

УДК 51. 681

А.Ф. Хрусталеv,

О.Р. Ластовенко,

А.А. Ярошенко

Севастопольский национальный технический университет

Yaroshenko_e_a@mail.ru

ОБ АВТОДОРОЖНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Для некоторых математических моделей приводятся транспортные интерпретации, позволяющие более глубоко понять связь между общенаучными и специальными дисциплинами.

Ключевые слова: производная-скорость, интеграл-путь.

Постановка проблемы. В документах МОН Украины по совершенствованию образования сделан акцент на важность полноценной реализации межпредметных связей.

Такое внимание к расширению и углублению содержания связей между предметами объясняется тем, что в жизни всё намного сложнее, чем в вузе: сначала математика, затем химия, автотранспортные дисциплины... В практической деятельности при решении различных задач необходимо уметь применять весь запас знаний. Активное использование в процессе обучения межпредметных связей будет способствовать овладению студентами метапредметным умением оперировать знаниями из разных учебных дисциплин.

Подчеркнем, что поставленная проблема тесно связана с Национальной доктриной развития образования в Украине в XXI веке, которая определяет как приоритетное его дальнейшее совершенствование, и потому является актуальной.

Анализ последних исследований и публикаций.

Для адекватного понимания мира, в котором мы живем, зачастую недостаточно знаний, полученных не только в школе, но и в университете. И, это во многом объясняется тем, что в учебных заведениях мы изучаем разрозненные предметы (математические, химические, специальные...), не устанавливая должной связи между ними. В учебном процессе необходимо дальнейшее расширение и углубление содержания межпредметных связей, нужен новый методологический подход – метапредметный [1 – 5].

По компетентному мнению профессора Ю. В. Громыко принцип «метапредметности» состоит в обучении общим приемам мыслительной деятельности, которые лежат над предметами, поверх предметов, но которые воспроизводятся при работе с любым предметным материалом.

Укажем, что первым и наиболее известным метапредметом является «Метафизика» Аристотеля. «Метафизика» в переводе с древнегреческого означает «то, что после физики». Метапредмет – это то, что стоит за предметом, но находится с ним в тесной связи и дает возможность более глубоко понять сущность предмета.

Цель данной статьи – транспортная интерпретация таких математических моделей, как функция, производная, интеграл и формула Ньютона-Лейбница.

Изложение основного материала статьи.

Многие исследователи отмечают, что научный прогресс особенно в XX веке привел к разобщенности учебных дисциплин. Появились образовательные программы ускоренной подготовки специалистов по отдельным областям знания. И хотя во второй половине XX века в учебный процесс стали вводиться интегрированные факультативные курсы, разделение знаний об окружающем мире на отдельные предметы не компенсируется указанной интеграцией. Знания учащихся остаются разрозненными, делятся на «математические», «химические», технические и др.

Изучение многообразия явлений реального мира приводит к выводу о его единстве, которое обнаруживается в поразительной аналогичности математических моделей, относящихся к разным областям знаний. Например, такая математическая модель как функция $y=f(x)$ описывает многие транспортные процессы.

Действительно, когда мы наблюдаем за движением автомашины, то обнаруживаем, что одни величины, участвующие в этом процессе оказываются постоянными (длина кузова, количество колес и т.п.), другие же изменяются: увеличивается пройденный путь в зависимости от времени, уменьшается количество топлива в баке, изменяется скорость. В этом случае путь и скорость зависят от времени, что записывают в виде $s = s(t)$, $v = v(t)$, а математическим выражением такой связи, её «математическим образом» или более точно и современно «математической моделью» является функция $y=f(x)$. Итак, в нашей интерпретации переменная x – это время t , y – путь s , а $v = v(t)$ – мгновенная скорость движения.

Введем это понятие, используя соображения выдающегося педагога и математика, академика АПН СССР А.Я. Хинчина, изложенные им в учебнике «Краткий курс математического анализа».

«Пусть нас интересует вопрос о том, с какой скоростью в данный момент движется некоторая автомашина. На этот вопрос часто отвечают: «со скоростью 40 км в час». Что это значит?

Может быть, этим хотят сказать, что машина проходит в час 40 км? Но есть ли это ответ на поставленный нами вопрос? Ведь мы хотим знать, какова скорость машины *в данный момент* времени, а в течение часа машина, вероятно, много раз изменит скорость, то убыстряя, то замедляя ход; и если мы знаем, что за весь час она пройдет 40 км, то это еще ничего не говорит нам о том, как движется она вот сейчас, в данный момент.

