

ЦИФРОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ, СОВМЕЩЕННОЕ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ

Рассмотрен метод оптимального определения параметров цифрового преобразования случайных процессов, основанный на минимизации погрешности этого преобразования при заданных статистической структуре процессов, пропускной способности канала, порядке фильтра и виде кодирования. Он включает в себя аналитическую и численную составляющие.

Многие явления, с которыми приходится иметь дело на практике, описываются непрерывными (аналоговыми) процессами непрерывного времени. Это, в частности, гидрометеорологические, гидрофизические, оптические, акустические и ряд других процессов. Цифровая вычислительная техника может обрабатывать только дискретные процессы дискретного времени – последовательности чисел. Поэтому необходимо преобразование непрерывных процессов в цифровые последовательности, что осуществляется аналого-цифровыми преобразователями (АЦП). Последние выполняют две процедуры: временную дискретизацию процесса и квантование его по уровню. В дальнейшем будем считать, что дискретизация эквидистантна (все интервалы времени между отсчетами одинаковы и равны τ) и квантование равномерно (имеет одинаковый шаг q). Очевидно, что при построении АЦП для того или иного процесса необходимо правильно выбрать величины τ и q .

Если исходный процесс имеет финитный спектр, то величина шага дискретизации τ однозначно дается теоремой Котельникова, а шаг квантования может быть найден из величины допустимой погрешности преобразования. Однако спектры реальных процессов не финитны. Поэтому на практике стремятся их «офинитить», предварительно пропуская через различные фильтры низкой частоты, имеющие заданную частоту среза. При этом имеет место определенный субъективизм как в выборе вида фильтра, так и в выборе его частоты среза. Решение конкретной задачи сочетания параметров фильтра и АЦП в значительной мере зависит от вкуса и опыта разработчика.

Рассмотрим возможность создания АЦП, включающего в себя цифровую фильтрацию как неотъемлемую процедуру. Такой АЦП назовем фильтром-преобразователем. Разработаем метод расчета его параметров, оптимальных с точки зрения минимизации итоговой погрешности цифрового преобразования. В результате найдем не только конкретные значения оптимальных величин τ , q и частоты среза, но и вид оптимального фильтра, обеспечивающего эти величины. Решение такой задачи не оставляет места произволу в выборе указанных параметров.

Итак, пусть дан непрерывный центрированный случайный стационарный гауссовский процесс $X(t)$. Его необходимо превратить в эквидистантную цифровую последовательность путем дискретизации по времени и квантования по уровню. Найдем параметры такого преобразования, считая, что осуществляется линейная фильтрация исходного процесса и обеспечивается минимум полной погрешности этого преобразования.

Допустим, что первым этапом цифрового преобразования процесса $X(t)$ является его временная дискретизация с некоторым интервалом между его отсчетами, равном τ . Очевидно, что в моменты времени $t_m = m\tau$, ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) истинные значения этого процесса равны $X(t_m) = X(m\tau)$. Однако в любой информационной системе всегда присутствует случайный аддитивный шум $n(t)$. В частности, это может быть шум квантования процесса $X(t)$ по уровню. Будем считать шум $n(t)$ стационарным, центрированным и не коррелированным с процессом $X(t)$, что типично для такого вида шума. Отсюда следует, что реально в момент t_m результатом дискретизации является не истинная величина $X(t_m)$ процесса $X(t)$, а сумма его и шума $Y(t_m) = X(t_m) + n(t_m)$. Совокупность величин $Y(t_m)$ представляет собой непрерывный процесс дискретного времени (последовательность непрерывно распределенных чисел).

Подвергнем процесс $Y(t_m)$ линейной фильтрации с помощью фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ - фильтра). В результате получим новый непрерывный процесс дискретного времени

$$Z(t_i) = \sum_{m=-k}^L a_m Y(t_i - m\tau), \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1)$$

где a_m – постоянные действительные числа, представляющие собой весовые коэффициенты этого фильтра. Учитывая, что $t_i = i\tau$, запишем последнее выражение как

$$Z(i\tau) = \sum_{m=-k}^L a_m Y[(i - m)\tau], \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2)$$

Совокупность коэффициентов a_m можно представить в виде вектора

$$\mathbf{a}^T = (a_{-k}, a_{-k+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_L),$$

имеющего $N=L+k+1$ составляющих.

