

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Севастопольский государственный университет»

Политехнический институт

В.М. Прусов, Л.О. Наголюк,
Н.К. Корнеева

Методические указания
и контрольные задания
по теоретической механике

Севастополь
2015

УДК [531/534+621] (076)
ББК 22.21я73
П85

Р е ц е н з е н т ы:

К.П. Путилин, к.т.н, доцент
Э.Б. Фролова, доцент

П85 Методические указания и контрольные задания по теоретической механике. / М-во образования и науки РФ, ФГАОУ ВО «Севастоп. гос. ун-т» ; В. М. Прусов, Л. О. Наглюк, Н. К. Корнеева. - Севастополь: Изд-во СевГУ, 2015. – 68 с. : ил.

Цель методических указаний - оказать студентам помощь в выполнении РГР по теоретической механике.

В данном руководстве приведены описания контрольных заданий по теоретической механике, предусмотренных программой.

Представлены вопросы для самоконтроля и методические рекомендации к оформлению зачётных работ.

УДК [531/534+621] (076)
ББК 22.21я73

© ФГАОУ ВО Севастопольский
государственный
университет, 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебных планах указанных выше специальностей предусмотрен курс "Теоретическая механика".

Теоретическая механика — одна из фундаментальных общенаучных дисциплин физико-математического цикла.

Изучение теоретической механики имеет большое значение для познания и объяснения многих явлений окружающего нас мира.

Вместе с тем теоретическая механика является научным фундаментом многих областей современной техники, в том числе и атомной. Её законы и методы широко используются в таких важных инженерных и специальных дисциплинах как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, гидродинамика, теория турбин, теория автоматического регулирования и управления атомными энергетическими установками и др., которые изучаются в институте и формируют будущего инженера как специалиста.

Изучение теоретической механики даёт тот минимум фундаментальных знаний, на базе которых выпускник института сможет самостоятельно овладеть новейшими достижениями науки и техники, которые позволят ему не только умело эксплуатировать сложную современную атомную технику, но непрерывно совершенствовать и развивать её дальше.

В зависимости от рассматриваемых задач теоретическую механику принято разделять на три раздела:

1. статику (С);
2. кинематику (К);
3. динамику (Д).

Одним из важнейших видов самостоятельной работы студентов-заочников при изучении теоретической механики является выполнение зачётных контрольных заданий (расчётно-графических работ (РГР)) по узловым темам учебной программы. Они служат для закрепления и углубления знаний студентов основных положений теории, развития их навыков в решении разнообразных технических задач.

Учебными планами подготовки специалистов предусмотрены по одной РГР по каждому из трех упомянутых разделов курса. Прежде чем приступать к самостоятельному выполнению предлагаемых заданий, студент должен изучить основы теории соответствующего раздела, используя рекомендуемую литературу, список которой приведен ниже.

В теоретической механике широко используется богатый математический аппарат при исследовании тех или иных механических явлений. По-

этому для изучения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Но при изучении механики очень важно за математическим описанием механического явления видеть и понимать физическую сущность этого явления. В связи с этим особое внимание при изучении материала по тому или иному учебнику следует обращать на формулировки определений, законов, теорем и т. п., не зазубривать их, а добиваться понимания их смысла. Ни в коем случае нельзя пренебрегать доказательствами, без которых нельзя установить границы применения конечных выводов и формул. К тому же доказательства учат рассуждать, делать логические выводы, активизирует мыслительную деятельность будущего инженера на получение новых результатов в различных областях техники.

По каждому разделу курса заочник должен составить конспект и ответить на вопросы самоконтроля, что важно не только для успешного выполнения контрольных заданий, но и сдачи экзамена.

РГР должны быть выполнены аккуратно, сопровождаться краткими объяснениями производимых операций, ссылками на соответствующие законы и формулы. Предлагаемые задачи сначала нужно решать в общем виде, а затем численные расчёты производить с использованием вычислительных средств, своевременно представлять их на кафедру для проверки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

4. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002.
5. Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика.- К.: Выща школа, 1990, ч. 1-2.
6. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1971, ч. 1-2.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М: Наука, 1986.
8. Прусов В.М. Статика. - С.: СВМИ, 1994.
9. Прусов В.М., Ковригина В.В. Кинематика. - С.: СВМИ, 1996.
10. Прусов В.М., Макаренков С.Д. Руководство к выполнению расчётно-графических работ по теоретической механике с использованием ЭВМ. - С.: СВМИ, 1993.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предмет механики. Механическое движение — простейший вид движения материи. Система отсчёта. Механические взаимодействия между материальными телами. Сила как мера механического взаимодействия. Факторы, определяющие действие любой силы.

1.2. Упрощённые модели (абстракции) механики — реальные объекты, освобожденные от всех второстепенных свойств (материальная точка, абсолютно твердое тело, механическая система, сплошная среда).

1.3. Структура механики. Теоретическая механика.

1.4. Роль теоретической механики в системе подготовки инженеров ядерной энергетики и промышленности.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

11. Что изучает механика?

12. Что представляет собой механическое движение?

13. Что называется системой отсчёта?

14. Что понимают под механическими взаимодействиями между материальными телами? Что является мерой этих взаимодействий?

15. Какие упрощённые модели являются объектами изучения теоретической механики?

16. Назвать факторы, определяющие действие любой силы независимо от её физического характера?

РАЗДЕЛ 1. СТАТИКА

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

2.1. Равновесие тела - покой по отношению к неподвижной системе отсчёта. Система сил. Эквивалентные и уравновешенные системы сил. Равнодействующая. Две основные задачи статики.

2.2. Аксиомы статики.

3. СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

3.1. Основные виды связей: гладкая опорная поверхность, опора на ребро и углом на плоскость, цилиндрический шарнир и подшипник, опора на катки, гибкая связь, сферический шарнир и подпятник, невесомый стержень, шарнирно закреплённый по концам.

3.2. Шероховатая опорная поверхность. Сила трения скольжения при покое (сила сцепления). Угол трения и конус трения.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

17. Что понимают под равновесием тела в статике?
18. Дать определение эквивалентных систем сил и системы сил, эквивалентной нулю.
19. Сформулировать две основные задачи статики.
20. Что называется связью?
21. Что понимают под реакцией связи?
22. Как направлена реакция гладкой опорной поверхности и реакция шарнирно – подвижной опоры?
23. Известно ли заранее направление реакции шарнирно – неподвижной опоры? На какие составляющие принято разлагать эту реакцию?
24. В какую сторону направлена реакция невесомого опорного стержня, если он растянут, сжат?
25. Что называется силой трения скольжения при покое?
26. По какой формуле определяется предельное значение силы трения при покое?
27. От чего зависит статический коэффициент трения?
28. Что называется углом трения и конусом трения?
29. Каким свойством обладает конус трения?

4. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

4.1. Геометрический и аналитический способы определения равнодействующей системы сходящихся сил.

4.2. Геометрические и аналитические условия равновесия системы сходящихся сил.

4.3. Теорема о равновесии трех непараллельных сил.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

30. Какая система сил называется сходящейся?
31. Сформулировать аксиому, на основе которой производится упрощение системы сходящихся сил.
32. Чему равна равнодействующая системы сходящихся сил?
33. Каковы условия равновесия системы сходящихся сил в геометрической и аналитической формах?
34. Какие задачи статики называются статически определимыми и какие статически неопределимыми?

5. МОМЕНТЫ СИЛЫ

5.1. Векторный момент силы относительно точки (центра). Модуль и направление векторного момента. Алгебраический момент силы относительно точки (центра).

5.2. Момент силы относительно оси. Зависимость между моментами силы относительно оси и точки, лежащей на этой оси. Аналитические выражения моментов силы относительно координатных осей.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

- 35. Записать формулу, выражающую векторный момент силы относительно точки.
- 36. Записать формулу, выражающую алгебраический момент силы относительно точки. В каком случае он равен нулю?
- 37. Что называется моментом силы относительно оси? В каких случаях он равен нулю?
- 38. Как определяется момент силы относительно оси, если её линия действия перпендикулярна этой оси?
- 39. Как выражается момент силы через её составляющие, параллельные координатным осям?

6. ПАРА СИЛ И ЕЁ СВОЙСТВА

6.1. Векторный момент пары. Алгебраический момент пары. Изображение пары её моментом.

6.2. Эквивалентные пары. Основные операции над парами. Сложение пар. Условия равновесия системы пар.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

- 40. Что называется парой сил? Имеет ли пара сил равнодействующую?
- 41. Как направлен векторный момент пары и чему равен его модуль?
- 42. Что понимают под алгебраическим моментом пары сил?
- 43. Чему равна сумма проекций сил пары на любую координатную ось?
- 44. Чем можно заменить систему пар?
- 45. Записать условие равновесия системы пар.

7. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ

7.1. Характеристические величины системы сил: главный вектор, главный момент относительно некоторого центра, характеристическое

произведение.

7.2. Лемма о параллельном переносе силы из одной точки тела в другую точку. Основная теорема статики об эквивалентности системы сил системе, состоящей из силы и пары сил.

7.3. Приведение системы сил к простейшему виду: равнодействующей, паре сил и динамическому винту.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

46. Как определяются главный вектор и главный момент системы сил геометрически и аналитически?

47. Зависят ли эти характеристики системы сил от выбора центра приведения?

48. Сформулировать основную теорему статики.

49. В чём состоят условия приведения системы сил к равнодействующей, паре сил?

50. Что называется динамическим винтом? Каковы условия приведения системы сил к динамическому винту? Чему равны сила и момент пары полученного винта?

51. Чему равно по модулю наименьшее значение главного момента системы сил?

52. Каков признак, что полученный винт будет правым, левым?

8. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ

8.1. Необходимые и достаточные векторные условия равновесия системы сил. Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

8.2. Аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил в трех формах.

8.3. Аналитические условия равновесия пространственной системы параллельных сил. Случай плоской системы параллельных сил.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

53. Записать условия равновесия произвольной пространственной системы сил в аналитической форме.

54. Записать условия равновесия произвольной плоской системы сил в трех формах.

55. Записать условия равновесия пространственной системы параллельных сил.

56. Записать условия равновесия плоской системы параллельных сил в двух формах.

9. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

- 9.1. Общие формулы для координат центра тяжести твердого тела.
- 9.2. Формулы для координат центра тяжести однородных тел (центр тяжести объёма, площади, линии).
- 9.3. Способы определения центра тяжести твердого тела.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

- 57. Что называется центром тяжести твердого тела?
- 58. Записать формулы для координат центра тяжести твердого тела.
- 59. Записать выражения статических моментов веса тела относительно соответствующих координатных плоскостей.
- 60. В чём состоит метод симметрии, метод разбиения и метод дополнения для определения положения центра тяжести твердого тела?

РАЗДЕЛ 2. КИНЕМАТИКА

1. ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ

- 1.1. Предмет кинематики. Относительность механического движения.
- 1.2. Пространство и время в классической механике.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

- 61. Что изучает кинематика?
- 62. Какими свойствами наделяют пространство и время в классической механике?

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

- 2.1. Три способа задания движения точки: векторный, координатный, естественный.
- 2.2. Определение скорости и ускорения точки при векторном способе задания её движения.
- 2.3. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания её движения.
- 2.4. Естественный трехгранник и естественные оси координат. Кривизна линии.
- 2.5. Определение скорости точки при естественном способе задания её движения
- 2.6. Определение ускорения точки при естественном способе задания её движения. Касательное и нормальное ускорения точки.
- 2.7. Равномерное и равнопеременное движения точки.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какими параметрами определяется положение точки при векторном и координатном способах задания её движения?
2. Записать уравнения движения точки при векторном и координатном способах задания её движения.
3. Как определить траекторию точки в декартовых координатах, если её уравнения движения заданы в координатной форме?
4. Записать формулы, определяющие вектор скорости и вектор ускорения точки.
5. Как определить скорость и ускорение точки, если её уравнения движения заданы в координатной форме?
6. Каким параметром определяется положение точки при естественном способе задания её движения?
7. Что называется графиком движения точки?
8. Как направлены естественные оси координат с началом в данной точке траектории?
9. Записать формулу, определяющую алгебраическую скорость точки. Что показывает её знак?
10. Как определить касательное и нормальное ускорения точки? Каков физический смысл этих ускорений?
11. Какое движение точки называется равномерным и какое равнопеременным?
12. Записать закон равномерного движения точки.
13. Записать закон равнопеременного движения и закон изменения скорости при этом движении.

3. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

- 3.1. Поступательное движение твёрдого тела и определение его положения. Связанная система координат.
- 3.2. Уравнения поступательного движения твёрдого тела.
- 3.3. Траектории, скорости и ускорения точек твёрдого тела при его поступательном движении.
- 3.4. Вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси и определение его положения. Угловая координата.
- 3.5. Уравнение вращательного движения твёрдого тела.
- 3.6. Угол поворота твёрдого тела.
- 3.7. Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела.
- 3.8. Равномерное и равнопеременное вращения твёрдого тела.
- 3.9. Определение скорости и ускорения любой точки твёрдого тела при его вращательном движении.
- 3.10. Векторные формулы для определения скорости и ускорения

любой точки вращающегося твёрдого тела.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

63. Какое движение твёрдого тела называется поступательным? Как выбирается связанная система координат при описании поступательного движения тела?
64. Сформулировать и доказать теорему о траекториях, скоростях и ускорениях точек твёрдого тела при его поступательном движении.
65. Какое движение твёрдого тела называется вращательным вокруг неподвижной оси?
66. Что является определяющим параметром при таком движении?
67. Что называется углом поворота твёрдого тела за данный промежуток времени? Являются ли угловая координата и угол поворота тождественными понятиями?
68. Как выражается угол поворота через число оборотов твёрдого тела за данный промежуток времени?
69. Как определяются средняя угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела за данный промежуток времени?
70. Как определяются угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела в любой момент времени?
71. Как узнать, ускоренно или замедленно вращается твёрдое тело в данный момент времени?
72. Какое вращение твёрдого тела называется равномерным и какое равнопеременным?
73. Записать закон равномерного вращения твёрдого тела.
74. Как выражается угловая скорость через частоту вращения твёрдого тела?
75. Записать закон равнопеременного вращения и закон изменения угловой скорости твёрдого тела при этом вращении.
76. Чему равна скорость любой точки вращающегося твёрдого тела
77. По каким формулам определяются вращательное, центростремительное и полное ускорения любой точки вращающегося твёрдого тела?
78. По какой формуле определяется угол между ускорением любой точки вращающегося твёрдого тела и радиусом описываемой её окружности?

4. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

- 4.1. Определение положения твёрдого тела при его плоском движении.
- 4.2. Уравнения движения плоской фигуры, или плоского движения твёрдого тела.
- 4.3. Разложение движения плоской фигуры на два простейших движения.
- 4.4. Определение скорости любой точки плоской фигуры как суммы скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.
- 4.5. Мгновенный центр скоростей ; условия его существования и единственности.
- 4.6. Определение скорости любой точки плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.
- 4.7. Понятие о центроидах.
- 4.8. Определение ускорения любой точки плоской фигуры как суммы ускорения полюса, вращательного и центростремительного ускорений вокруг полюса.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

- 79. Какое движение твёрдого тела называется плоским?
- 80. Какие параметры определяют положение твёрдого тела при таком его движении?
- 81. Записать уравнения движения плоской фигуры, или плоского движения твёрдого тела.
- 82. На какие простейшие движения можно разложить движение плоской фигуры? Назовите кинематические характеристики этих простейших движений.
- 83. Зависят ли названные характеристики от выбора полюса?
- 84. Как определяется скорость любой точки плоской фигуры при разложении её движения на два простейших движения?
- 85. В каком случае плоская фигура имеет мгновенно поступательную скорость?
- 86. Если векторы скоростей двух каких-нибудь точек плоской фигуры одинаковы в данный момент времени, то чему равна угловая скорость фигуры в этот момент?
- 87. Что можно сказать о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки?
- 88. Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры?
- 89. Каково условие существования и единственности мгновенного центра скоростей?
- 90. Как определяется положение мгновенного центра скоростей?

91. Как определяется скорость любой точки плоской фигуры, если известно положение мгновенного центра скоростей?
92. Если известны вектор скорости какой-нибудь точки и угловая скорость плоской фигуры в данный момент времени, то можно ли определить положение мгновенного центра скоростей в этот момент?

РАДЕЛ 3. ДИНАМИКА

1. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ

Предмет динамики. Основные законы динамики: закон инерции, закон зависимости между силой и ускорением, закон равенства действия и противодействия, закон независимости действия сил, закон освобожденности от связей. Инерциальная система отсчёта.

2. ДИНАМИКА ТОЧКИ

- 2.1. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в векторной, координатной и естественной формах.
- 2.2. Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки в векторной, координатной и естественной формах.
- 2.3. Две основные задачи динамики точки. Решение первой задачи динамики.
- 2.4. Решение второй задачи динамики. Роль начальных условий.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

93. Сформулировать законы Ньютона.
94. Какая система отсчёта называется инерциальной?
95. Какой вид имеет основное уравнение динамики свободной и несвободной материальной точки?
96. Записать дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах и в проекциях на естественные оси.
97. Сформулировать две основные задачи динамики точки. Как принципиально они решаются?
98. В чём заключается роль начальных условий при определении закона движения точки по заданной силе?

3. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

- 3.1. Механическая система и её масса. Центр масс; радиус – вектор и координаты центра масс механической системы. Статические моменты

массы.

3.2. Классификация сил, действующих на систему: силы активные и реакции связей; силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил.

3.3. Дифференциальные уравнения механической системы в векторной форме и в декартовых координатах.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

99. Что называется механической системой?

100. Чему равна масса системы?

101. Записать формулы, определяющие положение центра масс системы.

102. Чему равны главный вектор и главный момент внутренних сил системы?

103. Записать дифференциальные уравнения движения системы в различных формах.

4. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

4.1. Количество движения материальной точки и механической системы. Выражение количества движения системы через её массу и скорость её центра масс.

4.2. Элементарный импульс силы. Полный импульс силы (за конечный промежуток времени).

4.3. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и в интегральной (конечной) формах.

4.4. Закон сохранения количества движения механической системы.

4.5. Теорема о движении центра масс механической системы.

4.6. Закон сохранения движения центра масс.

4.7. Дифференциальные уравнения поступательного движения твёрдого тела.

4.8. Кинетический момент материальной точки и механический системы относительно точки (центра) и относительно оси.

4.9. Кинетический момент вращающегося твёрдого тела относительно оси вращения.

4.10. Теорема об изменении кинематического момента механической системы (теорема моментов).

4.11. Закон сохранения кинетического момента механической системы.

4.12. Дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

4.13. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы.

4.14. Кинетическая энергия твёрдого тела при его поступательном

движении и при вращательном движении вокруг неподвижной оси.

4.15. Кинетическая энергия твёрдого тела при его плоском движении (теорема Кенига).

4.16. Элементарная работа силы в различных формах.

4.17. Полная работа силы (на конечном перемещении точки её приложения).

4.18. Мощность.

