

УДК 519.873

А.И. Песчанский, доцент, канд. физ.-мат. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: Rlgs@mail.ru

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПО НАРАБОТКЕ ЦЕПОЧКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Построена полумарковская модель функционирования системы с последовательной структурой с учетом технического обслуживания по наработке. Найдены стационарные показатели качества функционирования системы, определены оптимальные сроки проведения профилактического обслуживания.

Одним из методов повышения надежности и эффективности функционирования сложных технических систем является их техническое обслуживание. Обзор литературы по данной проблематике можно найти, например, в работах [1-3]. В частности, в работе [1] исследуется стратегия технического обслуживания по наработке цепочки последовательно соединенных элементов с использованием теории регенерирующих процессов. Целью данной статьи является решение подобной задачи с помощью теории полумарковских процессов с дискретно–непрерывным множеством фазовых состояний. Основной трудностью при использовании этого метода исследования является определение стационарного распределения вложенной цепи Маркова. Представляет интерес найти стационарное распределение в явном виде, что позволит эффективно использовать аппарат полумарковских процессов в задачах исследования различных стратегий технического обслуживания систем.

Рассматривается система, состоящая из N последовательно соединенных технологических ячеек (ТЯ). Время безотказной работы i -ой ТЯ – случайная величина (СВ) α_i с функцией распределения $F_i(t) = P(\alpha_i \leq t)$ и плотностью распределения $f_i(t), i = \overline{1, N}$, время восстановления (аварийного) – СВ β_i . СВ α_i и β_i предполагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания $M\alpha_i$ и $M\beta_i$. Индикация отказа ТЯ происходит мгновенно. В момент отказа i -ой ТЯ остальные ТЯ отключаются. После возобновления работы системы отключенные ТЯ включаются в работу с тем же уровнем работоспособности, на котором их застало отключение. Если суммарная наработка системы достигает уровня τ , тогда проводится техническое обслуживание (ТО) всей системы, время проведение которого

СВ β_p . Предполагается, что после аварийного восстановления, так и после ТО, ТЯ полностью обновляют свои надежностные характеристики.

Требуется определить уровень наработки τ^* , при котором показатели качества функционирования системы принимают оптимальные значения. В данной работе проводится исследование описанной стратегии ТО по следующим стационарным показателям качества функционирования [1]: K_u – стационарный коэффициент технического использования, S – средний удельный доход, приходящийся на единицу календарного времени, C – средние удельные затраты, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования системы.

Функционирование системы опишем полумарковским процессом $\xi(t)$ с дискретно–непрерывным фазовым пространством состояний [4]. Введем следующую кодировку физических состояний ТЯ: 1 – ТЯ находится в работоспособном состоянии, 0 – в отказовом состоянии. Фазовое пространство состояний системы имеет вид

$$E = \left\{ i\bar{1}^{(i)} \bar{x}^{(i)} u, i\bar{1}^{(i)} \bar{x}^{(i)} u, i = \overline{1, N} \right\} \cup \{0\} \cup \{1\},$$

где $\bar{1}$ – N -мерный вектор, все компоненты которого равны 1, $\bar{1}^{(i)}$ – N -мерный вектор, i -ая компонента которого равна 0, а остальные 1, $\bar{x}^{(i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N)$;

0 – суммарная наработка системы достигла уровня τ , началось ТО системы;

1 – ТО системы завершено, работа системы начинается сначала;

$i\bar{1}^{(i)} \bar{x}^{(i)} u, 0 < u < \tau$ – произошел отказ i -ой ТЯ и началось ее аварийное восстановление, время до ближайшего отказа j -ой ТЯ равно x_j , величина суммарной наработки системы равна u ;

$i\bar{1}^{(i)} \bar{x}^{(i)} u, 0 < u < \tau$ – закончилось восстановление i -ой ТЯ, система возобновила работу, время до ближайшего отказа j -ой ТЯ равно x_j , величина суммарной наработки системы равна u .