Могут сказать, что вопрос о мгновенной скорости неважен, что важен лишь итог – какое расстояние машина пройдет за час. Но это неверно. Вот машина проезжает по мосту, и дорожный знак показывает, что здесь не разрешается скорость свыше 10 км в час. Милиционер останавливает водителя и налагает на него взыскание за превышение дозволенной скорости: оказывается, машина шла со скоростью 20 км в час».

Так что же такое «мгновенная скорость»? Мы знаем, что, в случае равномерного движения, скорость постоянная, и потому она совпадает с мгновенной в любой момент времени. При неравномерном движении мы можем рассматривать малые промежутки времени Δt , за которые машина совершает малые перемещения Δs . За такое время скорость существенно не изменяется, практически остается постоянной, примерно равной средней скорости $\Delta s/\Delta t$. Именно поэтому естественно мгновенную скорость в момент времени t определить как $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta s/\Delta t) = v(t)$.

Итак, если $s = f(t)$, то $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$, т. е. производная от пути по времени равна мгновенной скорости движения автомашины.

Теперь можно решить и обратную задачу: определить по известной зависимости скорости от времени путь, пройденный машиной за промежуток времени от момента t_1 до момента t_2 , который

равен определенному интегралу $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

Исходя из автодорожной интерпретации функции, её производной и интеграла можно наглядно установить формулу Ньютона – Лейбница, являющуюся центральной формулой математики, которая связывает интегральное исчисление с дифференциальным и определенный интеграл с неопределенным. Эта связь может быть установлена при помощи следующей аналогии: допустим, что скорость движения автомобиля, моделируемого материальной точкой, $v = v(t)$. Тогда путь, пройденный за промежуток

времени от момента t_1 до момента t_2 , равен определенному интегралу $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$. С другой стороны, этот

же путь может быть найден иным способом, если ввести в рассмотрение зависимость пути от времени

$s = s(t)$, и, очевидно, будет равен $s(t_2) - s(t_1)$. Поэтому $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = s(t_2) - s(t_1)$, причем $s'(t) = v(t)$

Теперь отвлечёмся от конкретного содержания подынтегральных функций и их первообразных и запишем формулу Ньютона – Лейбница вообще для функции $f(x)$ и её первообразной $F(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x).$$

Уже из соображений, при помощи которых мы получили эту формулу, видно, что она математически выражает определенную глубокую связь, существующую в объективной реальности. Эта формула является прекрасным и весьма важным примером того, как математика отражает в своих понятиях и теориях объективные закономерности.

По нашему мнению, такого рода пояснения (интерпретации) будут достаточно убедительными и вполне приемлемыми в технических университетах.

При таком подходе в полном объеме будет учитываться особенность аудитории по профилю подготовки автомобилистов.

Напомним, что математическая модель – это приближенное описание средствами математики объектов в самом широком смысле. Так, на карте автомобильных дорог, которой пользуются водители, путь, например от Севастополя до Симферополя, представляется ломаной линией, состоящей из отрезков. Это – графическая (геометрическая) модель дороги. Можно построить и математическую (аналитическую) модель той же дороги, представив ломаную линию в виде совокупности систем,

состоящих из уравнений и неравенств. Но и эта модель лишь приближенно будет отображать реальную дорогу.

Отметим, что в журнале [6, с. 16, рис. 5] в копии протокола ГАИ используется математическая модель в виде эмпирической формулы расчета скорости V_a движения транспортного средства по длине следа торможения (рисунок 1).

Обратим внимание на последнюю строку протокола (в нашем тексте рисунку присвоен номер 5 оригинала), в которой сказано, что скорость перед торможением составляет **41,8 м**. Этот вывод противоречит свойству: размерность скорости равна LT^{-1} , где L размерность длины, T размерность времени. Ведь скорость должна выражаться, например, в км/час или м/с и т.д., и такой факт необходимо указывать в эмпирической формуле

$$V_a(\text{км/ч}) = 1,8 \times t_3(\text{сек}) \times j(\text{м/с}^2) + \sqrt{26 \times j(\text{м/с}^2) \times S_{ю}(\text{м})}, \quad (1)$$

в которой в круглых скобках записываются конкретные имена величин. Если для величины имя не указано, то она безразмерная. В приведенной формуле величины 1,8 и 26 – безразмерные. По классификации, используемой в информатике, модель (1) – информационная, которая в представленном виде является физико-математической, поскольку в ней фигурируют не только отвлеченные числа, но и указанные в круглых скобках имена физических величин. Обозначения V_a , t_3 , j выражают численные значения соответствующих размерных величин, имена которых при вычислениях игнорируются.