4.19. Работа силы тяжести, силы упругости и силы трения скольжения.

4.20. Работа внутренних сил абсолютно твёрдого тела.

4.21. Работа и мощность внешних сил, приложенных к твёрдому телу, при его поступательном движении и при вращательном движении вокруг неподвижной оси.

4.22. Работа сил сопротивления при качении тела без скольжения.

4.23. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной и интегральной (конечной) формах.

4.24. Силовое поле. Вычисление работы силы нестационарного и стационарного полей.

4.25. Потенциальное силовое поле и его основные свойства.

4.26. Математический критерий потенциальности силового поля.

4.27. Потенциальная энергия материальной точки и механической системы.

4.28. Закон сохранения полной механической энергии.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

104. Что называется количеством движения материальной точки и механической системы?

105. Записать формулу, выражающую количество движения системы через её массу и скорость центра масс.

106. Как определяется импульс постоянной и переменной силы за конечный промежуток времени?

107. Сформулировать теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и интегральной формах.

108. Влияют ли внутренние силы на изменение количества движения системы?

109. Что выражает закон сохранения количества движения системы?

110. Сформулировать теорему о движении центра масс системы.

111. Влияют ли внутренние силы на движение её центра масс?

112. Что выражает закон сохранения движения центра масс системы?

113. Записать дифференциальные уравнения поступательного движения твёрдого тела.

114. Что называется кинетическим моментом материальной точки и механической системы относительно неподвижного центра и неподвижной оси?
115. Чему равен кинетический момент вращающегося тела относительно неподвижной оси вращения?
116. Сформулировать теорему об изменении кинетического момента системы.
117. Что выражает закон сохранения кинетического момента системы?
118. Записать дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси в различных формах.
119. Каков физический смысл осевого момента инерции тела?
120. Указать условия, при которых тело вращается равномерно и равнопеременно?
121. Что называется кинетической энергией материальной точки и механической системы?
122. Записать формулы, определяющие кинетическую энергию твёрдого тела при поступательном, вращательном и плоском движениях?
123. Записать выражение элементарной работы силы в различных формах.
124. Как вычисляется работа переменной силы на конечном перемещении её точки приложения?
125. Что называется мощностью силы?
126. Чему равна работа силы тяжести и силы упругости?
127. Какие силы сопротивления возникают при качении тела без скольжения?
128. Чему равна работа силы трения при качении тела без скольжения?
129. Как вычисляется работа пары трения качения?
130. Сформулировать теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной и интегральной формах.
131. Что называется силовым полем? Какое поле называется потенциальным?
132. Какой одной функцией определяется потенциальное силовое поле? Как она называется?
133. Зависит ли работа силы потенциального поля от вида траектории точки приложения этой силы?
134. Каковы необходимые и достаточные условия, чтобы данное силовое поле было потенциальным?
135. Что называется потенциальной энергией материальной точки и механической системы?

136. При действии каких сил справедлив закон сохранения полной механической энергии системы?

5. МЕТОД КИНЕТОСТАТИКИ

5.1. Сила инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки.

5.2. Принцип Даламбера для механической системы.

5.3. Уравнения кинетостатики.

5.4. Главный вектор сил инерции точек твёрдого тела.

5.5. Главный момент сил инерции точек твёрдого, совершающего поступательное движение, относительно его центра масс.

5.6. Главный момент сил инерции точек твёрдого тела, совершающего вращательное движение вокруг оси, являющейся главной центральной осью инерции.

5.7. Главный момент сил инерции точек твёрдого тела, совершающего плоское движение, относительно его центра масс.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

137. Чему равна по модулю и как направлена сила инерции материальной точки?

138. Как формулируется и каким уравнением выражается принцип Даламбера для материальной точки?

139. Сформулировать принцип Даламбера для механической системы.

140. Чему равен главный вектор сил инерции твёрдого тела?

141. Какие уравнения называются уравнениями кинетостатики? Что выражают эти уравнения?

142. К чему приводятся силы инерции точек твёрдого тела при поступательном движении, при вращательном движении вокруг главной центральной оси инерции и при плоском движении, когда тело имеет плоскость симметрии?

6. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

6.1. Связи и их уравнения. Классификация связей по их уравнениям.

6.2. Число независимых координат. Обобщённые координаты.

6.3. Действительные и возможные (виртуальные) перемещения материальной точки и механической системы.

6.4. Число степеней свободы механической системы.

6.5. Идеальные связи.

6.6. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение статики.

6.7. Общее уравнение динамики.

- 6.8. Выражение возможной работы активных сил в обобщённых координатах.
- 6.9. Обобщённые силы и их вычисление.
- 6.10. Условия равновесия механической системы в обобщённых координатах.
- 6.11. Уравнения Лагранжа второго рода.
- 6.12. Уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

- 143. Что называется связью и уравнением связи?
- 144. Какие связи называются стационарными и какие нестационарными?
- 145. Какие связи называются удерживающими и какие неудерживающими?
- 146. Какие связи называются голономными и какие неголономными?
- 147. Что представляют собой обобщённые координаты механической системы?
- 148. Какие перемещения точек системы называются возможными?
- 149. Что называется числом степеней свободы системы?
- 150. Какие связи называются идеальными?
- 151. Как формулируется и каким уравнением выражается принцип возможных перемещений?
- 152. Что представляют собой обобщённые силы и как они определяются?
- 153. В каких единицах выражаются обобщённые силы?
- 154. Записать условия равновесия системы в обобщённых координатах.
- 155. Можно ли пользоваться принципом возможных перемещений, если на систему наряду с активными силами действуют силы трения?
- 156. Какой вид имеет общее уравнение динамики?
- 157. Какой вид имеют уравнения Лагранжа второго рода? Чему равно число этих уравнений?
- 158. Записать уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы.

7. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

- 7.1. Расчётные схемы механических систем при колебаниях. Определение положений равновесия консервативной механической системы.
- 7.2. Виды положения равновесия системы: устойчивое, неустойчи-

вое и безразличное.

7.3. Теорема Лагранжа – Дирихле.

7.4. Критерий устойчивости равновесия для консервативной механической системы с одной степенью свободы.

7.5. Классификация сил, действующих на механическую систему, при колебаниях

7.6. Дифференциальное уравнение малых движений механической системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия. Приближённые выражения кинетической, потенциальной энергии и диссипативной функции.

7.7. Малые колебания консервативной системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия. Основные характеристики свободных (собственных) колебаний.

7.8. Затухающие колебания системы и их основные характеристики.

7.9. Аperiodические движения системы.

7.10. Определение закона вынужденных колебаний системы с учётом и без учёта сопротивления.

7.11. Основные характеристики вынужденных колебаний и влияние на них сопротивления.

7.12. Резонанс.

7.13. Три характерные области диаграммы коэффициента динамичности. Технические применения теории колебаний.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

159. Что представляют собой расчётные схемы, используемые при колебаниях?

160. По каким формулам определяются положения равновесия консервативной системы?

161. Какие положения равновесия называются устойчивыми, какие неустойчивыми и какие безразличными?

162. Сформулировать достаточный признак устойчивости положения равновесия консервативной системы.

163. На какие группы разделяют действующие на систему силы при колебаниях?

164. Записать приближённые выражения кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативной функции в случае её малых отклонений от положения равновесия.

165. Записать дифференциальное уравнение малых движений системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия.

166. От каких параметров зависят частота и период свободных колебаний системы без учёта сопротивления? Зависят ли они от выбора обобщённой координаты?
167. В чём проявляется свойство изохронизма свободных колебаний?
168. Зависят ли амплитуда и начальная фаза свободных колебаний от начальных условий?
169. В чём состоит физический смысл диссипативной функции? Каков характер движения системы в зависимости от соотношения между коэффициентом затухания и круговой частотой при учёте сопротивления?
170. Записать закон затухающих колебаний и формулы для определения периода и амплитуды.
171. Что называется декрементом затухания?
172. Изобразить возможные графики аperiodических движений системы.
173. Под действием каких сил совершаются вынужденные колебания системы?
174. Записать дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы без учёта сопротивления.
175. Из каких составных движений складывается движение системы, совершающей вынужденные колебания?
176. Записать закон нерезонансных вынужденных колебаний системы без учёта сопротивления.
177. Каковы частота и период вынужденных колебаний системы?
178. Имеют ли вынужденные колебания сдвиг по фазе по отношению к возмущающей силе?
179. От каких факторов зависит амплитуда вынужденных колебаний?
180. Что показывает коэффициент динамичности?
181. При каких условиях возникает резонанс, каковы закон и график вынужденных колебаний при резонансе без учёта сопротивления?
182. Каковы три характерные области диаграммы коэффициента динамичности?
183. Как добиться того, чтобы даже большая по величине сила практически не вызывала вынужденных колебаний системы?

РГР 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛКИ. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

Данная работа состоит из четырёх задач: С - 1, С - 2, С - 3, С - 4.

Исходные данные в каждой задаче (геометрические размеры, величины нагрузок) приведены в сводных таблицах, подготовленных для каждого класса с помощью ЭВМ. Распечатки с вариантами задания на РГР выдаются преподавателями кафедры механики.

ЗАДАЧИ С - 1, С - 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Цель:

- закрепить теоретические знания студентов по теме "Равновесие плоской системы параллельных сил";
- развить у студентов навыки в применении аналитических условий равновесия плоской системы параллельных сил в двух формах.

ЗАДАНИЕ

В каждой задаче рассматривается равновесие балки АВС, находящейся под действием заданных нагрузок.

В задаче С - 1 балка (рисунок 1.1) имеет одну опору — жесткую заделку (ЖЗ) на одном из концов А или С.

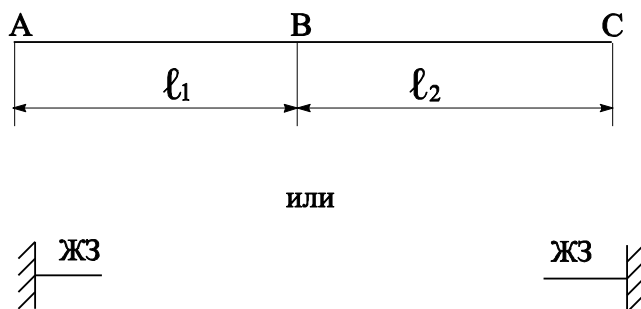


Рисунок 1.1 — Консольная балка с жёсткой заделкой на одном из её концов.

В задаче С - 2 балка (рисунок 1.2) имеет две опоры — шарнирно – неподвижную опору (ШНО) и шарнирно – подвижную опору (ШПО) в указанных точках из трех возможных точек А, В и С.

В обеих задачах заданными нагрузками являются:

184. сосредоточенная сила $\bar{F}$;

185. пара с моментом m ;

186. равномерно распределённая нагрузка (РРН) с интенсивностью q_i (i – номер участка балки).

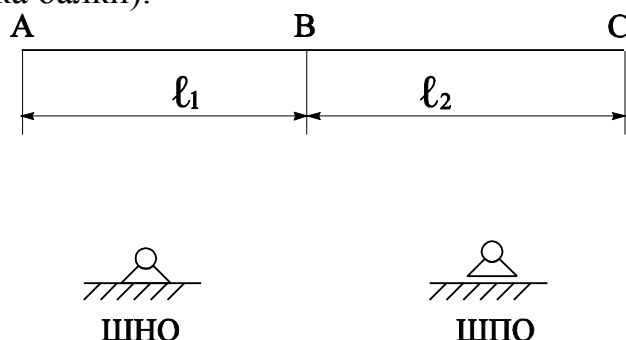


Рисунок 1.2 — Балка на двух опорах.

Сила и момент пары приложены на границах участков, а распределённая нагрузка действует на весь участок с указанным номером.

По условию задачи требуется определить опорные реакции балки.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Изобразить схему балки с опорами, учитывая при этом что длины участков балки $AB = \ell_1$ и $BC = \ell_2$ выражаются через произвольную длину ℓ и задаются формулой

$$\ell_i = s_i \cdot \ell,$$

где i – номер участка;

s_i – коэффициент пропорциональности.

2. Изобразить заданные нагрузки.

Проекция сосредоточенной силы $\bar{F}$ на ось Ау и её модуль выражаются через величину $q\ell$ соответственно по формулам

$$F_y = k_1 \cdot q\ell, \quad F = |k_1| \cdot q\ell,$$

где k_1 – коэффициент пропорциональности.

Эта сила приложена в указанной точке и направлена по вертикали вверх, если $k_1 > 0$ и вниз, если $k_1 < 0$.

Значение момента пары сил выражается через величину $q\ell^2$ по формуле

$$m = k_2 \cdot q\ell^2.$$

Этот момент прикладывается в указанном сечении балки, а его направление определяется знаком коэффициента пропорциональности.

Равномерно распределённая нагрузка, действующая на указанные участки, задаётся интенсивностью q_i и определяется формулой

$$q_i = n_i \cdot q,$$

где i – номер участка.

Эта нагрузка считается направленной вверх, если коэффициент пропорциональности $n_i > 0$, и вниз, если $n_i < 0$.

3. К системе активных сил и реакций связей, действующих на балку, следует применять такую форму условий равновесия, чтобы в каждое уравнение входило только по одной неизвестной величине.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача С-1. Исходные данные приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

№ п/п	Длины		Связи	Нагрузки					
	ℓ_1	ℓ_2		F_y		m		РРН	
35	s_1	s_2	точка	Точка	k_1	точка	k_2	n_1	n_2
	2	2	С	В	-1	А	3	-2	0

Определить Y_C, m_C .

Решение

1. Объект равновесия: балка ABC с жёсткой заделкой на конце С (рисунок 1.3).

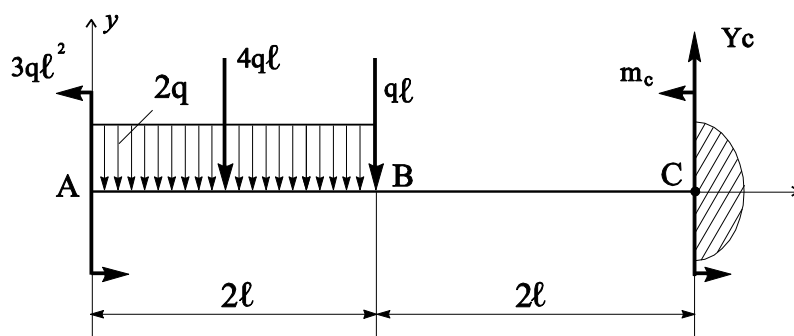


Рисунок 1.3 — Силевая схема балки.

Длины участков соответственно равны

$$\ell_1 = s_1 \cdot l = 2l, \quad \ell_2 = s_2 \cdot l = 2l.$$

Балку вычерчиваем в произвольном масштабе с указанием длин участков АВ и ВС.

Чтобы сократить записи при составлении условий равновесия рекомендуется последовательно изображать силы и моменты пар соответственно прямолинейными и круговыми стрелками и рядом с ними записывать их модули.

2. Силевая схема балки, освобождённой от связей:

а) активные силы:

- сила $\bar{F}$ приложена в точке В, причём

$$F_y = k_1 \cdot q\ell = -q\ell, \quad F = q\ell$$

и тем самым она направлена вниз;

- пара сил с моментом m , приложенным в сечении А и равным

$$m = k_2 \cdot q\ell^2 = 3q\ell^2.$$

Эта пара стремится повернуть балку против часовой стрелки;

- равномерно распределённая нагрузка на 1-м участке с интенсивностью, равной

$$q_1 = n_1 \cdot q = -2q$$

и направленной вниз. Её заменяем равнодействующей $\overline{Q}_1$, проекция которой равна произведению интенсивности на длину нагружённого участка

$$Q_{1y} = q_1 \cdot \ell_1 = -4q\ell, \quad Q_1 = 4q\ell.$$

Сила $\overline{Q}_1$ приложена в середине этого участка.

Данная система активных сил — система параллельных сил (пару сил можно повернуть так, чтобы её силы стали вертикальными).

3. Условия равновесия.

Воспользуемся первой формой условий равновесия плоской системы параллельных сил:

$$\begin{aligned} \sum Y_K &= 0; & -4q\ell - q\ell + Y_c &= 0; \\ \sum m_C(\overline{F}_K) &= 0; & 3q\ell^2 + 4q\ell \cdot 3\ell + q\ell \cdot 2\ell + m_c &= 0. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} Y_c - 5q\ell &= 0; \\ m_c + 17q\ell &= 0. \end{aligned}$$

Так как в полученную систему двух уравнений входят две неизвестные величины Y_c и m_c , то данная задача статически определимая.

4. Решение системы уравнений равновесия.

Из первого уравнения находим

$$Y_c = 5q\ell,$$

а из второго уравнения следует

$$m_c = -17q\ell.$$

Отрицательный знак означает, что в действительности реактивная пара стремится повернуть балку по часовой стрелке.

5. Проверка.

Составляем уравнения моментов относительно точки А:

$$\sum m_A(\overline{F}_K) = 0; \quad 3q\ell^2 - 4q\ell \cdot \ell - q\ell \cdot 2\ell + 5q\ell \cdot 4\ell - 17q\ell^2 \equiv 0.$$

Следовательно, искомые величины определены правильно.

Ответы: $Y_c = 5q\ell$, $m_c = -17q\ell$.

Задача С - 2. Исходные данные приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2

№ п/п	Длины		Связи		Нагрузки					
	ℓ_1	ℓ_2	ШНО	ШПО	F_y		m		РРН	
	s_1	s_2	Точка		точка	k_1	Точка	k_2	n_1	n_2
35	2	1	A	B	C	-1	B	2	-3	2

Определить Y_A, Y_B .

Решение

1. Объект равновесия: балка ABC с шарнирно – неподвижной опорой в точке A и шарнирно – подвижной опорой в точке B (рисунок 1.4).

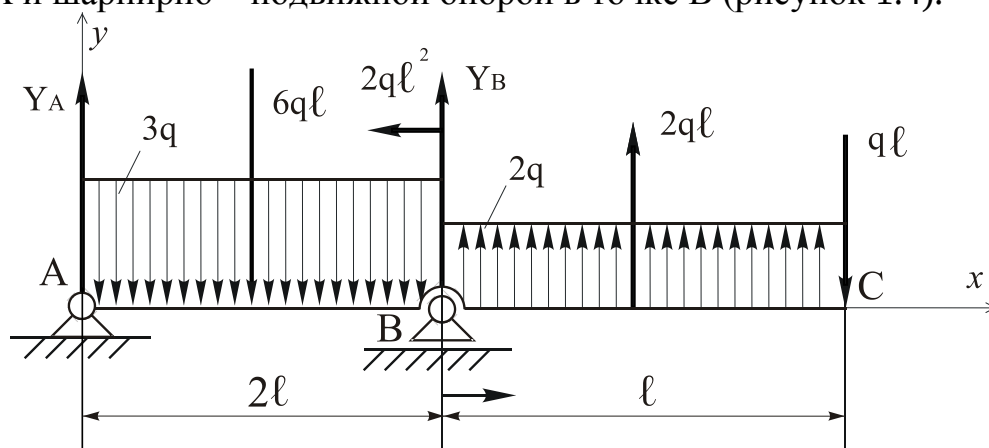


Рисунок 1.4 — Силевая схема балки.