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n, n \geq 0\}$:

$$P_0^1 = 1, \quad P_1^0 = \prod_{k=1}^N \overline{F_k}(\tau), \quad P_1^{i\bar{1}^{(i)} \bar{x}^{(i)} u} = f_i(u) \prod_{k \neq i} f_k(u + x_k), \quad x_k > 0, u < \tau, i = \overline{1, N},$$

$$P_{i\bar{1}^{(i)} \bar{x}^{(i)} u}^{i\bar{1}^{(i)} \bar{x}^{(i)} u} = 1, i = \overline{1, N},$$

$$P_{i\bar{1}}^{i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} \begin{smallmatrix} y \\ x \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} u = f_i(\omega - u), \alpha_i < x_{\min}^i \wedge (\tau - u), y_k = x_k - \omega + u, i = \overline{1, N}; k \neq i,$$

$$P_{i\bar{1}}^{i\bar{1} \begin{smallmatrix} (j) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} \begin{smallmatrix} y \\ x \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} u = f_i(x_j + y_i), x_j = x_{\min}^i < (\tau - u) \wedge \alpha_i,$$

$$y_k = x_k - x_j, k \neq i, j, \omega = u + x_j; i, j = \overline{1, N}, j \neq i,$$

$$P_{i\bar{1}}^0 \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u = \overline{F_i}(\tau - u), \tau - u < x_{\min}^i \wedge \alpha_i, i = \overline{1, N},$$

где $\wedge$ — знак минимума, $x_{\min}^i = \bigwedge_{k \neq i} x_k$.

Времена пребывания на переходах ВЦМ определяются формулами:

$$\theta_0 = \beta_p, \theta_1 = \tau \wedge \bigwedge_{k=1}^N \alpha_k, \theta_{i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u = \beta_i, \theta_{i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u = \alpha_i \wedge (\tau - u) \wedge x_{\min}^i.$$

Найдем стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$. Обозначим через ρ_0 и ρ_1 значения стационарного распределения на состояниях 0 и 1, а через $\rho(i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u)$, $\rho(i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u)$ — стационарные плотности пребывания в состояниях $i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u$, $i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u$ соответственно. Система интегральных уравнений для стационарных распределений имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u) = \sum_{j=1}^N \int_0^u f_j(t + x_j) \rho(j\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (j) \\ - \end{smallmatrix}} (u-t)) dt + f_i(u) \prod_{k \neq i} f_k(u + x_k), u < \tau, i = \overline{1, N}, \\ x_i = 0 \\ \rho(i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u) = \rho(i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u), \rho_1 = \rho_0, \\ \rho_0 = \rho_1 \prod_{k=1}^N \overline{F_k}(\tau) + \sum_{i=1}^N \int_0^\tau \overline{F_i}(\tau - u) du \int_{\tau-u}^\infty \dots \int_{\tau-u}^\infty \rho(i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u) d\bar{x}^{(i)}, \\ \rho_0 + \rho_1 + \sum_{i=1}^N \int_0^\tau du \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \rho(i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u) d\bar{x}^{(i)} + \sum_{i=1}^N \int_0^\tau du \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \rho(i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u) d\bar{x}^{(i)} = 1. \end{array} \right. \quad (1)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решение системы (1) определяется формулами

$$\rho(i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u) = \rho(i\bar{1} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (i) \\ - \end{smallmatrix}} x u) = \rho_1 h_i(u) \prod_{k \neq i} v_k(x_k, u), i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где $h_i(u) = \sum_{n=1}^\infty f_i^{*(n)}(u)$ — плотность функции восстановления $H_i(u)$ ре-

куррентного потока, порожденного СВ α_i ,

$v_k(x_k, u) = f_k(u + x_k) + \int_0^u f_k(u + x_k - s) h_k(s) ds$ — плотность функции распре-