Фильтр (2) предназначен для получения значений процесса $Z(t)$ в момент it . Выберем систему отсчета времени, при которой $i = 0$. При этом значение $Z(0)$, согласно формуле (2), есть

$$Z(0) = \sum_{m=-k}^L a_m Y(-m\tau). \quad (3)$$

Вклад различных составляющих процесса $Y(m\tau)$ в величину $Z(0)$ показан на рисунке 1. На нем точке $t = 0$ соответствует настоящий момент времени, значениям $t < 0$ – прошлое время и значениям $t > 0$ – будущее время. Фильтр реального времени (т.е. физически реализуемый фильтр) может использовать только отсчеты процесса настоящего и прошлого моментов, а именно, номеров $0 \leq m \leq L$. В таком фильтре в формулах (1) – (3) следует положить $k=0$. Если же в процессе работы фильтра допускается запаздывание выходного сигнала на время $k\tau$, где $k > 0$, то в этих формулах можно считать $k \neq 0$. В общем случае будем считать выполненным последнее условие.

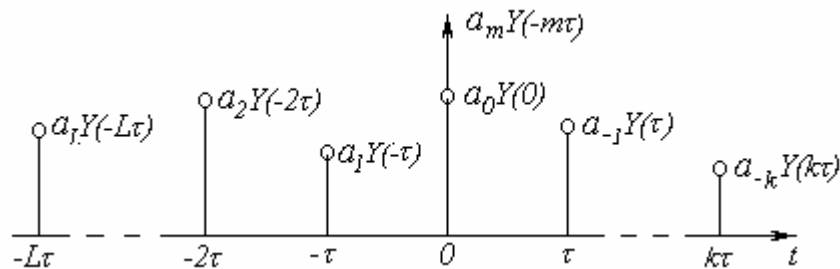


Рисунок 1– Взаимное расположение слагаемых формулы (3)

Итак, результатом временной дискретизации и фильтрации непрерывного процесса непрерывного времени $X(t)$ является непрерывный процесс дискретного времени (1) или (2). Для правильной работы любой информационной системы необходимо чтобы исходный процесс $X(t)$ и полученная из него последовательность в определенной мере соответствовали друг другу. Однако напрямую непрерывное и дискретное множества не сопоставимы. Для осуществления такого сопоставления необходимо по последовательности $Z(t_i)$ восстановить некоторый непрерывный (или кусочно-непрерывный) процесс $\tilde{X}(t)$, применяя тот или иной вид интерполяции, и сравнить его с процессом $X(t)$. Выберем для этой цели один из простейших видов интерполяции – кусочно-линейную.

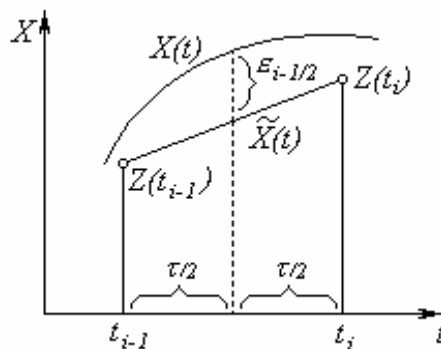


Рисунок 2– Интерполяция дискретизованного процесса

Обратимся к рисунку 2 и рассмотрим на нем процессы $X(t)$, $Z(t)$ и $\tilde{X}(t)$ на интервале времени (t_{i-1}, t_i) . В момент $t_{i-1} = (i-1)\tau$ процесс $Z(t)$ имеет значение

$$Z(t_{i-1}) = \sum_{m=-k}^L a_m Y[(i-m-1)\tau],$$

в момент $t_i = i\tau$ – значение (2). Интерполяцию процесса $\tilde{X}(t)$ в интервале (t_{i-1}, t_i) произведем прямой линией, проходящей через точки $Z(t_{i-1})$ и $Z(t_i)$. Очевидно, что эта линия в общем случае не совпадает с исходной кривой $X(t)$. Будем считать погрешностью $e_{i-1/2}$ восстановления процесса $X(t)$ на указанном временном интервале величину, равную разности исходного $X(t)$ и интерполирующего $\tilde{X}(t)$ значений в