Длины участков соответственно равны

$$\ell_1 = s_1 \cdot \ell = 2\ell, \quad \ell_2 = s_2 \cdot \ell = \ell.$$

Балку вычерчиваем в произвольном масштабе с указанием длин участков AB и BC.

Чтобы сократить записи при составлении условий равновесия рекомендуется последовательно изображать силы и моменты пар соответственно прямолинейными и круговыми стрелками и рядом с ними записывать их модули.

2. Силевая схема балки, освобожденной от связей:

а) активные силы:

- сила $\bar{F}$ приложена в точке C, причём

$$F_y = k_1 \cdot q\ell = -q\ell, \quad F = q\ell.$$

и тем самым она направлена вниз;

- пара сил с моментом m , приложенным в сечении B и равным

$$m = k_2 \cdot q\ell^2 = 2q\ell^2.$$

Эта пара стремится повернуть балку против часовой стрелки;

- равномерно распределённая нагрузка на 1-м участке с интенсивностью, равной

$$q_1 = n_1 \cdot q = -3q.$$

и направленной вниз. Её заменяем равнодействующей $\overline{Q}_1$, проекция которой равна произведению интенсивности на длину нагруженного участка

$$Q_{1y} = q_1 \cdot 2\ell = -6q\ell, \quad Q_1 = 6q\ell.$$

Сила $\overline{Q}_1$ приложена в середине этого участка.

На 2-ом участке нагрузка направлена вверх, а её интенсивность равна

$$q_2 = n_2 \cdot q = 2q.$$

и тем самым для её равнодействующей $\overline{Q}_2$ получаем

$$Q_{2y} = q_2 \cdot \ell = 2q\ell, \quad Q_2 = 2q\ell.$$

Данная система активных сил — система параллельных сил (пару сил можно повернуть так, чтобы её силы стали вертикальными).

б) реакции связей: вертикальные реакции $\overline{Y}_A$ ($\overline{X}_A = 0$), $\overline{Y}_B$.

Предположительно считаем $Y_A > 0$.

3. Условия равновесия.

Воспользуемся второй формой условий равновесия плоской системы параллельных сил:

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \quad 6q\ell \cdot \ell + 2q\ell^2 + Y_B \cdot 2\ell + 2q\ell \cdot 2.5\ell - q\ell \cdot 3\ell = 0;$$

$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0; \quad -Y_A \cdot 2\ell + 6q\ell + 2q\ell^2 + 2q\ell \cdot 0.5\ell - q\ell \cdot \ell = 0.$$

Или

$$Y_B \cdot 2\ell - 2q\ell^2 = 0;$$

$$-Y_A \cdot 2\ell + 8q\ell^2 = 0.$$

Так как в полученную систему двух уравнений входят две неизвестные величины Y_C и m_C , то данная задача статически определимая.

4. Решение системы уравнений равновесия.

Из первого уравнения находим

$$Y_B = q\ell,$$

а из второго уравнения следует

$$Y_A = 4q\ell.$$

5. Проверка.

Составляем уравнения проекций сил на ось Ay :

$$\sum Y_k = 0; \quad 4q\ell - 6q\ell + q\ell + 2q\ell - q\ell \equiv 0.$$

Следовательно, искомые величины определены правильно.

Ответ: $Y_A = 4q\ell$, $Y_B = q\ell$.

ЗАДАЧА С-3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Цель:

- закрепить теоретические знания студентов по теме "Равновесие произвольной плоской системе сил";
- развить у студентов навыки в применении аналитических условий равновесия плоской системы сил в различных формах.

ЗАДАНИЕ

Балка ABCD (рисунок 1.5) имеет одну жёсткую заделку на одном из её концов A, D или две опоры: шарнирно - неподвижную (ШНО) и шарнирно - подвижную (ШПО) в указанных точках из четырех возможных A, B, C и D.

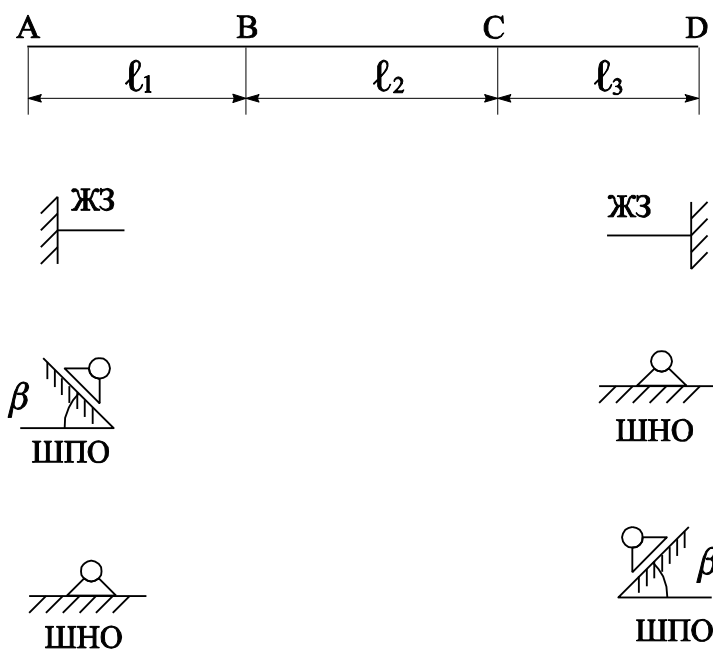


Рисунок 1.5 — Балка с возможными опорами.

Заданными нагрузками являются:

- сосредоточенная сила $\bar{F}$ с углом наклона α ;
- пара с моментом m ;
- равномерно распределённая нагрузка (РРН) с интенсивностью q_i (i – номер участка балки).

Сила и момент пары приложены на границах участков, а распределённая нагрузка действует на весь участок с указанным номером.

По условиям задачи требуется определить опорные реакции балки.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Все указания к решению задач С – 1 и С – 2 остаются справедливыми и для данной задачи С – 3. Дополнительно следует учесть, что угол наклона α силы $\bar{F}$ отсчитывается от оси Ax против хода часовой стрелки.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Задача С-3. Исходные данные приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

№ п/п	Длины			Связи			Нагрузка							
	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ЖЗ	ШНО	ШПО	F_y			m		РРН		
35	s_1	s_2	s_3	точка		β	точка	k_1	α	точка	k_2	n_1	n_2	n_3
	1	2	1	—	A	D 45 ⁰	C	1	120 ⁰	D	-1	2	0	1

Определить X_A, Y_A, R_D .

Решение

1. Объект равновесия: балка ABCD с шарнирно – неподвижной опорой в точке A и шарнирно – подвижной опорой в точке D (рисунок 1.6).

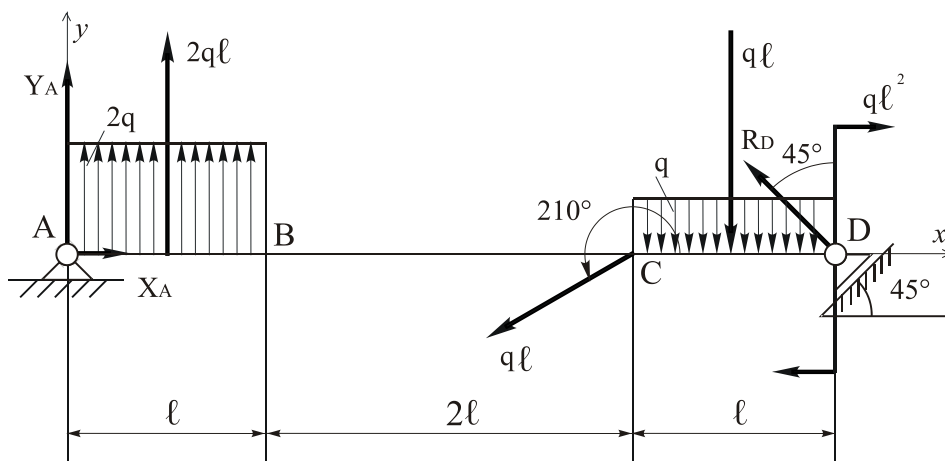


Рисунок 1.6 — Силевая схема балки.

Длины участков соответственно равны

$$\ell_1 = s_1 \cdot \ell = \ell, \quad \ell_2 = s_2 \cdot \ell = 2\ell, \quad \ell_3 = s_3 \cdot \ell = \ell.$$

Балку вычерчиваем в произвольном масштабе с указанием длин участков AB, BC и CD.

2. Силевая схема балки, освобождённой от связей:

а) активные силы:

- сила $\overline{F}$ приложена в точке С, причём

$$F = k_1 \cdot q\ell = q\ell$$

и составляет с осью Ах угол $\alpha = 210^\circ$.

- пара сил с моментом m , приложенным в сечении D и равным

$$m = k_2 \cdot q\ell^2 = -q\ell^2, \quad |m| = q\ell^2.$$

Эта пара стремится повернуть балку по часовой стрелке;

- равномерно распределённая нагрузка на 1-м участке с интенсивностью, равной

$$q_1 = n_1 \cdot q = 2q$$

и направленной вверх. Её заменяем равнодействующей $\overline{Q}_1$, приложенной в середине нагруженного участка:

$$Q_1 = |q_1| \cdot \ell_1 = 2q\ell,$$

- равномерно распределённая нагрузка на 3-м участке с интенсивностью

$$q_3 = n_3 \cdot q = -q,$$

которая направлена вниз. Её заменяем равнодействующей, приложенной в середине нагруженного участка:

$$Q_3 = |q_3| \cdot \ell_3 = q\ell;$$

б) реакции связей:

- реакция шарнирно – неподвижной опоры А представляем в виде двух составляющих $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$;

- реакция $\overline{R}_D$ шарнирно – подвижной опоры D направлена по нормали к опорной плоскости и составляет с вертикалью угол $\beta = 45^\circ$.

3. Условия равновесия.

Воспользуемся основной формой условий равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum Y_k = 0; \quad -Y_A + 2q\ell - q\ell \sin 30^\circ - q\ell + R \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum X_k = 0; \quad X_A - q\ell \cos 30^\circ - R_D = 0;$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \quad 2q\ell \cdot 0.5\ell - q\ell \cdot 3\ell \sin 30^\circ - q\ell \cdot 3.5\ell + R_D \cdot 4\ell \cos 45^\circ - q\ell^2 = 0.$$

Так как в полученную систему трёх уравнений входят три неизвестные величины X_A, Y_A и R_D , то данная задача статически определимая.

4. Решение системы уравнений равновесия.

Из уравнения моментов определяем

$$R_D = 1.77q\ell.$$

Из уравнений проекций находим

$$X_A = 2.12q\ell, \quad Y_A = -0.75q\ell.$$

Знак минус означает, что фактически направление этой реакции противоположно принятому.

Ответ: $X_A = 2.12q\ell, Y_A = -0.75q\ell, R_D = 1.77q\ell.$

ЗАДАЧА С – 4. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

Цель:

- закрепить теоретические знания студентов по теме "Приведение неуравновешенной пространственной системы сил к простейшему виду";
- развить у студентов навыки в аналитическом определении простейшей эквивалентной системы сил.

ЗАДАНИЕ

К вершинам прямоугольного параллелепипеда, длины ребер которого равны a, b и c , приложены силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ (рисунок 1.7).

Считая заданными модули и направления этих сил, а также длины ребер параллелепипеда, требуется установить простейший вид указанной системы сил.

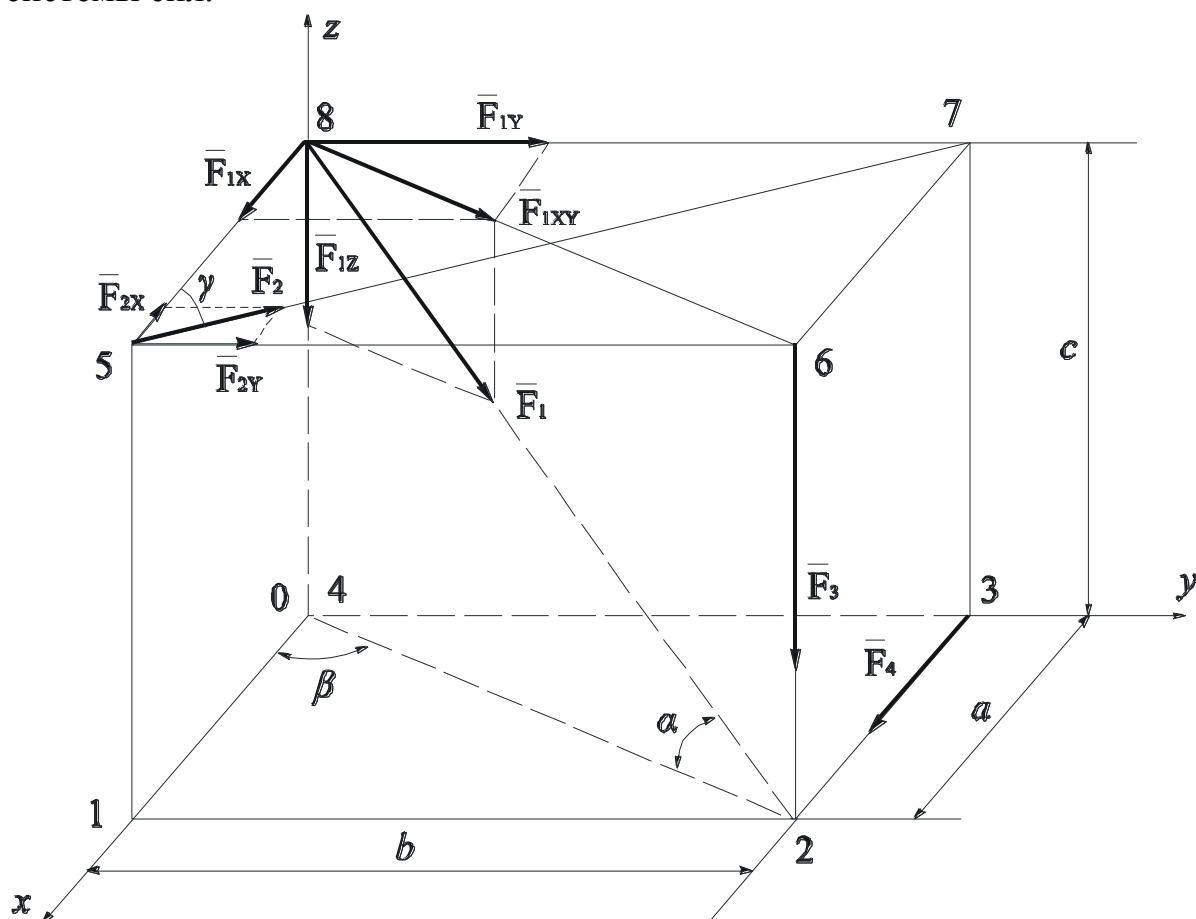


Рисунок 1.7 – Заданная система сил.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Вычертить параллелепипед, приняв угол xOy равным 135° и искажение по оси Ox равным 1:2, изобразить на нём заданные силы

2. Определить модуль и направление главного вектора $\vec{R}^*$ системы сил и показать его на чертеже.

3. Определить модуль и направление главного момента $\vec{M}_O$ системы сил относительно начала координат O и показать его на чертеже.

4. Вычислить характеристическое произведение H системы сил, а также угол φ между главным вектором и главным моментом.

5. Установить простейший вид данной системы сил. Если система сил приводится к динамическому винту, то выполнить следующий пункт.

6. Вычислить наименьшее значение M^* главного момента системы сил.

7. Определить характер динамического винта.

8. Определить положение точки, через которую проходит ось динамического винта.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Задача С – 4. Исходные данные помещены в таблице 1.4.

Таблица 1.4

№ п/п	Длины			Силы системы (модуль, кН, направление)							
	a	b	c	F_1		F_2		F_3		F_4	
35	0.5	0.6	0.4	25	8-2	10	5-7	40	6-2	75	3-2

Решение.

1. Силовая схема объекта.

По данным таблицы 1.4 изображаем параллелепипед с приложенными к нему силами $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ (рисунок 1.7). Вершину 4 параллелепипеда примем за начало системы координат, оси которой направим по его рёбрам.

2. Определение главного вектора системы сил.

Проекции главного вектора $\vec{R}^*$ определяются формулами

$$\begin{aligned} R_x^* &= \sum_{k=1}^4 F_{kx}; \\ R_y^* &= \sum_{k=1}^4 F_{ky}; \\ R_z^* &= \sum_{k=1}^4 F_{kz}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Вычисляем проекции каждой силы на выбранные координатные оси (рисунок 1.7).

При вычислении проекций силы $\bar{F}_1$ целесообразно выполнить двойное проецирование. Сначала эту силу спроецируем на плоскость, в которой находится верхняя грань параллелепипеда. В результате получаем вектор, модуль которого равен

$$F_{1xy} = F_1 \cos \alpha.$$

Затем его проецируем на ребра 8 – 5 и 8 – 7:

$$F_{1x} = F_{1xy} \cos \beta = F_1 \cos \alpha \cos \beta;$$

$$F_{1y} = F_{1xy} \sin \beta = F_1 \cos \alpha \sin \beta.$$

Очевидно,

$$F_{1z} = F_1 \sin \alpha.$$

Для остальных сил находим

$$F_{2x} = -F_2 \cos \gamma; \quad F_{3x} = 0; \quad F_{4x} = F_4;$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \gamma; \quad F_{3y} = 0; \quad F_{4y} = 0;$$

$$F_{2z} = 0; \quad F_{3z} = -F_3; \quad F_{4z} = 0.$$

Подставляя проекции сил в формулы (1.1), получаем

$$R_x^* = F_1 \cos \alpha \cos \beta - F_2 \cos \gamma + F_4;$$

$$R_y^* = F_1 \cos \alpha \sin \beta + F_2 \sin \gamma;$$

$$R_z^* = -F_1 \sin \alpha - F_3.$$

Из рисунка (1.7) видно, что

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

$$\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\cos \gamma = \cos \beta; \quad \sin \gamma = \sin \beta.$$

Для заданных числовых значений величин получаем

$$R_x^* = 82,84 \text{ Н}; \quad R_y^* = 24,78 \text{ Н}; \quad R_z^* = -51,40 \text{ Н}.$$

Модуль и направляющие косинусы главного вектора равны

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2 + (R_z^*)^2} = 100,6 \text{ Н};$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{R_x^*}{R^*} = 0,824; \quad \cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{R_y^*}{R^*} = 0,246; \quad \cos(\bar{R}, \bar{k}) = \frac{R_z^*}{R^*} = -0,511.$$

3. Определение главного момента системы сил относительно точки О.

Сначала находим главные моменты системы сил относительно координатных осей по формулам

$$M_x = \sum_{k=1}^4 m_x(\bar{F}_k);$$

$$M_y = \sum_{k=1}^4 m_y(\bar{F}_k); \quad (1.2)$$

$$M_z = \sum_{k=1}^4 m_z(\bar{F}_k).$$

Для этого вычисляем моменты каждой силы относительно координатных осей.