деления прямого остаточного времени процесса восстановления, порожденного СВ α_k . Постоянная ρ_1 определяется из условия нормировки:

$$\rho_1 = \left[2 \left(1 + \sum_{i=1}^N H_i(\tau) \right) \right]^{-1}.$$

Для рассматриваемой системы с выбранной стратегией технического обслуживания множество работоспособных состояний E_+ и множество отказов состояний E_- имеют соответственно вид

$$E_+ = \{1, i \bar{1} x^{-(i)} u, i = \overline{1, N}\}, \quad E_- = \{0, i \bar{1} x^{-(i)} u, i = \overline{1, N}\}.$$

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+ , среднее стационарное время восстановления T_- и стационарный коэффициент технического использования K_u найдем по формулам [4]

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(x) \rho(dx)}{\int_{E_+} \rho(dx) P(x, E_-)}, \quad T_- = \frac{\int_{E_-} m(x) \rho(dx)}{\int_{E_-} \rho(dx) P(x, E_-)}, \quad K_u = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \quad (3)$$

где $\rho(\cdot)$ – стационарное распределение, $P(x, dy)$ – вероятности переходов ВЦМ, $m(x)$ – средние времена пребывания в состояниях системы.

Средние времена пребывания в состояниях определяются формулами:

$$m(0) = M\beta_p, \quad m(1) = M\left(\bigwedge_{i=1}^N \alpha_i \wedge \tau\right) = \int_0^\tau \prod_{i=1}^N \bar{F}_i(t) dt, \quad m(i \bar{1} x^{-(i)} u) = M\beta_i, \\ m(i \bar{1} x^{-(i)} u) = M(\alpha_i \wedge x_{\min i}^i \wedge (\tau - x)) = \int_0^{x_{\min i}^i \wedge (\tau - x)} \bar{F}_i(t) dt, i = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Учитывая формулы (2) и (4), преобразуем интегралы в формулах (3):

$$\int_{E_+} m(z) \rho(dz) = \rho_1 \int_0^\tau \prod_{i=1}^N \bar{F}_i(t) dt + \rho_1 \sum_{i=1}^N \int_0^\tau h_i(u) du \int_{R_+^{N,i}} \prod_{k \neq i} v_k(x_k, u) d\bar{x}^{x_{\min i}^i \wedge (\tau - x)} \int_0^\tau \bar{F}_i(t) dt = \\ = \rho_1 \left(\int_0^\tau \prod_{i=1}^N \bar{F}_i(t) dt + \sum_{i=1}^N \int_0^\tau h_i(u) du \int_u^\tau \bar{F}_i(s - u) \prod_{k \neq i} \bar{V}_k(s - u, u) ds \right) = \\ = \rho_1 \left(\int_0^\tau \prod_{i=1}^N \bar{F}_i(t) dt + \sum_{i=1}^N \int_0^\tau ds \int_0^s h_i(u) \bar{F}_i(s - u) \prod_{k \neq i} \bar{V}_k(s - u, u) du \right) = \rho_1 \tau.$$

$$\int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-) = \int_{E_+} \rho(dz) = \rho_1 \left(1 + \sum_{i=1}^N H_i(\tau) \right).$$

$$\int_{E_-} m(z) \rho(dz) = \rho_0 \left(M\beta_p + \sum_{i=1}^N M\beta_i H_i(\tau) \right).$$

Следовательно,

$$T_+ = \frac{\tau}{1 + \sum_{i=1}^N H_i(\tau)}, \quad T_- = \frac{M\beta_p + \sum_{i=1}^N M\beta_i H_i(\tau)}{1 + \sum_{i=1}^N H_i(\tau)}, \quad K_u = \frac{\tau}{M\beta_p + \tau + \sum_{i=1}^N M\beta_i H_i(\tau)}. \quad (5)$$