середине этого интервала, т.е. $\varepsilon_{i-1/2} = X(t_{i-1/2}) - \tilde{X}(t_{i-1/2})$. Так как зависимость $\tilde{X}(t)$ предполагается линейной, то в середине интервала τ имеем $\tilde{X}(t_{i-1/2}) = \frac{1}{2}(Z(t_{i-1}) + Z(t_i))$. Средний квадрат этой погрешности есть

$$\varepsilon_{i-1/2}^2 = M[(X(t_{i-1/2}) - \tilde{X}(t_{i-1/2}))^2],$$

где символ $M[\bullet]$ означает осреднение величины, стоящей в скобках.

Найдем эту величину. После очевидных, но довольно громоздких вычислений получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i-1/2}^2 &= \sigma_X^2 - \sigma_X^2 \sum_{m=-k}^L a_m \left\{ R\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\tau\right] + R\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)\tau\right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=-k}^L \sum_{r=-k}^L a_m a_r \left\{ \sigma_X^2 [R[(m-r)\tau] + R[(m-r+1)\tau]] + \sigma_u^2 [R_{uu}[(m-r)\tau] + R_{uu}[(m-r+1)\tau]] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь σ_X^2 и σ_u^2 – дисперсии процесса $X(t)$ и шума $n(t)$, а $R(m\tau)$ и $R_{uu}(m\tau)$ – соответственно их нормированные корреляционные функции. Число слагаемых в суммах равно $N=L+k+1$.

Величина $\varepsilon_{i-1/2}^2$ не зависит от номера i , поэтому ее можно записать как $\varepsilon_{1/2}^2$. Из последнего выражения найдем средний квадрат относительной погрешности восстановления непрерывного процесса в середине интервала дискретизации:

$$\begin{aligned} \delta_{1/2}^2 &= \frac{\varepsilon_{1/2}^2}{\sigma_X^2} = 1 - \sum_{m=-k}^L a_m \left\{ R\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\tau\right] + R\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)\tau\right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=-k}^L \sum_{r=-k}^L a_m a_r \left\{ [R[(m-r)\tau] + R[(m-r+1)\tau]] + \mu [R_{uu}[(m-r)\tau] + R_{uu}[(m-r+1)\tau]] \right\}. \end{aligned}$$

В этой формуле и далее обозначено

$$\mu = \sigma_u^2 / \sigma_X^2 \quad (4)$$

отношение дисперсий шума и процесса.

Найденное выражение представляет собой квадратичную форму. Запишем его в матрично-векторном виде:

$$\delta_{1/2}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}_f \mathbf{x} - \mathbf{g}^T \mathbf{x} + 1. \quad (5)$$

Здесь вектор $\mathbf{x}$ имеет своими компонентами величины

$$x_1 = a_{-k}, x_2 = a_{-k+1}, \dots, x_k = a_0, \dots, x_n = a_{n-k-1}, \dots, x_N = a_{N-k-1} = a_L \quad (6)$$

и обозначена квадратная матрица

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{R}_{corr} + \mathbf{R}_{mod} + \mu(\mathbf{I} + \mathbf{R}_{modu}), \quad (7)$$

Составляющие этой матрицы определяются как свойствами процесса $X(t)$, так и свойствами шума $n(t)$. Входящая в нее квадратная симметрическая положительно определенная корреляционная матрица размера $N \times N$

$$\mathbf{R}_{corr} = \begin{bmatrix} 1 & R_1 & R_2 & R_3 & \dots & R_{N-1} \\ R_{-1} & 1 & R_1 & R_2 & \dots & R_{N-2} \\ R_{-2} & R_{-1} & 1 & R_1 & \dots & R_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{-(N-1)} & R_{-(N-2)} & R_{-(N-3)} & R_{-(N-4)} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

имеет своими элементами $R_m = R_{-m} = R(m\tau)$ значения нормированной корреляционной функции процесса $X(t)$ при временных сдвигах $m\tau$.