При определении моментов сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2$ воспользуемся теоремой Вариньона, согласно которой момент данной силы относительно оси равен сумме моментов её составляющих относительно этой же оси. Подчеркиваем, если какая – либо составляющая силы (или сама сила) параллельна данной оси или её линия действия пересекает ось, то момент такой составляющей относительно этой оси равен нулю.

Таким образом, получаем для силы $\bar{F}_1$:

$$m_x(\bar{F}_1) = m_x(\bar{F}_{1y}) = -|F_{1y}| \cdot c = -F_1 \cos \alpha \sin \beta \cdot c;$$

$$m_y(\bar{F}_1) = m_y(\bar{F}_{1x}) = |F_{1x}| \cdot c = F_1 \cos \alpha \cos \beta \cdot c;$$

$$m_z(\bar{F}_1) = 0.$$

Аналогично находим

$$m_x(\bar{F}_2) = m_x(\bar{F}_{2y}) = -|F_{2y}| \cdot c = -F_2 \sin \gamma \cdot c;$$

$$m_y(\bar{F}_2) = m_y(\bar{F}_{2x}) = -|F_{2x}| \cdot c = -F_2 \cos \gamma \cdot c;$$

$$m_z(F_2) = m_z(\bar{F}_{2y}) = |F_{2y}| \cdot a = F_2 \sin \gamma \cdot a;$$

Для сил $\bar{F}_3$ и $\bar{F}_4$ моменты равны

$$m_x(\bar{F}_3) = -F_3 \cdot b; \quad m_x(\bar{F}_4) = 0;$$

$$m_y(\bar{F}_3) = F_3 \cdot a; \quad m_y(\bar{F}_4) = 0;$$

$$m_z(\bar{F}_3) = 0; \quad m_z(\bar{F}_4) = -F_4 \cdot b.$$

Теперь по формулам (1.2) находим главные моменты системы сил относительно координатных осей:

$$M_x = -F_1 \cos \alpha \sin \beta \cdot c - F_2 \sin \gamma \cdot c - F_3 \cdot b = -33,91 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_y = F_1 \cos \alpha \cos \beta \cdot c - F_2 \cos \gamma \cdot c + F_3 \cdot a = 23,14 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_z = F_1 \sin \gamma \cdot a - F_4 \cdot b.$$

Модуль и направляющие косинусы главного момента системы сил относительно центра О равны

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 58,1 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\cos(\bar{M}_O, \bar{i}) = \frac{M_x}{M_O} = -0,583; \quad \cos(\bar{M}_O, \bar{j}) = \frac{M_y}{M_O} = 0,398; \quad \cos(\bar{M}_O, \bar{k}) = \frac{M_z}{M_O} = -0,708.$$

4. Определение характеристического произведения системы сил и угла между главным вектором и главным моментом

Как известно,

$$H = \bar{R}^* \cdot \bar{M}_O = R_x^* \cdot M_x + R_y^* \cdot M_y + R_z^* \cdot M_z = -120,59 H^2 \cdot m;$$

$$\cos \varphi = \frac{H}{R^* \cdot M_O} = -0,021; \quad \varphi = 91,18^\circ.$$

5. Определение простейшего вида данной системы сил.

Так как главный вектор и главный момент не равны нулю и не перпендикулярны друг другу (рисунок 1.8), то данная система четырёх сил приводится к динамическому винту $D(\bar{R}, \bar{M}')$.

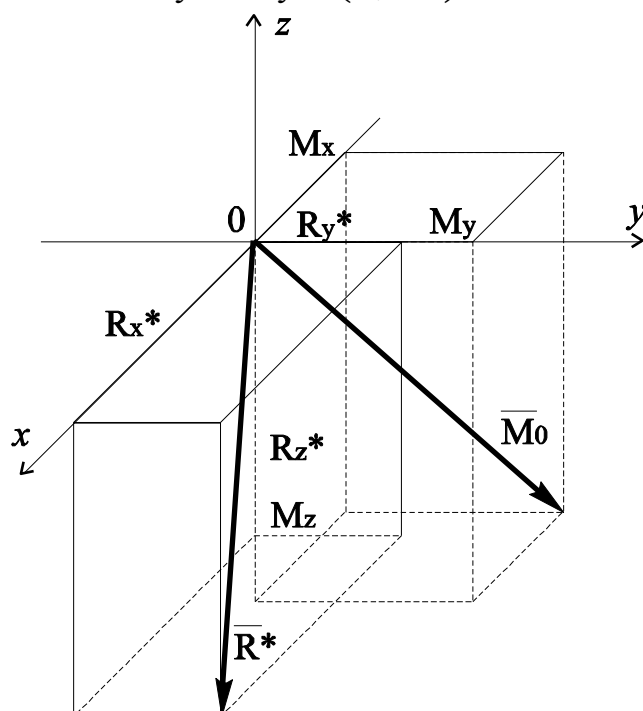


Рисунок 1.8 — Главный вектор и главный момент заданной системы сил.

6. Определение наименьшего значения главного момента системы сил.

Воспользуемся формулой

$$M^* = |M_O \cos \varphi| = \frac{|H|}{R^*} = 1,2 H \cdot m.$$

7. Определение характера динамического винта.

Так как $H < 0$, то винт является левым.

Сила этого винта равна главному вектору

$$R = R^* = 100,6 H,$$

а момент его пары равен наименьшему моменту системы сил

$$M' = M^* = 1,2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

8. Определение положения точки, через которую проходит ось динамического винта.

Ось винта параллельна главному вектору $\vec{R}^*$ и проходит через точку O' , которая находится на перпендикуляре к плоскости $(\vec{R}^*; \vec{M}_O)$ на расстоянии

$$d = OO' = \frac{|M_O \sin \varphi|}{R^*} = 0,58 \text{ м}.$$

Ответ: данная система сил эквивалентна динамическому винту, у которого сила $R = 100,6 \text{ Н}$, а момент пары $M' = 1,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

РГР 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

Цель:

- закрепить теоретические знания студентов по теме "Плоское движение твёрдого тела";
- развить у студентов навыки в определении кинематических характеристик плоского механизма для заданного положения.

ЗАДАНИЕ

Кривошип ОА (ведущее звено) механизмов, схемы которых изображены на рисунках 2.1, 2.2 и 2.3, вращается равномерно с угловой скоростью ω_1 .

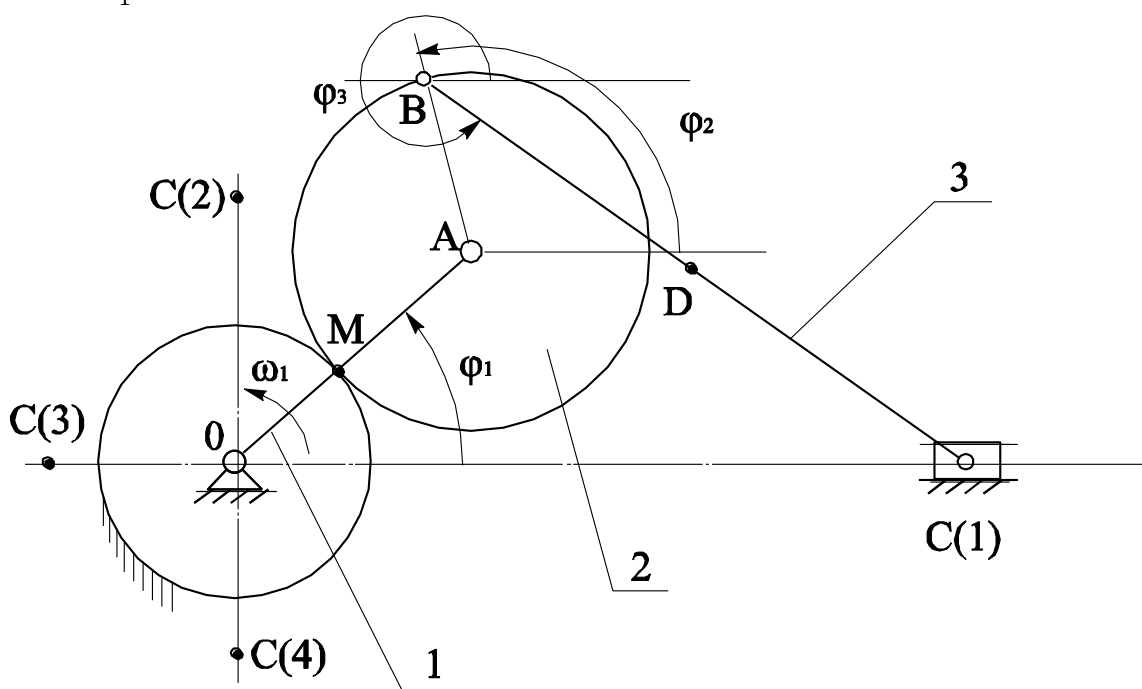


Рисунок 2.1 — Схема 1 заданного плоского механизма.

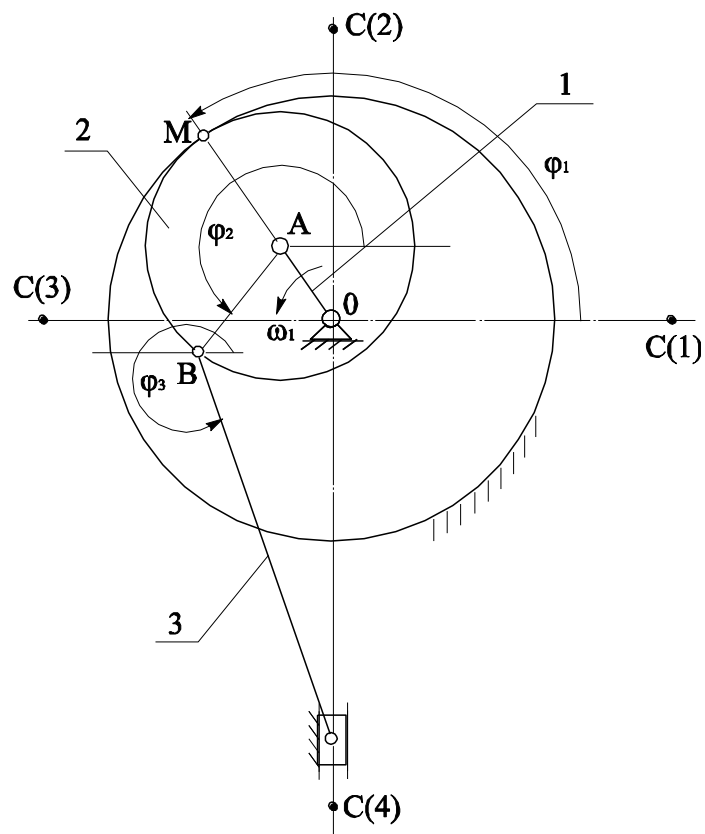


Рисунок 2.2 — Схема 2 заданного плоского механизма.

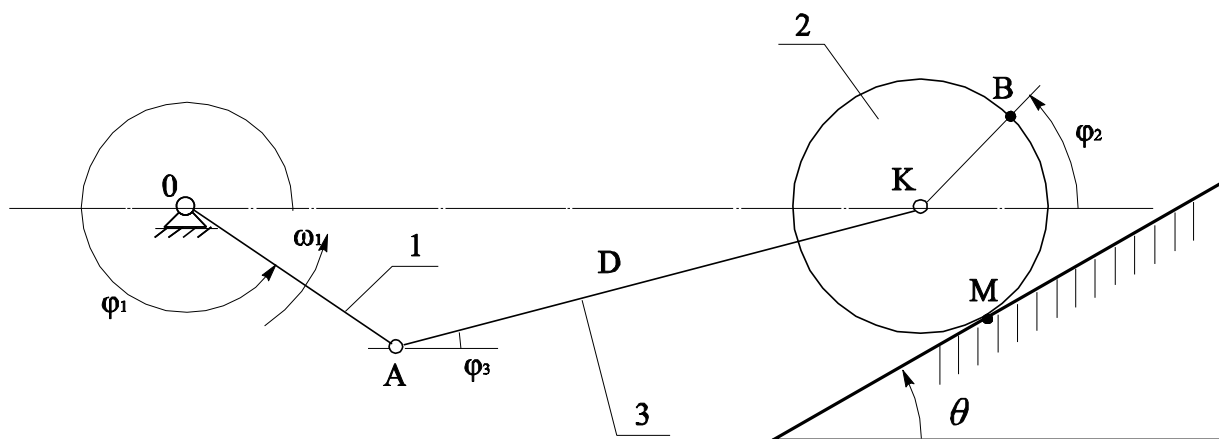


Рисунок 2.3 — Схема 3 заданного плоского механизма.

Шестеренка 2 катится по неподвижной опоре без скольжения.

В схемах 1 и 2 ползун С может занимать одно из двух горизонтальных положений C(1) или C(3), одно из двух вертикальных положений C(2) или C(4). Точка D является серединой шатуна BC или AK.

Угловые координаты φ_1, φ_2 , и φ_3 считаются положительными, если

они отчитываются от соответствующих прямых против хода часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего с конца оси z . Аналогичное правило применяется и для угловых скоростей и угловых ускорений.

Исходные данные (расчётная схема механизма и необходимые числовые величины) приведены в сводной таблице, подготовленной для каждого класса с помощью ЭВМ. Распечатки с вариантами задания на РГР выдаются преподавателями кафедры механики.

По условию задачи требуется:

- используя теорему о скорости любой точки плоской фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса, определить сначала *геометрическим методом*, а затем *аналитическим методом* скорости $\bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_C, \bar{v}_K, \bar{v}_D$ отмеченных точек и угловые скорости ω_2, ω_3 ведомых звеньев механизма в его заданном положении;

- используя теорему об ускорении любой точки плоской фигуры как геометрической суммы ускорения полюса и двух ускорений этой точки при вращении фигуры вокруг полюса, определить сначала *геометрическим методом*, а затем *аналитическим методом* ускорения $\bar{w}_A, \bar{w}_B, \bar{w}_C, \bar{w}_K, \bar{w}_D$ отмеченных точек и угловые ускорения $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ ведомых звеньев механизма в его заданном положении.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

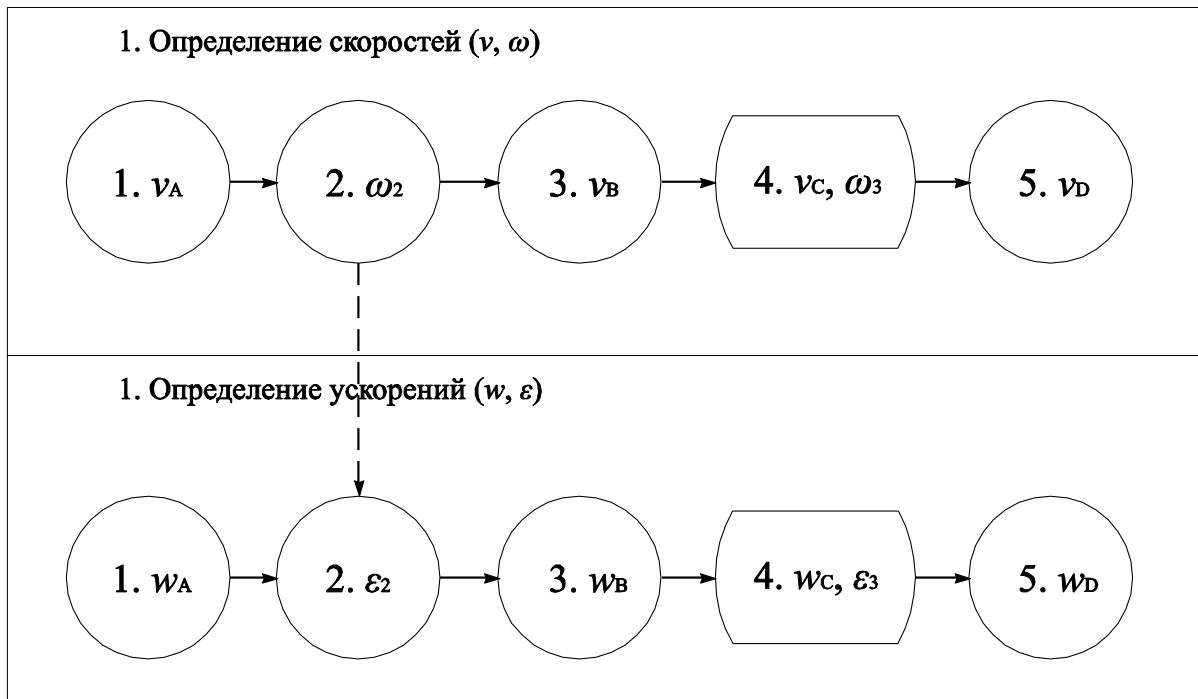
1. Схему механизма, скорости и ускорения всех отмеченных точек вычерчивать в выбранных масштабах, которые должны быть указаны на всех чертежах.

2. Найденные векторы скоростей отмеченных точек изображать прямолинейными стрелками красного цвета, а их векторы ускорений — стрелками зелёного или синего цвета.

3. Направления угловых скоростей и угловых ускорений всех звеньев изображать круговыми стрелками как на чертежах, так и над буквами в окончательных ответах.

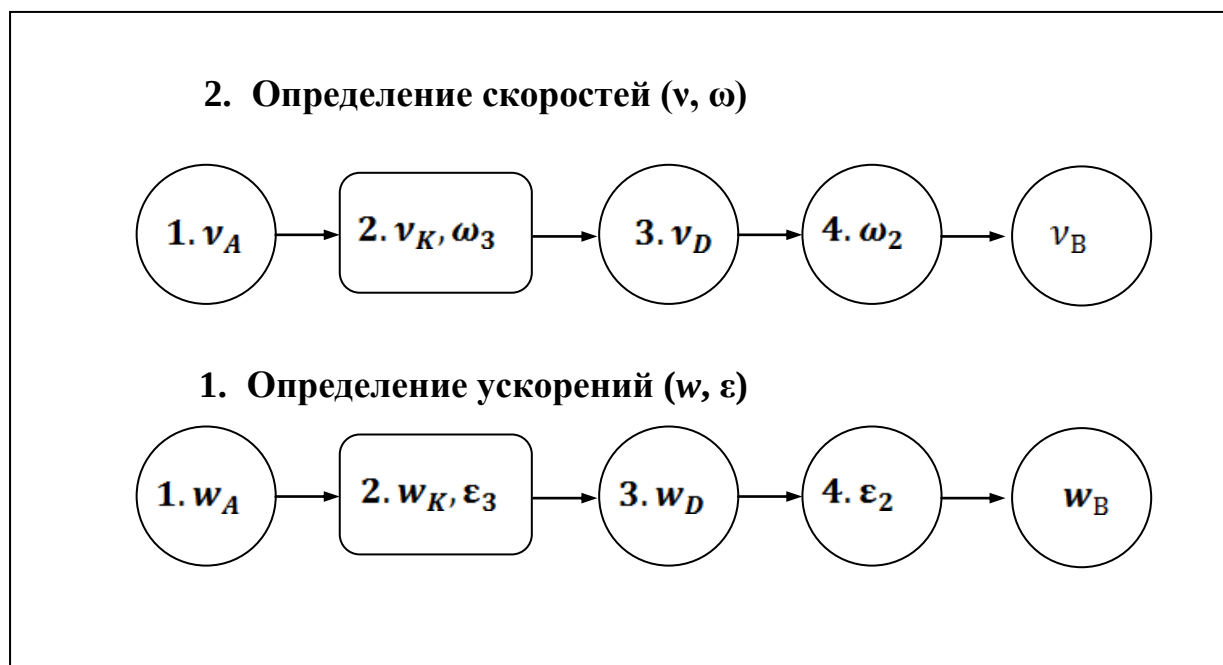
4. Расчёт искомых величин рекомендуется выполнять в последовательности, указанной в графах № 1,2.