В такой модели все действия выполняются по правилам математики и в результате получается безразмерная величина (число), к которой в ответе приписывается имя, указанное в скобках, в рассматриваемом случае км/ч. Итак, ответ: скорость транспортного средства (ТС) непосредственно перед торможением примерно равна **41,8 км/час**, или даже лучше с двумя значащими цифрами **42 км/ч**: результат не может быть точнее тех приближенных предпосылок, на которых он основан. При выборе степени точности величин в условиях задач, следует руководствоваться принципом равной точности, согласно которому точности всех величин должны быть согласованы друг с другом и ни одна из них не должна быть недостаточной.

Имея это в виду отметим, что безразмерные величины в формуле (1) определены с точностью до двух значащих цифр, и результат вычислений точнее их быть не может. А вот данные 0,3 с и 9 м следует измерять с точностью до двух значащих цифр и записывать соответственно 0,30 с и 9,0 м. Заметим, что физики не рекомендуют использовать приближенные данные с одной значащей цифрой, как очень грубые.

Подчеркнем, что в прикладных задачах приближенные числа – это и сырье, и продукция реальных вычислений.

30.08.2008	Протокол									
Общие определения: Тип транспортного средства: Легковой а/м без усилителя тормозов Тип дорожного покрытия: Сухой асфальтобетон Степень загрузки трансп ср-ва: Без загрузки										
Расчет скорости движения транспортного средства по длине следа торможения $V_a = 1,8 \times t_3 \times j + \sqrt{26 \times j \times S_{ю}}$ <table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">t_3</td> <td style="padding: 2px 10px;">- время нарастания замедления</td> <td style="padding: 2px 10px;">0,3 сек</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">j</td> <td style="padding: 2px 10px;">- замедление</td> <td style="padding: 2px 10px;">6,3 м/с²</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$S_{ю}$</td> <td style="padding: 2px 10px;">- длина следов торможения</td> <td style="padding: 2px 10px;">9 м</td> </tr> </table> Исходя из длины следов торможения 9 м скорость ТС перед торможением составляет 41,8 м		t_3	- время нарастания замедления	0,3 сек	j	- замедление	6,3 м/с ²	$S_{ю}$	- длина следов торможения	9 м
t_3	- время нарастания замедления	0,3 сек								
j	- замедление	6,3 м/с ²								
$S_{ю}$	- длина следов торможения	9 м								

Рисунок 1 – Бланк протокола

Сказанное свидетельствует о том, что, алгоритму, соответствующему эмпирической формуле, нужна физико-математическая модель с указанием для входящих в неё величин размерностей, которые при вычислениях игнорируются, при этом расчетная формула преобразуется в математическую модель.

В этом контексте подчеркнем, что «При решении задач в буквенной форме обычно все формулы без особой оговорки считаются *размерно однородными*, т.е. не связанными с определенными единицами измерения участвующих величин» [7, с. 44]. Но, если в формуле встречается размерная величина, выраженная числом, то размерная однородность нарушается. Например, формула свободного падения $s = gt^2/2$ размерно однородная, тогда как та же формула, записанная в виде $s = 4,90t^2$ такой не является. В последней формуле s должно быть выражено в метрах, а t в секундах.

Для того, чтобы в размерно неоднородной формуле перейти к другим единицам измерения достаточно преобразовать числовые размерные величины из одних размерностей в другие. Поскольку в рассмотренном выше примере $4,90\text{м/с}^2 = 17,6\text{ км/мин}^2$, то формула $s = 17,6t^2$ уже требует, чтобы s было выражено в км, а t – в минутах. Такую формулу лучше писать в виде $s(\text{км}) = 17,6 [t(\text{мин})]^2$.

Теперь воспользуемся высказываем лауреата Нобелевской премии Э. Ферми: Действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности. С этой целью в формуле (1) пренебрегая временем нарастания замедления, на основании анализа размерностей зависимость $V = f(a,s)$ представим в виде:

$$v = k\alpha^\alpha s^\beta, \quad (2)$$

где k – безразмерная величина. На основании (2) формула размерности примет вид:

$$LT^{-1} = (LT^{-2})^\alpha L^\beta = L^{\alpha+\beta} T^{-2\beta}.$$

Отсюда имеем систему $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -2\beta = -1 \end{cases}$, из которой следует: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ и из (2) следует:

$$v = k\sqrt{\alpha s}, \quad (3)$$

Здесь постоянную k можно определить без обращения к эксперименту на основании того, что ускорение a есть производная от скорости v по времени. Проще k можно найти, возведя обе части равенства (3) в квадрат, с последующим дифференцированием полученного равенства по времени. Тогда на основании (3) имеем: $v^2 = k^2 \alpha s$, $2vv' = k^2 \alpha s$ или $2va = k^2 \alpha v$, $k = \sqrt{2} k$ и $v = \sqrt{2\alpha s}$. Из последней формулы при $a=6,3\text{м/с}^2$, $s = 9,0\text{м}$ имеем $v = \sqrt{2 \cdot 6,3 \cdot 9,0} \approx 11$ (м/с) или $v \approx 40$ (км/ч). Этот результат несколько отличается от того, какой дает эмпирическая формула: 42 км/ч.