Несимметрическая модифицированная матрица того же размера

$$\mathbf{R}_{mod} = \begin{bmatrix} R_{-1} & 1 & R_1 & R_2 & \dots & R_{N-3} & R_{N-2} \\ R_{-2} & R_{-1} & 1 & R_1 & \dots & R_{N-4} & R_{N-3} \\ R_{-3} & R_{-2} & R_{-1} & 1 & \dots & R_{N-5} & R_{N-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{-(N-1)} & R_{-(N-2)} & R_{-(N-3)} & R_{-(N-4)} & \dots & R_{-1} & 1 \\ R_{-N} & R_{-(N-1)} & R_{-(N-2)} & R_{-(N-3)} & \dots & R_{-2} & R_{-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

также имеет своими элементами значения этой корреляционной функции.

Обратимся к входящим в $\mathbf{R}_f$ матрицам, содержащим своими элементами значения корреляционных функций шума. Будем считать шумы внутренне некоррелированными, что для малых значений шумов квантования по уровню справедливо с большой степенью точности [1]. Это означает, что нормированная корреляционная функция шума может быть представлена как

$$R_{su}(k\tau) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому N -мерные корреляционная и модифицированная матрицы шума, аналогичные (8) и (9), имеют вид

$$\mathbf{R}_{corru} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{R}_{modu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{I}$ - единичная матрица размера $N \times N$.

И, наконец, N -мерный вектор $\mathbf{g}^T = (g_1, g_2, \dots, g_N)$ имеет своими компонентами величины нормированной корреляционной функции процесса $X(t)$ при полуцелых значениях сдвига t :

$$g_1 = R_{-k-1/2} + R_{-k+1/2}, g_2 = R_{-k+1/2} + R_{-k+3/2}, \dots \\ \dots, g_n = R_{n-k-3/2} + R_{n-k-1/2}, g_N = R_{L-1/2} + R_{L+1/2}.$$

Известно [2], что скорость создания данных гауссовскими величинами $X(t_m)$ без учета их взаимной корреляции равна величине

$$v = \frac{1}{2\tau} \log_2 \left(1 + \frac{1}{\mu} \right). \quad (10)$$

Она измеряется в битах в секунду. Для безошибочной передачи процесса $X(t)$ по каналу связи эта величина не должна превосходить пропускной способности канала $C: v \leq C$. Величина μ в (10) дается формулой (4). Количество информации, создаваемое случайной последовательностью $X(t_m)$ на характерном (интегральном) масштабе τ_x процесса $X(t)$ есть

$$j_1 = v\tau_x = \frac{1}{2z} \log_2 \left(1 + \frac{1}{\mu} \right),$$

где $z = \tau/\tau_x$ - отношение интервала дискретизации процесса к его характерному масштабу.

Отсюда при заданном j_1 можно выразить величину

$$\mu = \left(4^{j_1(\tau/\tau_x)} - 1 \right)^{-1}, \quad (11)$$

входящую в формулу (7).

Сформулируем стоящую перед нами задачу. Допустим, что известны характерный масштаб процесса τ_x и пропускная способность канала C . Необходимо рассчитать параметры такого фильтра-преобразователя, которые минимизируют величину квадрата относительной погрешности $\delta_{1/2}^2$.

Выбирая предельное значение $v = C$, находим требуемое $j_1 = C\tau_x$, где, как указано выше, масштаб процесса t_x задан. При этом согласно (5), величина $\delta_{1/2}^2$ зависит от N составляющих вектора $\mathbf{x}$ и относительного интервала дискретизации $z = \tau/\tau_x$.

Матрица $\mathbf{R}_f$ и вектор $\mathbf{g}$ не зависят от $\mathbf{x}$, но зависят от z .