Граф № 1 (для схем 1 и 2)



5. Результаты расчёта оформить в виде таблицы, как указано в примере решения задачи ниже.

Граф № 2 (для схемы 3)



ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача К - 1-2. Исходные данные приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

№ п/п	№ схемы	Точка С	φ_1 , град.	ОА, см.	АВ, см.	φ_2 , град.	ВС, см.	φ_3 , град.	ω_1 рад/с.
35	1	(1)	30	16	9	90	55	?	7

Определить в заданном положении механизма:

$$v_A, \quad v_B, \quad v_C, \quad v_D;$$

$$\omega_2, \quad \omega_3;$$

$$w_A, \quad w_B, \quad w_C, \quad w_D;$$

$$\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3.$$

Решение.

Вычерчиваем схему механизма в выбранном масштабе и вводим систему координат Охуz (рисунок 2.4).

Дальнейшие операции производим согласно графу № 1.

1. Определение скоростей отмеченных точек и угловых скоростей звеньев механизма.

Скорость точки (пальца) А кривошипа ОА. Эта скорость является вращательной вокруг О и равна

$$v_A = |\omega_1| \cdot OA = 7 \cdot 0,16 = 1,12 \text{ м/с.}$$

Найденную скорость (и все последующие) изображаем в выбранном масштабе красной стрелкой на чертеже схемы механизма.

Угловая скорость подвижной шестерёнки 2. Воспользуемся тем, что для звена 2 известны скорости двух точек: $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_M = 0$ (шестерёнка катится без скольжения).

Принимая точку А за полюс, скорость точки М представляем в виде

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA} = 0,$$

причём

$$\bar{v}_{MA} \perp AM; \quad v_{MA} = |\omega_2| \cdot AM. \quad (2.1)$$

Откуда следует

$$\bar{v}_{MA} = -\bar{v}_A \Rightarrow v_{MA} = v_A, \quad (2.2)$$

то есть вращательная скорость точки М вокруг А равна по модулю скорости точки А и противоположна ей по направлению (см. рисунок 2.4).

Из последних формул получаем

$$|\widehat{\omega_2}| = \frac{v_{MA}}{AM} = \frac{v_A}{AM} = 12,44 \text{ рад/с.}$$

По вращательной скорости $\bar{v}_{MA}$ устанавливаем, что шестерёнка 2 в

данном положении поворачивается против часовой стрелки. Этот факт отмечаем круговой стрелкой на чертеже схемы механизма и над буквой в ответе.

Скорость точки В. Эту скорость определяем как сумму двух скоростей:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

В этой формуле оба вектора в её правой части известны по модулю и направлению. Действительно, вектор $\vec{v}_A$ найден выше, а вращательная скорость $\vec{v}_{BA}$ по модулю равна

$$v_{BA} = v_{MA} = v_A$$

и направлена перпендикулярно АВ в сторону вращения шестерёнки 2.

Сначала скорость точки В находим геометрическим методом. Для этого

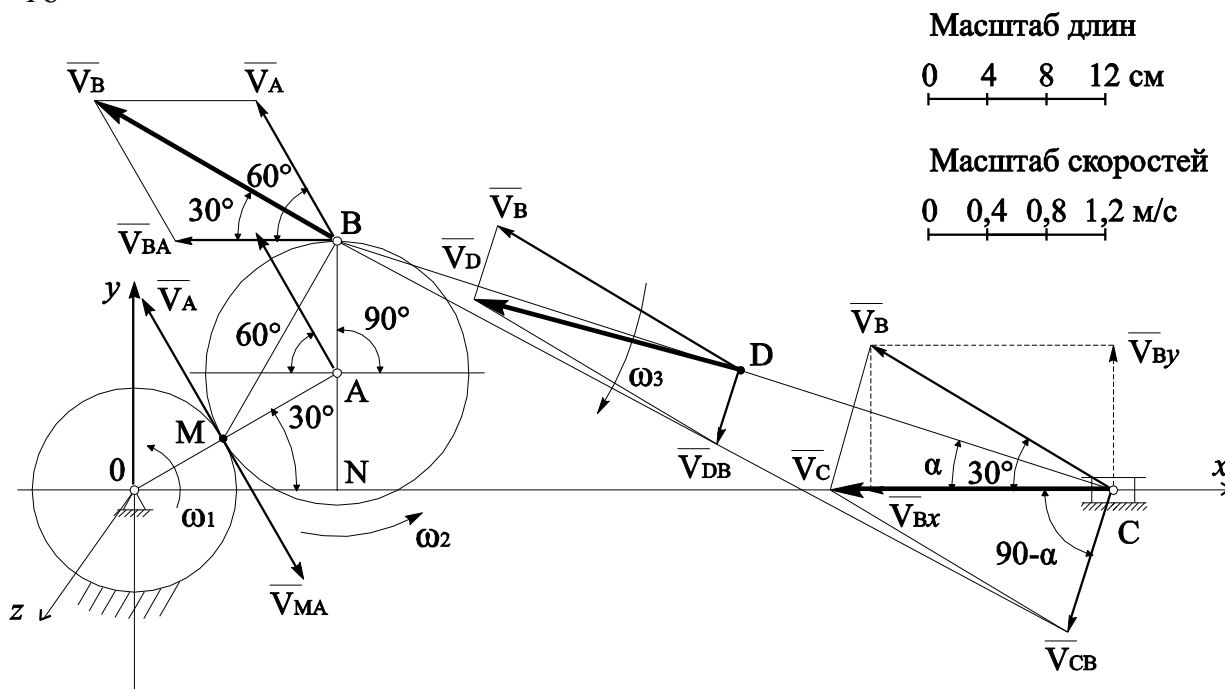


Рисунок 2.4 – Линейные и угловые скорости.

строим параллелограмм на векторах $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_{BA}$. Вектор $\vec{v}_B$ изображается диагональю этого параллелограмма. Измеряя длину этой диагонали и учитывая масштаб построения, получаем

$$v_B = 1,90 \text{ м/с}.$$

При определении v_B аналитическим методом можно воспользоваться теоремой косинусов или, что более эффективно, составить проекции вектора $\vec{v}_B$ на координатные оси:

$$v_{Bx} = -v_A \cdot \cos 60^\circ - v_{BA} = -1,68 \text{ м/с};$$

$$v_{BY} = v_A \cdot \sin 60^\circ = 0,97 \text{ м/с}.$$

По этим проекциям находим

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = 1,94 \text{ м/с}.$$

Скорость точки С и угловая скорость шатуна ВС. Для шатуна ВС, совершающего сложное плоское движение, известны скорость точки В по модулю и направлению и скорость точки С только по направлению (точка С как центр ползуна движется вдоль направляющей).

Записываем уравнение

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}, \quad (2.3)$$

причём

$$\vec{v}_{CB} \perp BC; \quad v_{CB} = |\omega_3| \cdot BC. \quad (2.4)$$

Построим с помощью уравнения (2.3) в выбранном масштабе параллелограмм так, чтобы его диагональю была скорость $\vec{v}_C$, а сторонами — скорости $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_{CB}$. Для этого проводим через точку С прямую, перпендикулярную ВС (по ней направляем вектор $\vec{v}_{CB}$), а затем через конец вектора $\vec{v}_B$ прямую, параллельную первой прямой до встречи с осью направляющей ползуна.

Чтобы закончить построение, следует через точку встречи провести прямую, параллельную вектору $\vec{v}_B$.

Из построенного параллелограмма видны истинные направления векторов $\vec{v}_C$ и $\vec{v}_{CB}$.

Измеряя линейкой длину стороны и диагонали параллелограмма, получаем

$$v_{CB} = 1,02 \text{ м/с}; \quad v_C = 1,99 \text{ м/с}.$$

Теперь найдем эти величины аналитическим методом. Учитывая, что

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{Bx} + \vec{v}_{By},$$

формуле (2.1) придаём вид

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{Bx} + \vec{v}_{By} + \vec{v}_{CB}.$$

На рисунке (2.4) векторы $\vec{v}_{Bx}, \vec{v}_{By}$ изображаем пунктирными стрелками. Затем спроецируем последнее равенство на координатные оси:

$$\begin{aligned} -v_C &= -|\vec{v}_{Bx}| - v_{CB} \cdot \cos(90^\circ - \alpha); \\ 0 &= |\vec{v}_{By}| - v_{CB} \cdot \sin(90^\circ - \alpha). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из треугольника BNC видно, что

$$\sin \alpha = \frac{BN}{BC} = \frac{AB + AN}{BC}.$$

Так как

$$AN = OA \cdot \sin 30^\circ,$$

то

$$\sin \alpha = \frac{AB + OA \cdot \sin 30^\circ}{BC}.$$

Для заданных числовых значений величин получаем

$$\sin \alpha = 0,309, \quad \cos \alpha = 0,951, \quad \alpha = 18^\circ.$$

Разрешается угол α определять на чертеже с помощью транспортира. Решая уравнения (2.5) находим

$$v_{CB} = 1,02 \text{ м/с}, \quad v_C = 2,00 \text{ м/с}.$$

Из формулы (2.4) следует

$$|\vec{\omega}_3| = \frac{v_{CB}}{CB} = 1,85 \text{ рад/с}.$$

Направление этой угловой скорости определяем с помощью вектора $\vec{v}_{CB}$.

Скорость точки D. По известным $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_{CB}$ можно найти скорость точки D из уравнения

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{DB}, \quad (2.6)$$

причём

$$\vec{v}_{DB} \perp BD, \quad v_{DB} = 0,5 v_{CB},$$

так как эта точка является серединой шатуна.

Для точки D на рисунке 2.4 строим параллелограмм скоростей, из которого с помощью линейки определяем

$$v_D = 1,90 \text{ м/с}.$$

Для аналитического определения этой скорости спроецируем равенство (2.6) на координатные оси:

$$\begin{aligned} v_{Dx} &= -|v_{Bx}| - v_{DB} \cdot \sin \alpha = -1,84 \text{ м/с}; \\ v_{Dy} &= |v_{By}| - v_{DB} \cdot \cos \alpha = 0,49 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v_D = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = 1,90 \text{ м/с}.$$

2. Определение ускорений отмеченных точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Снова вычерчиваем схему механизма в выбранном масштабе (рисунок 2.5).

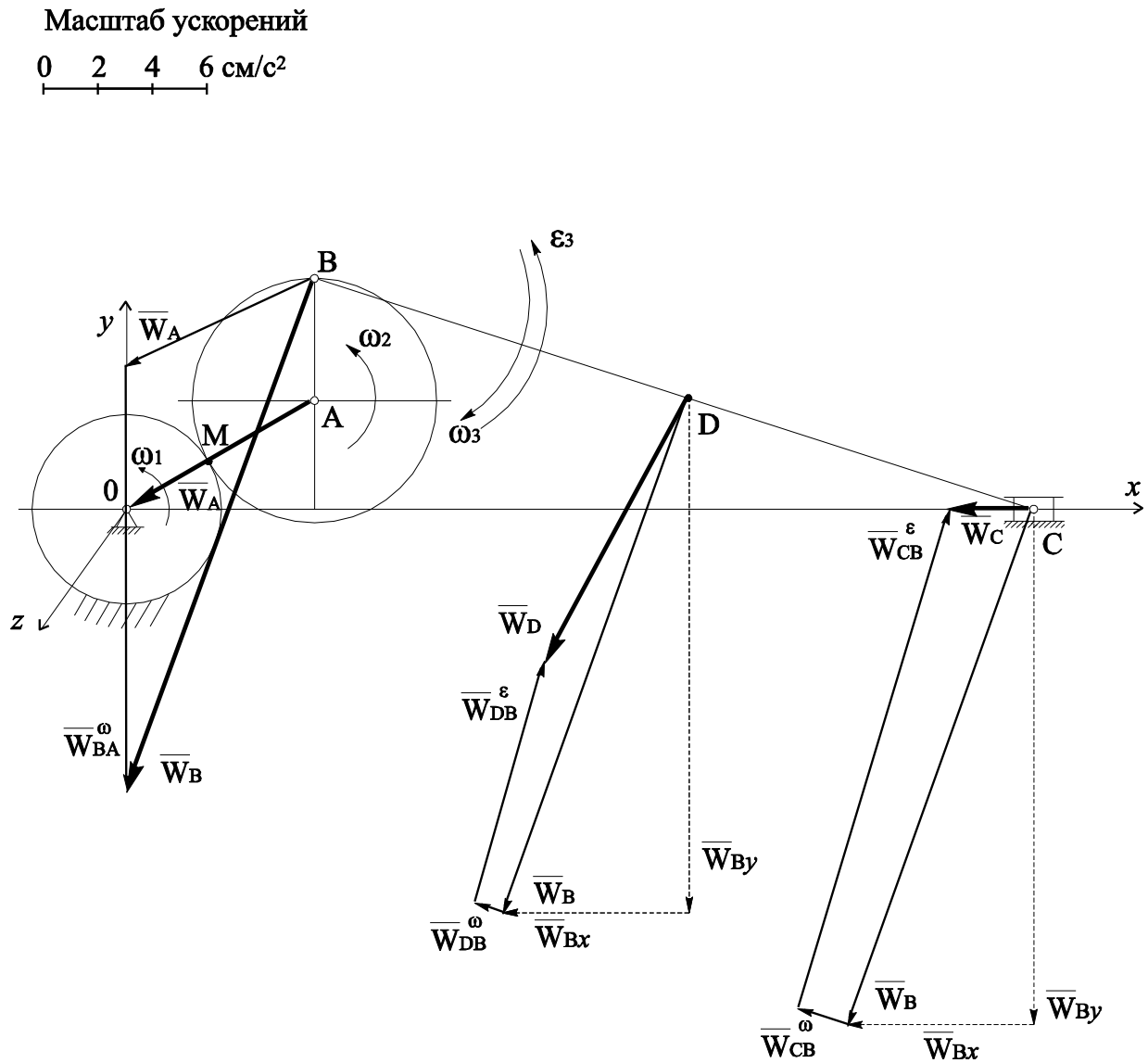


Рисунок 2.5 — Линейные и угловые ускорения

Ускорение точки A. Воспользуемся формулой, определяющей ускорение точки вращающегося тела

$$\overline{w}_A = \overline{w}_A^{\omega} + \overline{w}_A^{\varepsilon}.$$

Так как $\omega_1 = const$, то $\varepsilon_1 = 0$ и, следовательно, вращательное ускорение $w_A^{\varepsilon} = \varepsilon_1 \cdot OA = 0$. Поэтому

$$\overline{w}_A = \overline{w}_A^{\omega}.$$

Вычисляем модуль центростремительного ускорения

$$w_A^{\omega} = \omega_1^2 \cdot OA = 7,84 м/с^2; \quad \overline{w}_A^{\omega} \downarrow \downarrow AO.$$

Таким образом,

$$w_A = 7,84 м/с^2.$$

Вектор $\overline{w}_A$ изображаем в выбранном масштабе на рисунке (2.5) зелёной (синей) стрелкой.

Угловое ускорение подвижной шестерёнки 2. Из условия $\overline{v}_M = 0$ были получены формулы (2.1) и (2.2), из которых следует равенство

$$|\omega_2| \cdot AM = v_A,$$

или, так как $v_A = |\omega_1| \cdot OA$,

$$|\omega_2| \cdot AM = |\omega_1| \cdot OA. \quad (2.7)$$

Заметим, что формула (2.7) справедлива не только для данного положения механизма, но и для любого его положения. В самом деле, в любом положении шестерёнки 2 скорость точки М будет равна нулю, а расстояние АМ есть величина постоянная, всё время равная радиусу этой шестерёнки.

Так как $\omega_1 = const$, то из формулы (2.7) следует, что $\omega_2 = const$ и тем самым

$$\varepsilon_2 = 0.$$

Ускорение точки В. Для определения этого ускорения выбираем за полюс точку А. Ускорение $\overline{w}_B$ складывается из трех ускорений

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}^{\omega} + \overline{w}_{BA}^{\varepsilon}.$$

По найденным значениям $\omega_2 = 12,44 рад/с$ и $\varepsilon_2 = 0$ вычисляем

$$w_{BA}^{\omega} = \omega_2^2 \cdot AB = 13,43 м/с^2; \quad w_{BA}^{\omega} \downarrow\downarrow BA,$$

$$w_{BA}^{\varepsilon} = \varepsilon_2 \cdot AB = 0.$$

Таким образом,

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}^{\omega}.$$

Строим в выбранном масштабе треугольник ускорений, из которого с помощью линейки находим

$$w_B = 19,10 м/с^2.$$

Для аналитического определения модуля вектора ускорения точки В воспользуемся методом проекций:

$$w_{Bx} = -w_A \cdot \cos 30^\circ = -6,79 м/с^2;$$

$$w_{By} = -w_A \cdot \sin 30^\circ = -17,86 м/с^2.$$

Следовательно,

$$w_B = \sqrt{w_{Bx}^2 + w_{By}^2} = 19,10 м/с^2.$$

Ускорение точки С и угловое ускорение шатуна ВС. В качестве полюса выбираем точку В и представляем ускорение $\overline{w}_C$ в виде

$$\overline{w_C} = \overline{w_{Bx}} + \overline{w_{By}} + \overline{w_{CB}^\omega} + \overline{w_{CB}^\varepsilon} \quad (2.8)$$

На рисунке 2.5 для точки С строим согласно формуле (2.8) в выбранном масштабе многоугольник ускорений. Для этого изображаем известный вектор $\overline{w_{By}}$, к концу которого прикладываем также известный вектор $\overline{w_{Bx}}$, а к его концу — вектор $\overline{w_{CB}^\omega}$; модуль этого вектора равен

$$w_{CB}^\omega = \omega_3^2 \cdot BC = 1,88 м/с^2; \quad \overline{w_{CB}^\omega} \uparrow\uparrow CB.$$

Затем через конец последнего вектора проводим прямую, перпендикулярную шатуну ВС и определяющую линию действия вектора $\overline{w_{CB}^\varepsilon}$. Наконец, через точку С проводим прямую, параллельную СО и определяющую линию действия вектора $\overline{w_C}$. Точка пересечения построенных линий определяет концы векторов $\overline{w_{CB}^\varepsilon}$ и $\overline{w_C}$.