Определим экономические показатели функционирования системы на бесконечном интервале времени. Средняя прибыль S в единицу календарного времени и средние затраты C в единицу времени исправного функционирования системы найдем по формулам

$$S = \frac{\int_E m(z) f_s(z) \rho(dz)}{\int_E m(z) \rho(dz)}, \quad C = \frac{\int_{E_+} m(z) f_c(z) \rho(dz)}{\int_{E_+} m(z) \rho(dz)}, \quad (6)$$

где $f_s(z)$, $f_c(z)$ – функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Введем следующие обозначения: c_0 – прибыль, получаемая за единицу времени исправного функционирования системы; c_i – затраты за единицу времени аварийного восстановления i -ой ТЯ, $i = \overline{1, N}$; c_p – затраты за единицу времени ТО системы. В этом случае функции $f_s(z)$ и $f_c(z)$ имеют вид:

$$f_s(z) = \begin{cases} c_0, z \in \left\{ 1, i \overline{1} x^{-(i)} u, i = \overline{1, N} \right\}, \\ -c_i, z \in \left\{ i \overline{1}^{-(i)} x^{-(i)} u, i = \overline{1, N} \right\}, \\ -c_p, z \in \{0\}, \end{cases} \quad f_c(z) = \begin{cases} 0, z \in E_+, \\ i \overline{1}^{-(i)} x^{-(i)} u, i = \overline{1, N}, \\ c_p, z \in \{0\}, \end{cases} \quad (7)$$

С помощью формул (2), (4), (6) и (7) находятся стационарные экономические показатели функционирования системы:

$$S = \frac{c_0 \tau - c_p M\beta_p - \sum_{i=1}^N c_i M\beta_i H_i(\tau)}{\tau + M\beta_p + \sum_{i=1}^N M\beta_i H_i(\tau)}, \quad C = \frac{c_p M\beta_p + \sum_{i=1}^N c_i M\beta_i H_i(\tau)}{\tau}. \quad (8)$$

Отметим, что полученные расчетные формулы совпадают с соответствующими формулами работы [1].

Оптимальные наработки τ^* до проведения ТО системы, при которых показатели K_u , S , C достигают оптимальных значений, удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\tau h_i(\tau) - H_i(\tau)) M\beta_i &= M\beta_p, \\ \sum_{i=1}^N (c_i + c_0)(\tau h_i(\tau) - H_i(\tau)) M\beta_i + M\beta_p \sum_{i=1}^N (c_i - c_p) h_i(\tau) M\beta_i + \\ + \sum_{i=1}^N M\beta_i H_i(\tau) \sum_{m=1}^N M\beta_m h_m(\tau) (c_m - c_i) &= (c_0 + c_p) M\beta_p, \\ \sum_{i=1}^N (\tau h_i(\tau) - H_i(\tau)) c_i M\beta_i &= c_p M\beta_p. \end{aligned} \quad (9)$$

Если каждое из уравнений (9) имеет единственный корень, то он определяет оптимальную величину наработки. Если уравнение имеет несколько корней, то выбирается тот, при котором соответствующая функция (5), (8) принимает наилучшее значение. Если уравнение не имеет корней, то проводить техническое обслуживание нецелесообразно.

Предложенная методика определения показателей качества функционирования системы и нахождения оптимальных сроков проведения профилактических работ может быть перенесена на другие стратегии технического обслуживания сложных систем, что составит предмет дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Каштанов В.А. Теория надежности сложных систем (теория и практика) / В.А. Каштанов, А.И. Медведев. — М.: Европейский центр по качеству, 2002. — 470 с.
2. Байхельт Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф.Байхельт, П. Франкен. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.
3. Барзилович Е.Ю. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем / Е.Ю. Барзилович, В.А. Каштанов. — М: Сов. радио, 1971. — 272 с.
4. Королюк В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. — К.: Наук. думка, 1982. — 236 с.

Поступила в редакцию 10.11.2005 г.