В заключение обратим внимание на необходимость строго соблюдать правило размерностей, вспомнив научно-педагогический анекдот, рассказанный много лет назад в журнале "КВАНТ" (№ 3, 1970, с. 33).

Однажды (дело происходило в начале 20 века) на заседании ученого совета университета выступил заведующий кафедрой богословия, который заявил, что студенты-физики очень несерьезно относятся к его предмету, невнимательны на лекциях и привел особенно возмутительный пример. Поднял я на лекции одного, который сам не слушал и другим не давал, и сказал ему:

"Молодой человек, я только что объяснил, что такое божественная сила. Повторите". "Божественная сила есть произведение божественной массы на божественное ускорение", сказал он. Разве это не возмутительно?

Следующим взял слово один из профессоров физики и сказал, что он, совершенно согласен с предыдущим оратором, что это действительно безобразие: студенты-физики обязаны знать, что при умножении божественной массы на божественное ускорение божественность войдет в произведение в квадрате. Следовательно, для получения божественной силы один лишь множитель должен быть божественным.

Этот анекдот, названный в журнале историческим, хорошо иллюстрирует известное правило: если при вычислениях или преобразованиях с именованными величинами размерности левой и правой частей равенства или неравенства различны или размерности слагаемых в алгебраической сумме не совпадают, то в решении допущена ошибка.

Выводы. Метапредметный подход к обучению – реальная возможность улучшать учебный процесс в соответствии с Национальной доктриной развития образования в Украине в XXI веке, которая определяет как приоритетное его дальнейшее совершенствование.

Перспективы дальнейших исследований. С целью формирования метапредметных навыков и умений у будущих специалистов, дальнейшее развитие содержания этой статьи заключается и в других интерпретациях математических моделей. Такая работа будет способствовать овладению студентами

обобщенным (метапредметным) умением оперировать знаниями из разных учебных дисциплин. А от этого во многом зависит уровень образования в целом.

Библиографический список использованной литературы

1. Фоменко И.А. Створення системи формування нового змісту освіти на основі принципів метапредметності / І.А. Фоменко [Электронный ресурс]. — Режим доступа: fomenko.edusite.ru/p35aa1.html/.
2. Устиловская А.А. Метапредмет «Задача» / А.А. Устиловская [Электронный ресурс]. — Режим доступа <http://www.eduscen.ru/?q=taxonomy/term/321>
3. Деркач М.И. Задача как учебный метапредмет / М.И. Деркач, Н.Н. Миленко, А.Ф. Хрусталеv // Вісн. СевНТУ. Сер. Механіка, енергетика, екологія: зб. наук. пр. — Севастополь, 2013. — Вип. 137. — С. 366–371.
4. Заторская С.В. О практических приложениях размерных величин / С.В. Заторская, Н.А. Панибратец, А.Ф. Хрусталеv // Методи удосконалення фундаментальної освіти в школах і ВНЗ: матеріали XVII міжнар. наук.-метод. конф., Севастополь, 17–21 верес. 2012 р. — Севастополь, 2012. — С. 42–45.
5. О вузовской лекции по математике / Е.Г. Бойко, М.И. Деркач, Ю.Е. Обжерин, А.Ф. Хрусталеv // Проблеми удосконалення фундаментальної освіти в школах і ВНЗ: матеріали XVIII міжнар. наук.-метод. конф., Севастополь, 23–27 верес. 2013 р. — Севастополь, 2013. — С. 3–11.
6. Сиденко А.М. Почему алгоритму всегда нужна математическая модель? Информатика. Все для учителя! / А.М. Сиденко. — Пилотный выпуск. Август 2010. — С. 10–16.
7. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей / А.Д. Мышкис. — М.: Книжный дом «Либроком», 2009. — 192 с.

Поступила в редакцию 09.01.2014 г.

Хрустальов О.Ф., Ластовенко О.Р., Ярошенко О.О. Про автодорожню інтерпретацію математичних моделей

Для деяких математичних моделей наводяться транспортні інтерпретації, що дозволяють більш глибоко зрозуміти зв'язок між загальнонауковими і спеціальними дисциплінами.

Ключові слова: похідна-швидкість, інтеграл-шлях.

Khrustalev A.F., Lastovenko O.R., Yaroshenko A.A. On the road interpretation of mathematical models

For some mathematical models are transport interpretation, allowing a deeper understanding of the link between scientific and special disciplines.

Keywords: derivative-velocity, integral-path.