С помощью линейки находим

$$w_C = 2,86 м/с^2; \quad w_{CB}^\varepsilon = 18,10 м/с^2.$$

Находим эти же величины аналитическим методом. Заметим, что если предварительно многоугольник ускорений для точки С не построен, то истинное направление векторов $\overline{w_{CB}^\varepsilon}$ и $\overline{w_C}$ нам неизвестно. Поэтому эти векторы направляют по их линиям действия в любую на выбор сторону. Если в ходе решения получим ту или иную величину с отрицательным знаком, то это означает, что истинное направление соответствующего вектора противоположно выбранному направлению.

Направим эти векторы, например, так как указано на рисунке 2.5. Затем проецируем равенство (2.8) на координатные оси:

$$-w_C = -|w_{Bx}| - w_{CB}^\omega \cdot \cos \alpha + w_{CB}^\varepsilon \cdot \sin \alpha;$$

$$0 = -|w_{By}| + w_{CB}^\omega \cdot \sin \alpha + w_{CB}^\varepsilon \cdot \cos \alpha.$$

Решая последние уравнения, получаем

$$w_{CB}^\varepsilon = 18,19 м/с^2; \quad w_C = 2,84 м/с^2.$$

По найденному вращательному ускорению точки С находим угловое ускорение шатуна

$$|\widehat{\epsilon_3}| = \frac{w_{CB}^\varepsilon}{BC} = 33,80 рад/с^2.$$

Направление этого углового ускорения определяем по истинному направлению вектора $\overline{w_{CB}^\varepsilon}$. Круговые стрелки у величин ω_3 и ϵ_3 , изображённые на рисунке 2.5, показывают, что шатун в данном положении вращается замедленно.

Ускорение точки D. Ускорение этой точки определяем по формуле

$$\overline{w_D} = \overline{w_{Bx}} + \overline{w_{By}} + \overline{w_{DB}^\omega} + \overline{w_{DB}^\varepsilon}. \quad (2.9)$$

Так как точка D является серединой шатуна, то

$$w_{DB}^\omega = 0,5 w_{CB}^\omega = 0,94 м / с^2; \quad \overline{w_{DB}^\omega} \downarrow\downarrow DB;$$

$$w_{DB}^\varepsilon = 0,5 w_{CB}^\varepsilon = 9,10 м / с^2; \quad \overline{w_{DB}^\varepsilon} \perp DB.$$

Теперь все векторы в правой части формулы (2.9) известны по модулю и направлению. Строим многоугольник ускорений для точки D, из которого получаем

$$w_D = 9,94 м / с^2.$$

Подтвердим полученный результат аналитическим методом:

$$w_{Dx} = -|\overline{w_{Bx}}| - w_{DB}^\omega \cdot \cos \alpha + w_{DB}^\varepsilon \cdot \sin \alpha = -4,82 м / с^2;$$

$$w_{Dy} = -|\overline{w_{By}}| + w_{DB}^\omega \cdot \sin \alpha - w_{DB}^\varepsilon \cdot \cos \alpha = -8,73 м / с^2;$$

$$w_D = 9,97 м / с^2.$$

Найденные величины помещаем в таблицу 2.2.

Таблица 2.2

Метод	v_A	$ \omega_2 $	v_B	v_C	$ \omega_3 $	v_D	w_A	ε_2	w_B	w_C	$ \varepsilon_3 $	w_D
Геом.	1,12	—	1,90	1,99	—	1,90	7,84	—	19,10	2,86	—	9,94
Анал.	1,12	12,44	1,94	2,00	1,85	1,90	7,84	0	19,10	2,84	33,80	9,97

Задача К-3. Исходные данные приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

№ п/п	№ схемы	θ град	φ_1 град.	ОА см.	АК см.	φ_2 град.	БК см.	φ_3 град.	ω_1 рад/с.
35	3	30	210	18	75	210	18	?	6

Определить в заданном положении механизма:

$$v_A, \quad v_K, \quad v_D, \quad v_B, \\ \omega_2, \quad \omega_3, \\ w_A, \quad w_K, \quad w_D, \quad w_B. \\ \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3.$$

Решение. Вычерчиваем схему механизма в выбранном масштабе и вводим систему координат Kxy (рисунок 2.6).

Дальнейшие операции производим согласно годографу №2.

1. Определение скоростей отмеченных точек и угловых скоростей звеньев механизма.

Скорость точки (пальца) А кривошипа ОА. Эта скорость является вращательной вокруг О и равна

$$v_A = |\omega_1| \cdot OA = 6 \cdot 0,18 = 1,08 м / с.$$

Найденную скорость (и все последующие) изображаем в выбранном масштабе красной стрелкой на чертеже схемы механизма.

Скорость точки К и угловая скорость шатуна АК. Для шатуна, совершающего сложное плоское движение, известны скорость точки А по модулю и направлению и скорость точки К по направлению (точка К как центр колеса движется параллельно опорной плоскости).

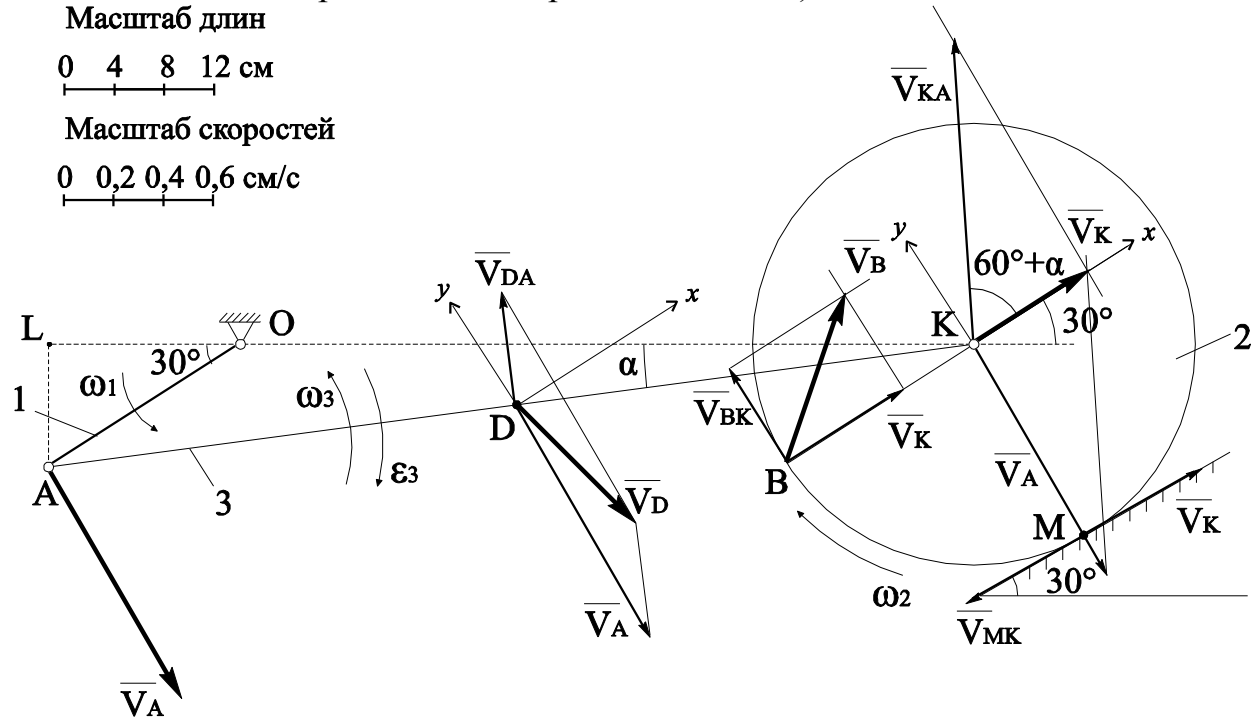


Рисунок 2.6 – Линейные и угловые скорости

Выбирая за полюс точку А, записываем уравнение

$$\vec{v}_K = \vec{v}_A + \vec{v}_{KA}, \quad (2.10)$$

причём

$$\vec{v}_{KA} \perp AK, \quad v_{KA} = |\omega_3| \cdot AK. \quad (2.11)$$

Сначала скорость точки К находим геометрическим методом. Для этого строим согласно уравнению (2.10) в выбранном масштабе на скоростях $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_{KA}$ параллелограмм, диагональ которого изображает вектор $\vec{v}_K$.

Из построенного параллелограмма видны истинные направления скоростей $\vec{v}_K$ и $\vec{v}_{KA}$. Измеряя линейкой длину стороны и диагонали в нём, получаем с учётом принятого масштаба

$$v_{KA} = 1,18 \text{ м/с}, \quad v_K = 0,46 \text{ м/с}.$$

Для определения этих же величин аналитическим методом спроецируем векторное равенство (2.10) на координатные оси системы Кху:

$$v_K = v_{KA} \cos(60^\circ + \alpha); \quad (2.12)$$

$$0 = -v_A + v_{KA} \sin(60^\circ + \alpha).$$

Из рисунка замечаем, что

$$\sin \alpha = \frac{AL}{AK} = \frac{OA \sin 30^\circ}{AK} = 0,12$$

и тем самым $\alpha = 7^\circ$. Разрешается угол определять на чертеже с помощью транспортира.

Из системы уравнений (2.12) находим

$$v_{KA} = \frac{v_A}{\sin(60^\circ + \alpha)} = 1,17 \text{ м/с}; \quad v_K = \frac{v_A}{\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)} = 0,46 \text{ м/с}.$$

Из формулы (2.11) следует

$$|\vec{\omega}_3| = \frac{v_{KA}}{AK} = 1,57 \text{ рад/с}.$$

По направлению вращательной скорости $\vec{v}_{KA}$ определяем, что в данном положении механизма шатун АК поворачивается против часовой стрелки.

Скорость точки D. По известным скоростям $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_{DA}$ находим скорость точки D из уравнения

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{DA},$$

причём $\vec{v}_{DA} \perp AD$, $v_{DA} = 0,5 v_{CA}$, так как эта точка является серединой шатуна АК.

В параллелограмме, построенном согласно последнему уравнению, измеряем линейкой длину диагонали, которая с учётом масштаба определяет модуль скорости точки D

$$v_D = 0,60 \text{ м/с}.$$

Для аналитического определения этой же величины спроецируем векторное равенство на координатные оси системы Dxy:

$$v_{Dx} = v_{DA} \cos(60^\circ + \alpha) = 0,23 \text{ м/с}; \quad v_{Dy} = v_{DA} \sin(60^\circ + \alpha) = -0,54 \text{ м/с}.$$

Откуда

$$v_D = \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2} = 0,59 \text{ м/с}.$$

Угловая скорость катка. Воспользуемся тем, что для него известны скорости двух точек: $\vec{v}_K$ и $\vec{v}_M = 0$ (каток катится без скольжения). Принимаем точку K за полюс и представляем скорость точки M в виде

$$\vec{v}_M = \vec{v}_K + \vec{v}_{MK} = 0,$$

причём

$$\vec{v}_{MK} \perp KM, \quad v_{MK} = |\omega_2| \cdot KM. \quad (2.13)$$

Откуда следует

$$\vec{v}_{MK} = -\vec{v}_K \Rightarrow v_{MK} = v_K, \quad (2.14)$$

то есть вращательная скорость точки М вокруг точки К равна по модулю скорости точки К и противоположна по направлению (см. рисунок 2.6).

Откуда получаем

$$|\vec{\omega}_2| = \frac{v_{MK}}{KM} = \frac{v_K}{KM} = 2,56 \text{ рад/с}.$$

Вращательная скорость $\vec{v}_{MK}$ показывает, что каток в данном положении поворачивается по часовой стрелке.

Скорость точки В. Эту скорость определяем как сумму двух скоростей

$$\vec{v}_B = \vec{v}_K + \vec{v}_{BK},$$

причём

$$\vec{v}_{BK} \perp KB, \quad v_{BK} = v_{MK} = 0,46 \text{ м/с}.$$

Как видно из рисунка 2.6, в данном случае $\vec{v}_{BK} \perp \vec{v}_K$, $v_{BK} = v_K$ и, следовательно, скорость $\vec{v}_B$ изображается диагональю квадрата, длина которой с учётом масштаба определяет модуль этой скорости:

$$v_B = 0,65 \text{ м/с}.$$

Эту скорость можно найти по теореме Пифагора

$$v_B = \sqrt{v_K^2 + v_{BK}^2} = 0,65 \text{ м/с}.$$

2. Определение ускорений отмеченных точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Снова вычерчиваем схему механизма в выбранном масштабе (рисунок 2.7).

Ускорение точки А. Воспользуемся формулой, определяющей ускорение точки вращающегося тела

$$\vec{w}_A = \vec{w}_A^\omega + \vec{w}_A^\varepsilon.$$

Так как $\omega_1 = \text{const.}$, то $\varepsilon_1 = 0$ и, следовательно, вращательное ускорение точки А $w_A^\varepsilon = |\varepsilon_1| \cdot OA = 0$. Поэтому

$$\vec{w}_A = \vec{w}_A^\omega.$$

Вычислим модуль центростремительного ускорения

$$w_A^\omega = \omega_1^2 \cdot OA = 6,48 \text{ м/с}^2, \quad \vec{w}_A^\omega \uparrow\uparrow OA.$$

Таким образом,

$$w_A = 6,48 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{w}_A$ изображаем в выбранном масштабе на рисунке 2.7 зелёной (синей) стрелкой.

Ускорение точки К и угловое ускорение шатуна АК. Для шатуна АК известны ускорение точки А по модулю и направлению и ускорение точки К только по направлению (вектор $\vec{w}_K$ направлен параллельно опорной

плоскости).

В качестве полюса выбираем точку К и записываем ускорение $\overline{w}_K$ в виде

$$\overline{w}_K = \overline{w}_A + \overline{w}_{KA}^{\omega} + \overline{w}_{KA}^{\varepsilon}, \quad (2.15)$$

причем $\overline{w}_{KA}^{\omega} \downarrow\downarrow KA$, $w_{KA}^{\omega} = \omega_3^2 \cdot AK$.

На рисунке 2.7 для точки К строим согласно уравнению в принятом масштабе многоугольник ускорений. Для этого изображаем известный вектор $\overline{w}_A$, а к его концу — также известный вектор $\overline{w}_{KA}^{\omega}$. Затем через конец последнего вектора проводим прямую, перпендикулярную шатуну АК и определяющую линию действия вектора $\overline{w}_{KA}^{\varepsilon}$. Наконец, через точку К проводим прямую, параллельную опорной плоскости и определяющую линию действия вектора $\overline{w}_K$. Точка пересечения построенных линий определяет концы векторов $\overline{w}_K$ и $\overline{w}_{KA}^{\varepsilon}$.

С помощью линейки находим

$$w_K = 4,46 \text{ м/с}^2, \quad w_{KA}^{\varepsilon} = 0,80 \text{ м/с}^2.$$

Найдём эти же величины аналитическим методом. Заметим, что если предварительно многоугольник ускорений для точки К не построен, то истинные направления векторов $\overline{w}_K$ и $\overline{w}_{KA}^{\varepsilon}$ нам неизвестны. Поэтому эти вектора направляют по их линиям действия в любую на выбор сторону. Если в ходе решения получим ту или иную величину отрицательной, то это означает, что истинное направление соответствующего вектора противоположно выбранному.

Принимаем что векторы $\overline{w}_K$ и $\overline{w}_{KA}^{\varepsilon}$ направлены так, как указано на рисунке 2.7.

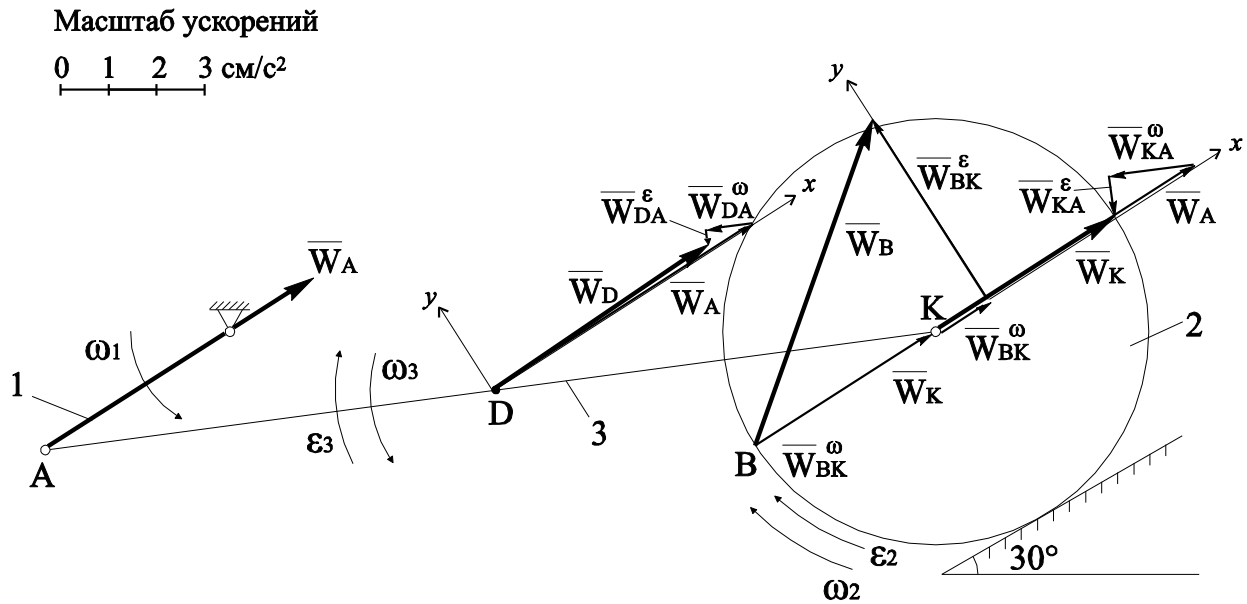


Рисунок 2.7 – Линейные и угловые ускорения

Проецируя равенство (2.13) на координатные оси системы Кху, получаем

$$w_K = w_A - w_{KA}^{\omega} \cos(30^\circ - \alpha) - w_{KA}^{\varepsilon} \cos(60^\circ + \alpha);$$

$$0 = w_{KA}^{\omega} \sin(30^\circ - \alpha) - w_{KA}^{\varepsilon} \sin(60^\circ + \alpha).$$

Решая эту систему, находим

$$w_{KA}^{\varepsilon} = 1,85 \text{ м/с}, \quad w_K = 4,47 \text{ м/с}.$$

Затем вычисляем

$$|\widehat{\varepsilon}_3| = \frac{|w_{KA}^{\varepsilon}|}{AK} = 1,05 \text{ рад/с}.$$

Направление углового ускорения ε_3 определяем по направлению вектора $\overline{w}_{KA}^{\varepsilon}$ и изображаем на рисунке круговой стрелкой. Круговые стрелки для ω_3 и ε_3 показывают, что шатун АК в данном положении механизма вращается замедленно.

