассмотренного примера имеем следующие последовательности $\langle |\Phi_0^\wedge|, |\Phi_1^\wedge|, \dots, |\Phi_5^\wedge| \rangle = \langle 33, 33, 19, 15, 7, 1 \rangle$, $\langle |\Phi_0^\vee|, |\Phi_1^\vee|, |\Phi_2^\vee| \rangle = \langle 33, 33, 1 \rangle$. На первом шаге сложность формулы не изменилась, а затем сложность формулы монотонно уменьшается.

Пример 2. Формула $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ входит как аксиома одной из аксиоматических систем, описывающих классическое исчисление предикатов первого порядка. Будем полагать эту формулу общезначимой с максимальной вероятностью P_3 . Эта формула в ПОЛИЗе имеет следующий вид: $pqr \rightarrow \rightarrow pq \rightarrow pr \rightarrow \rightarrow \rightarrow$.

При этих условиях будем вычислять вначале $\Phi^\wedge$. Вектор кратностей вхождения переменных в эту формулу имеет вид $\langle 3, 2, 2 \rangle$, поэтому выбираем для свертки переменную P с кратностью $k(p) = 3$.

Положим $\Phi_0^\wedge(p, q, r) = \Phi(p, q, r)$. Тогда $R([p/0]\Phi_0^\wedge(p, q, r)) = 1$, $R([p/1]\Phi_0^\wedge(p, q, r)) = 1$ и $\Phi_1^\wedge() = \Phi^\wedge = 1$. Очевидно, что в силу $\Phi^\wedge \leq \Phi^\vee$, имеем $\Phi^\vee = 1$.

Итак, для примера 2 $tv(\Phi(V)) = 1/1 = 3$. Это означает, что формула из примера 2 является общезначимой.

Пример 3. Будем полагать, что формула в ПОЛИЗе имеет вид: $pqr \rightarrow \rightarrow pq \rightarrow pr \rightarrow \rightarrow \rightarrow \neg$, а максимальное значение вероятности имеет p_0 .

При этих условиях будем вычислять вначале $\Phi^\vee$. Очевидно, что $\Phi^\vee = 0$ и, в силу $\Phi^\wedge \leq \Phi^\vee$, имеем $\Phi^\wedge = 0$.

Итак, для примера 3 $tv(\Phi(V)) = 0/0 = 0$. Это означает, что формула из примера 3 является противоречивой.

Предложенный подход к определению значения истинности $\forall$ -замкнутой логической формулы в исчислении высказываний представляется перспективным, поскольку операции $\wedge$ -свертки и $\vee$ -свертки выполняются эффективно. Кроме этого, на базе этого подхода можно предложить эффективный алгоритм поиска корней уравнений $\Phi(V) = 1$ или $\Phi(V) = 0$. И, наконец, предложенный подход для исчисления высказываний может быть обобщен на исчисление предикатов первого порядка, что и составит предмет дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Чень Ч. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем / Ч. Чень, Р. Ли. — М: Наука, 1983. — 360 с.
2. Тейз А. Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию / А. Тейз, П. Грибомон, Ж. Луи. — М: Мир, 1990. — 432 с.
3. Aguilera G. Reductions for Non-Clausal Theorem Proving / G. Aguilera, I.P. de Guzman, M. Ojeda-Aciego // Theoretical Computer Science. — V. 266. — № 1-2. — 2001. — P. 81–112.

Поступила в редакцию 12.10.2005 г.