Ускорение точки D. Воспользуемся формулой

$$\overline{w}_D = \overline{w}_A + \overline{w}_{DA}^{\omega} + \overline{w}_{DA}^{\varepsilon}, \quad (2.16)$$

в правой части которой все векторы известны по модулю и направлению:

$$w_A = 6,48 \text{ м/с}^2, \quad \overline{w}_A \uparrow\uparrow AO; \quad w_{DA}^{\omega} = 0,5 w_{KA}^{\omega} = 0,93 \text{ м/с}^2, \quad \overline{w}_{DA}^{\omega} \downarrow\downarrow DA;$$

$$w_{DA}^{\varepsilon} = 0,5 w_{KA}^{\varepsilon} = 0,39 \text{ м/с}, \quad \overline{w}_{DA}^{\varepsilon} \perp AD.$$

Из построенного для точки D согласно уравнению многоугольника ускорений находим

$$w_D = 5,43 \text{ м/с}^2.$$

Для аналитического определения этой величины спроецируем равенство (2.14) на координатные оси системы Dxy

$$w_{Dx} = w_A - w_{DA}^{\omega} \cos(30^0 - \alpha) - w_{DA}^{\varepsilon} \cos(60^0 + \alpha);$$

$$w_{Dy} = w_{DA}^{\omega} \sin(30^0 - \alpha) - w_{DA}^{\varepsilon} \sin(60^0 + \alpha).$$

Откуда следует

$$w_D = \sqrt{w_{Dx}^2 + w_{Dy}^2} = 5,42 \text{ м/с}^2.$$

Угловое ускорение катка. Из условия $\overline{w}_M = 0$ были получены формулы (2.13) и (2.14), из которых следует

$$|\omega_2| \cdot BK = v_K.$$

Заметим, что эта формула справедлива не только для данного положения механизма, но и для любого его положения, то есть в любой момент времени t . Дифференцируя выражение (2.16) по t , получаем

$$|\varepsilon_2| \cdot BK = w_K. \quad (2.17)$$

Откуда находим

$$|\widehat{\varepsilon_2}| = \frac{w_K}{BK} = 24,89 \text{ рад/с}.$$

Так как точка К в данном положении механизма движется ускоренно, то из соотношения (2.17) вытекает, что каток вращается также ускоренно. Следовательно, угловое ускорение ε_2 совпадает по направлению с угловой скоростью ω_2 .

Ускорение точки В катка. Для катка теперь известны ускорение точки К и угловые характеристики ω_2 и ε_2 . Выбирая за полюс точку К, записываем уравнение

$$\overline{w}_B = \overline{w}_K + \overline{w}_{BK}^{\omega} + \overline{w}_{BK}^{\varepsilon}, \quad (2.18)$$

причём

$$w_K = 4,48 \text{ м/с}^2, \quad \overline{w}_K \uparrow \uparrow BK; \quad w_{BK}^{\omega} = \omega^2 \cdot BK = 1,18 \text{ м/с}^2, \quad \overline{w}_{BK}^{\omega} \uparrow \uparrow BK;$$

$$w_{BK}^{\varepsilon} = |\varepsilon_2| \cdot BK = 4,48 \text{ м/с}^2, \quad \overline{w}_{BK}^{\varepsilon} \perp BK.$$

Из построенного для точки В согласно уравнению (2.18) многоугольника ускорений находим

$$w_B = 7,20 \text{ м/с}^2.$$

Для определения этой величины аналитически методом спроецируем равенство (2.18) на координатные оси

$$w_{Bx} = w_K + w_{BK}^{\omega} = 5,66 \text{ м/с}^2; \quad w_{By} = w_{BK}^{\varepsilon} = 4,48 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно,

$$w_B = \sqrt{w_{Bx}^2 + w_{By}^2} = 7,22 \text{ м/с}^2.$$

Найденные величины помещаем в таблицу 2.4.

Таблица 2.4.

Метод	v_A	v_K	$ \omega_3 $	v_D	$ \omega_2 $	v_B	w_A	w_K	$ \varepsilon_3 $	w_D	$ \varepsilon_2 $	w_B
Геом.	1,08	0,46	—	0,60	—	0,65	6,48	4,47	—	5,43	—	7,20
Анал.	1,08	0,46	1,57	0,59	2,56	0,65	6,48	4,47	1,05	5,42	24,80	7,22

РГР 3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Цель:

- закрепить теоретические знания студентов по теме "Теорема об изменении кинетической энергии механической энергии";
- развить у студентов навыки в применении данной теоремы к решению конкретных задач на движение механической системы с одной степенью свободы.

ЗАДАНИЕ

Механическая система, в состав которой входят 3 из 16 указанных на рисунке 3.1 элементов, под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Трением в подшипниках и массами нитей пренебречь. Качение тел происходит без скольжения.

Исходные данные для решения задачи (номера средних и крайних элементов системы, необходимые числовые величины) студент найдёт в таблице, подготовленной с помощью ЭВМ и выдаваемой преподавателями кафедры механики.

В таблице приняты следующие обозначения:

m_1, m_2, m_3, m_4 – массы соответственно тела А, В, С, и D;

R_1, R_2, R_3, R_4 – радиусы тел, изображённых на рисунке 3.1;

i – радиус инерции тела С или В относительно оси вращения, проходящей через центр масс (в элементах 1,2,5,6,9,10,14,15);

α, β – углы наклона плоскостей к горизонту;

f – коэффициент трения скольжения тела (в элементах 11, 12);

f_K – коэффициент трения качения тел С (или тела А в системах, содержащих элементы 5,6,7);

s – путь центра масс тела А.

В элементах 3,4,7,8,13,16 тела считать однородными цилиндрами.

Используя данную теорему, требуется:

- установить область самоторможения данной системы — промежуток для соотношения масс тел А и С (или А и D), определяемого величиной

$$\mu = \frac{m_3}{m_1} \text{ (или } \rho = \frac{m_4}{m_1} \text{);}$$

- выяснить направление движения центра масс тела А при заданном соотношении масс μ (или ρ);

- определить скорость v центра масс тела А при заданном соотношении масс μ (или ρ) в тот момент, когда он проходит заданный путь s ;

- построить график зависимости скорости v от относительной массы μ (или ρ) при опускании и поднятии тела при заданном пути s .

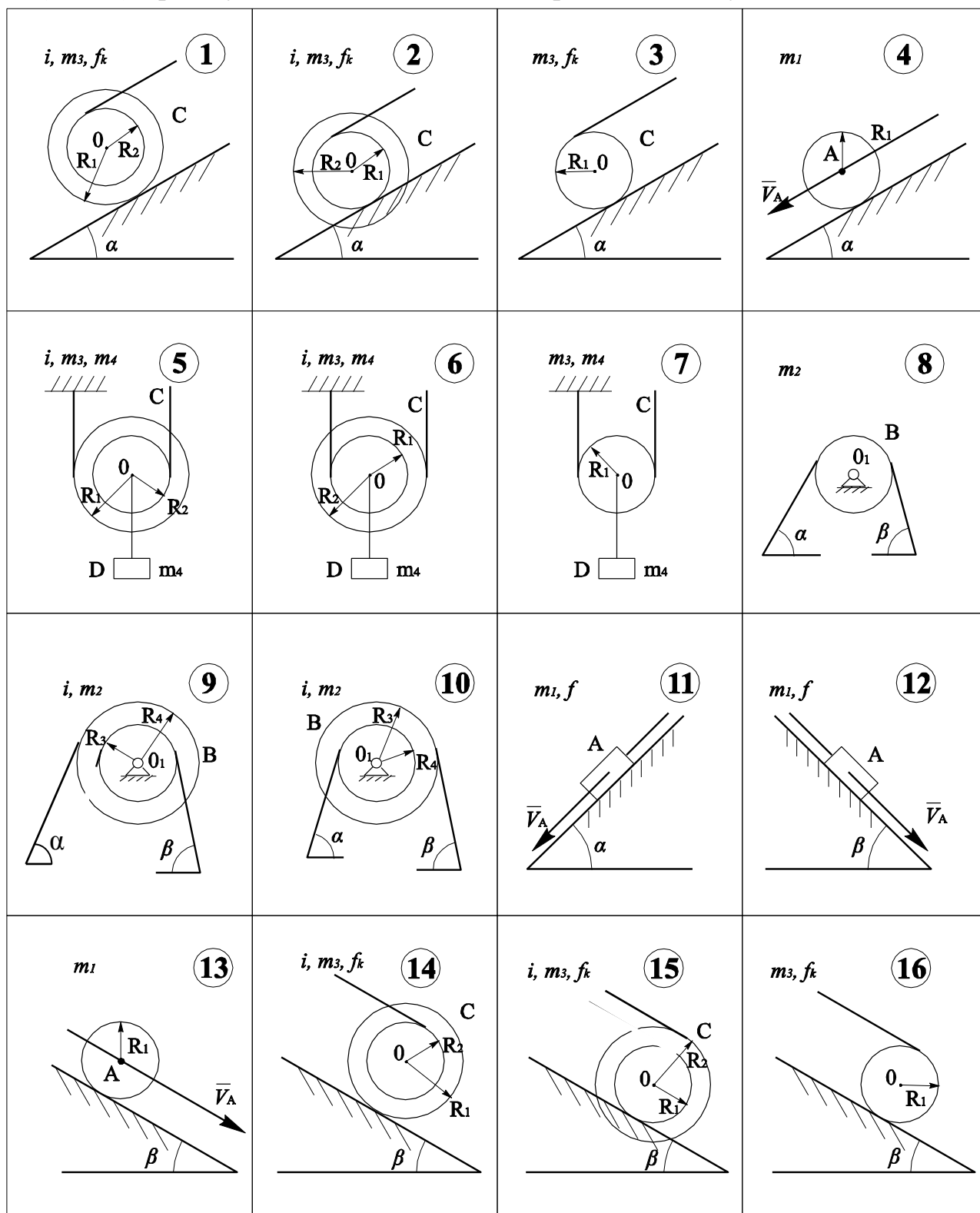


Рисунок 3.1 — Набор элементов механической системы

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. При составлении и изображении схемы механической системы необходимо учесть, что во всех вариантах задания элементы 8,9,10 являются средними, а остальные элементы — крайними в этой системе.

2. Геометрические радиусы, радиусы инерции тел и коэффициент трения качения задаются в виде их отношений к радиусу R_1 :

$$\frac{R_2}{R_1}, \quad \frac{R_3}{R_1}, \quad \frac{f_k}{R_1}.$$

3. Массы тел задаются в виде их отношений к массе m_1 :

$$\nu = \frac{m_2}{m_1}, \quad \mu = \frac{m_3}{m_1}, \quad \rho = \frac{m_4}{m_1}.$$

4. В качестве контрольного теста вычислить отношения T_A, T_B, T_C, T к $\frac{1}{2}mv^2$, а также отношения $A(\overline{F}^{TP}), A(M^{TP}), A^e$ к m_1 .

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Задача Д. Исходные данные приведены в таблице 3. 1.

Таблица 3.1

№ п/п	№ элемента			Соотношение масс			Соотношение радиусов				α град	β град	Коэфф. трения		s, m
	Лев	Сред	Прав	ν $\frac{m_2}{m_1}$	μ $\frac{m_3}{m_1}$	ρ $\frac{m_4}{m_1}$	$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{R_3}{R_1}$	$\frac{R_3}{R_4}$	$\frac{i}{R_1}$			f	$\frac{f_k}{R_1}$	
35	11	8	15	0,5	2	—	2	—	—	0,5	60	45	0,1	0,02	1,2

Требуется ответить на вопросы задания.

Решение.

1. Синтез механической системы. Расчётное уравнение.

По условию задачи изображаем схему механической системы в конечном положении при опускании тела А (рисунок 3.2).

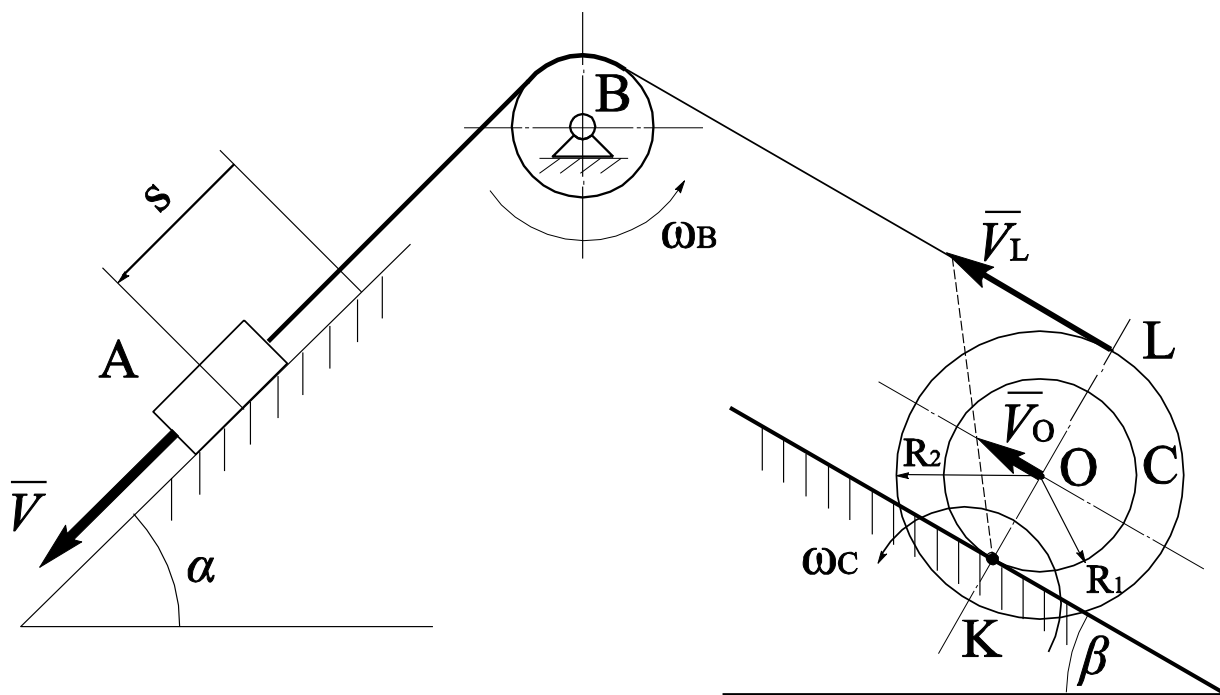


Рисунок 3.2 – Кинематическая схема механической системы.

Изображаем скорость $\bar{v}$ и для определения её модуля воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме, выражаемой уравнением

$$T_2 - T_1 = A^e + A^i.$$

Так как данная система имеет одну степень свободы, то её кинетическую энергию можно выразить через скорость v . Поскольку эта система состоит из абсолютно твёрдых тел, соединённых нерастяжимыми нитями, то работа всех внутренних сил будет равна нулю. Работу же всех внешних сил можно выразить через перемещение s . Таким образом, в рассматриваемом случае

$$T_1 = T_0 = 0, \quad T_2 = T(v), \quad A^i = 0, \quad A^e = A^e(s).$$

Расчётное уравнение принимает вид

$$T(v) = A^e(s) \quad (3.1)$$

2. Определение кинетической энергии системы.

Кинетическая энергия системы не зависит от направления движения центра масс тела A и равна сумме энергий её элементов

$$T = T_A + T_B + T_C.$$

Тело A совершает поступательное движение. Поэтому

$$T_A = \frac{1}{2} m_1 v^2.$$

Кинетическая энергия однородного вращающегося вокруг неподвиж-

ной оси блока В равна

$$T_B = \frac{1}{2} J_B \omega_B^2,$$

где $J_B = \frac{1}{2} m_2 R_B^2 = \frac{1}{2} \nu m_1 R_B^2$;

$$\omega_B = \frac{v}{R_B}.$$

Таким образом,

$$T_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \nu m_1 R_B^2 \cdot \frac{v^2}{R_B^2} = \frac{1}{4} \nu m_1 v^2.$$

Кинетическая энергия катка С, совершающего плоское движение, определяем по теореме Кенига

$$T_C = \frac{1}{2} m_3 v_O^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2,$$

где $J_C = m_3 i^2 = \mu m_1 i^2$ — момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс;

i — радиус инерции катка относительно этой же оси.

Так как К — мгновенный центр скоростей (МЦС) катка, то

$$\frac{v_O}{v_L} = \frac{KO}{KL} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad \omega_C = \frac{v_L}{R_1 + R_2}.$$

Поскольку $v_L = v_O$, то из последних соотношений получаем

$$v_O = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} v, \quad \omega_C = \frac{\frac{1}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} v.$$

Следовательно,

$$T_C = \frac{1}{2} \mu m_1 \frac{1}{(1 + \frac{R_2}{R_1})^2} v^2 + \frac{1}{2} \mu m_1 \frac{\frac{i^2}{R_1^2}}{(1 + \frac{R_2}{R_1})^2} v^2 = \frac{1}{2} \mu m_1 \frac{1 + \frac{i^2}{R_1^2}}{(1 + \frac{R_2}{R_1})^2} v^2.$$

Кинетическая энергия системы в её конечном положении равна

$$T = \frac{1}{2} [m_1 + \frac{1}{2} \nu m_1 + \mu m_1 \frac{1 + \frac{i^2}{R_1^2}}{(1 + \frac{R_2}{R_1})^2}] v^2.$$

Величина

$$m_{\text{пр}} = m_1 + \frac{1}{2} \nu m_1 + \mu m_1 \frac{1 + \frac{i^2}{R_1^2}}{(1 + \frac{R_2^2}{R_1^2})} \quad (3.2)$$

называется **приведённой массой** механической системы.

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{пр}} v^2. \quad (3.3)$$

3. Определение работы внешних сил и области самоторможения.

Работа сил зависит от направления движения тела А.

3.1. Работа сил при опускании тела А.

Изобразим систему в промежуточном положении при опускании тела А и укажем все действующие на неё силы и моменты (рисунок 3.3):

$\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ – силы тяжести соответственно тел А, В, С;

$\bar{N}_1, \bar{N}_2$ – нормальные реакции наклонных плоскостей;

$\bar{N}_3$ – реакция оси блока;

$\bar{F}_1^{TP}, \bar{F}_3^{TP}$ – силы трения скольжения;

M_3^{TP} – момент пары трения качения.

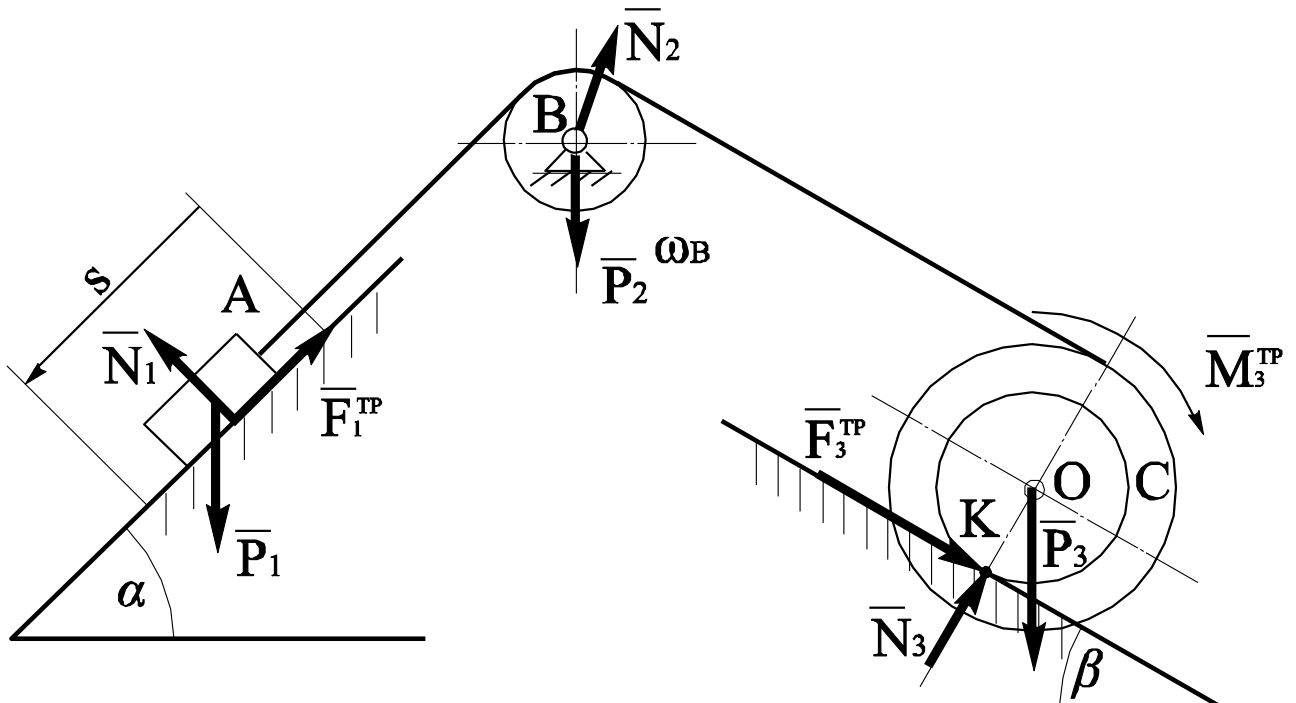


Рисунок 3.3 – Силовая схема механической системы при опускании

тела A

Искомая работа определяется суммой

$$A^e = A(\bar{P}_1) + A(\bar{N}_1) + A(\bar{F}_1^{TP}) + A(\bar{P}_2) + A(\bar{N}_2) + A(\bar{P}_3) + A(\bar{N}_3) + A(\bar{F}_3^{TP}) + A(M_3^{TP}).$$

Находим слагаемые этой суммы

$$A(\bar{P}_1) = m_1 g \sin \alpha \cdot s.$$

Так как сила $\bar{N}_1$ перпендикулярна перемещению точки её приложения, то

$$A(\bar{N}_1) = 0.$$

Далее

$$A(\bar{F}_1^{TP}) = -f N_1 \cdot s = -f m_1 g \cos \alpha \cdot s.$$

Для сил $\bar{P}_2$ и $\bar{N}_2$, приложенных в неподвижной точке, имеем

$$A(\bar{P}_2) = 0, \quad A(\bar{N}_2) = 0.$$

Находим

$$A(\bar{P}_3) = -m_3 g \sin \beta \cdot s_O = -\mu m_1 g \sin \beta \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} s,$$

так как

$$s_O = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} s.$$

Поскольку точкой приложения сил $\bar{N}_3$ и $\bar{F}_3^{TP}$ является мгновенный центр скоростей, то

$$A(\bar{N}_3) = 0, \quad A(\bar{F}_3^{TP}) = 0.$$

Наконец, определяем

$$A(M_3^{TP}) = -f_K N_3 \cdot \varphi_3 = -f_K \mu m_1 g \cos \beta \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} s,$$

так как

$$\varphi_3 = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} s.$$

Следовательно, работа всех внешних сил при опускании тела A равна

$$A^e = [m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \mu m_1 g \frac{\sin \beta + \frac{f_k}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}}] s. \quad (3.4)$$

Величину

$$P_{\text{ПП}}^{(1)} = m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \mu m_1 g \frac{\sin \beta + \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}}, \quad (3.5)$$

входящую в выражение работы, принято называть **приведённой силой**.

Таким образом,

$$A^e = P_{np}^{(1)} s. \quad (3.6)$$

Записываем условие опускания тела A

$$A^e > 0.$$

Или, согласно выражению, (3.4)

$$m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \mu m_1 g \frac{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}} > 0,$$

откуда следует условие для соотношения масс тел A и C

$$\mu < \frac{(\sin \alpha - f \cos \alpha)(1 + \frac{R_2}{R_1})}{\sin \beta + \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}. \quad (3.7)$$

3.2. Работа сил при поднятии тела A .

На рисунке 3.4 изображены все внешние силы, действующие на систему, которая находится в промежуточном положении при поднятии тела A (при выполнении данной работы допускается эти силы не изображать на отдельном рисунке, а указывать их на рисунке 3.3 стрелками красного цвета).

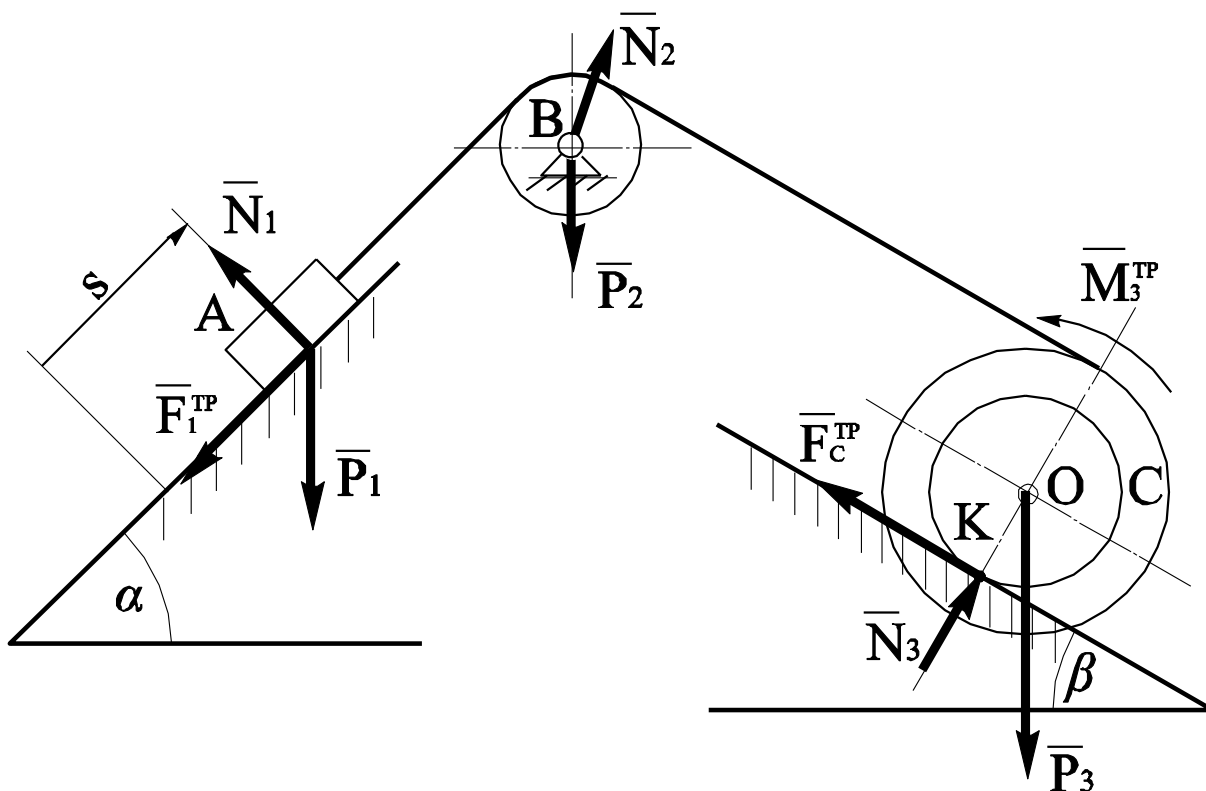


Рисунок 3.4 – Силовая схема механической системы при поднятии тела A.

Опуская выкладки, приводим выражение искомой работы сил в окончательном виде

$$A^e = [-m_1 g (\sin \alpha + f \cos \alpha) + \mu m_1 g \frac{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}}] s. \quad (3.8)$$

Или

$$A^e = P_{PP}^{(2)} s, \quad (3.9)$$

где **приведённая сила** определяется формулой

$$P_{PP}^{(2)} = -m_1 g (\sin \alpha + f \cos \alpha) - \mu m_1 g \frac{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}}. \quad (3.10)$$

Условие поднятия тела A

$$A^e > 0,$$

Или, согласно выражению (3.8) ,

$$-m_1 g(\sin \alpha + f \cos \alpha) + \mu m_1 g \frac{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}} > 0,$$

откуда получаем

$$\mu > \frac{(\sin \alpha + f \cos \alpha)(1 + \frac{R_2}{R_1})}{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}. \quad (3.11)$$

3.3. Область самоторможения системы.

Обозначим правые части неравенств (3.7) и (3.11) соответственно

$$\mu_* = \frac{(\sin \alpha - f \cos \beta)(1 + \frac{R_2}{R_1})}{\sin \beta + \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}; \quad (3.12)$$

$$\mu^{**} = \frac{(\sin \alpha + f \cos \alpha)(1 + \frac{f_K}{R_1})}{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}. \quad (3.13)$$

На основании (3.7) и (3.11) заключаем, что ни при каких значениях μ из промежутка

$$\mu_* \leq \mu \leq \mu^{**} \quad (3.14)$$

данная механическая система не может прийти в движении из состояния покоя: система находится в *состоянии самоторможения*. Условия определяют *область самоторможения системы* по отношению к величине μ .

4. Определение скорости центра масс тела А.

Подставляя в расчётное уравнение (3.1) выражения (3.2) и (3.6) (или (3.9)), получаем

$$\frac{1}{2} m_{\Pi P} v^2 = P_{\Pi P} s.$$

Договоримся скорость опускания тела А считать положительной, а поднятия — отрицательной. Тогда из последнего уравнения получаем

$$v = \pm \sqrt{\frac{2P_{\Pi P} s}{m_{\Pi P}}}. \quad (3.15)$$

Следует иметь в виду, что в формуле (3.15) величина $m_{\Pi P}$ в любом

случае определяется выражением (3.2) ,а $P_{ПП}$ — выражением (3.5) ,если тело А опускается, и выражением (3.10), если оно поднимается.

Формулы (3.2), (3.5), (3.10) преобразуем к другому виду. Для этого вводим относительную приведённую массу и относительную приведённую силу

$$\tilde{m}_{ПП} = \frac{m_{ПП}}{m_1} = 1 + \frac{1}{2}v + \mu \frac{1 + \frac{i^2}{R_1^2}}{(1 + \frac{R_2}{R_1})^2}; \quad (3.16)$$

$$\tilde{P}_{ПП}^{(1)} = \frac{P_{ПП}^{(1)}}{m_1} = \sin \alpha - f \cos \alpha - \mu \frac{\sin \beta + \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}}; \quad (3.17)$$

$$\tilde{P}_{ПП}^{(2)} = \frac{P_{ПП}^{(2)}}{m_1} = -(\sin \alpha + f \cos \alpha) + \mu \frac{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \quad (3.18)$$

Тогда скорость при опускании тела А определяется формулой

$$v = + \sqrt{\frac{2\tilde{P}_{ПП}^{(1)} g s}{\tilde{m}_{ПП}}}, \quad (3.19)$$

а при поднятии

$$v = - \sqrt{\frac{2\tilde{P}_{ПП}^{(2)} g s}{\tilde{m}_{ПП}}}. \quad (3.20)$$

Теперь вычисляем скорость v при заданных $v = 0,5$, $\mu = 2$ и $s = 1,2m$.

Предварительно устанавливаем границы области самоторможения системы по формулам (3.12) и (3.13)

$$\mu_* = 3,39; \quad \mu^{**} = 3,97.$$

Сравнивая заданную величину $\mu = 2$ с найденными μ_* и μ^{**} , видим, что $\mu < \mu_*$. Следовательно, центр масс тела А опускается. В этом случае по формулам (3.16), (3.17) и (3.19) находим

$$\tilde{m}_{ПП} = 1,528, \quad \tilde{P}_{ПП}^{(1)} = 0,335, \quad v = 2,27 \text{ м/с}.$$

4. Построение графика зависимости $v = v(\mu)$ при заданных $v = 0,5$ и $s = 1,2m$.

Формулы (3.16), (3.17) и (3.18) в этом случае приобретают вид

$$\tilde{m}_{ПП} = 1,250 + 0,139\mu;$$

$$\tilde{P}_{PP}^{(1)} = 0,816 - 0,240\mu;$$

$$\tilde{P}_{PP}^{(2)} = -0,916 + 0,231\mu.$$

Принимая во внимание последние выражения, записываем формулы (3.19) и (3.20) следующим образом

$$v = + \sqrt{\frac{23,544(0,816 - 0,240\mu)}{1,250 + 0,139\mu}}, \text{ если } \mu < \mu_*;$$

$$v = - \sqrt{\frac{23,544(-0,916 + 0,231\mu)}{1,250 + 0,139\mu}}, \text{ если } \mu > \mu^{**}.$$

Требуемый график в соответствии с последними выражениями изображён на рисунке 3.5.

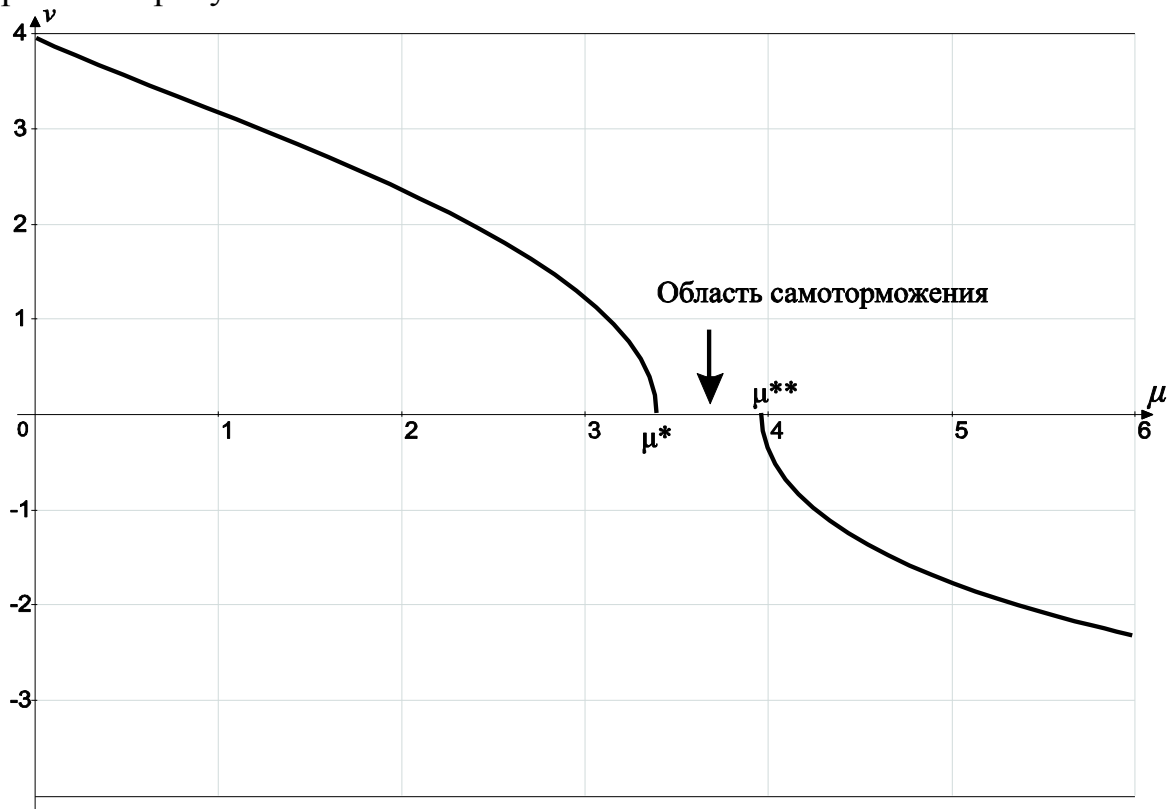


Рисунок 3.5. – График зависимости $v = v(\mu)$.

Ответ: $\mu_* = 3,39$; $\mu^{**} = 3,97$; центр масс тела А опускается со скоростью $v = 2,27 \text{ м/с}$.

5. Контроль вычислений.

Вычисляем

$$\frac{T_A}{\frac{1}{2}m_1v^2} = 1,000; \quad \frac{T_B}{\frac{1}{2}m_1v^2} = 0,250; \quad \frac{T_C}{\frac{1}{2}m_1v^2} = 0,278; \quad \frac{T}{\frac{1}{2}m_1v^2} = 1,528;$$

$$\frac{1}{m_1} A(\overline{F}_1^{(TP)}) = -0,589; \quad \frac{1}{m_1} A(M_3^{TP}) = -0,111; \quad \frac{1}{m_1} A^e = 3,946.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
СОДЕРЖАНИЕ КУРСА	5
1. ВВЕДЕНИЕ	5
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	5
РАЗДЕЛ 1. СТАТИКА.....	5
2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ.....	5
3. СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ.....	5
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	6
4. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ	6
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	6
5. МОМЕНТЫ СИЛЫ.....	7
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	7
6. ПАРА СИЛ И ЕЁ СВОЙСТВА	7
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	7
7. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ	7
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	8
8. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ	8
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	8
9. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ	9
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	9
РАЗДЕЛ 2. КИНЕМАТИКА.....	9
1. ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ	9
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	9
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ	9
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	10
3. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА	10
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	11
4. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА	12
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	12
РАЗДЕЛ 3. ДИНАМИКА	13
1. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ	13
2. ДИНАМИКА ТОЧКИ	13
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	13
3. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	13
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	14
4. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ.....	14
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	15
5. МЕТОД КИНЕТОСТАТИКИ.....	17
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	17
6. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.....	17
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	18
7. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ.....	18
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	19
РГР 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛКИ. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ	

К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ	21
ЗАДАЧИ С - 1, С - 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ.....	21
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....	22
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	23
ЗАДАЧА С-3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ	27
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....	28
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ	28
ЗАДАЧА С – 4. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ	31
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....	31
РГР 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА.....	37
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....	39
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	41
РГР 3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	56
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....	58
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ	58

**Василий Михайлович Прусов, Лариса Олеговна Наголюк
Надежда Константиновна Корнеева**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Издается в авторской редакции

Технический редактор
Р.В. Дмитриева

Подписано к печати 20.10.15. Изд. № 188/15. Зак. 388/2015. Тираж 10 экз.
Объем 4,25 п. л. Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 4,14.
Формат бумаги 60х84 1/16

Издательский центр СевГУ