Очевидно, что одним из критериев оптимальности фильтра-преобразователя может быть выбор таких значений $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{opt}$ и $z = z_{opt}$, которые обеспечивают минимум величины погрешности $\delta_{1/2}^2$. Такие величины указанных параметров будем называть оптимальными.

Задача нахождения оптимальных параметров может быть разбита на два этапа.

Во-первых, выражение (5) представляет собой квадратичную форму относительно N -мерного вектора $\mathbf{x}$. Это обстоятельство позволяет аналитически найти вектор $\mathbf{x}_{opt}(z)$, минимизирующий $\delta_{1/2}^2$ для каждого конкретного z . В результате будет найдена величина $\delta_{1/2 \min}^2(z)$, не зависящая от $\mathbf{x}$, но зависящая от z .

Во-вторых, следует найти минимум найденной величины $\delta_{1/2 \min}^2(z)$ в зависимости от z . Это – задача одномерной минимизации, которая достаточно просто решается численными методами.

Решим первую из указанных задач. Аналитическое решение задачи минимизации квадратичной формы вида (5) известно для случая, когда матрица $\mathbf{R}_f$ является положительно определенной и симметричной [3]. В нашем уравнении она несимметрична. Решим задачу для такого случая, воспользовавшись методом, изложенным в [3].

Пусть $\mathbf{x}_0$ - некоторый произвольный вектор. При нем функция (5) принимает вид

$$\delta_{1/2}^2(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{R}_f \mathbf{x}_0 - \mathbf{g}^T \mathbf{x}_0 + 1. \quad (12)$$

Выбрав любое действительное число α и произвольный вектор $\mathbf{p}$, создадим новый вектор $\mathbf{x}_0 = \alpha \mathbf{p}$. Ему соответствует значение квадрата погрешности

$$\delta_{1/2}^2(\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{p}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{p})^T \mathbf{R}_f (\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{p}) - \mathbf{g}^T (\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{p}) + 1.$$

Раскрыв скобки и выполнив элементарные преобразования, получим

$$\delta_{1/2}^2(\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{p}) = \delta_{1/2}^2(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{R}_f \mathbf{p} \alpha^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_0^T \mathbf{R}_f \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{R}_f \mathbf{x}_0) \alpha - \mathbf{g}^T \mathbf{p} \alpha + 1.$$

Эта функция скалярной переменной α достигает экстремального значения при таком значении $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{opt}$, при котором выполняется условие

$$\left. \frac{\partial \delta_{1/2}^2(\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{p})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0,$$

т.е. при

$$\frac{1}{2} (\mathbf{x}_{opt}^T \mathbf{R}_f \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{R}_f \mathbf{x}_{opt}) = \mathbf{g}^T \mathbf{p}. \quad (13)$$

Воспользовавшись известным тождеством $\mathbf{p}^T \mathbf{R}_f \mathbf{x}_{opt} = \mathbf{x}_{opt}^T \mathbf{R}_f^T \mathbf{p}$, приведем уравнение (13) к виду

$$\mathbf{x}_{opt}^T \mathbf{G} \mathbf{p} = \mathbf{g}^T \mathbf{p}, \quad (14)$$

где обозначена симметричная квадратная матрица

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_f + \mathbf{R}_f^T). \quad (15)$$

В силу произвольного выбора вектора $\mathbf{p}$ уравнение (14) справедливо для любых $\mathbf{p}$. Поэтому оно равносильно следующему: $\mathbf{x}_{opt}^T \mathbf{G} = \mathbf{g}^T$, решение которого есть

$$\mathbf{x}_{opt}^T = \mathbf{g}^T \mathbf{G}^{-1}. \quad (16)$$

Отсюда с учетом (6) могут быть найдены весовые коэффициенты фильтра (1).

Если матрица $\mathbf{R}_f$ симметрична, то согласно (15), $\mathbf{G} = \mathbf{R}_f$ и решение (16) совпадает с приведенным в [3].

Положительная определенность матрицы $\mathbf{G}$ обеспечивает минимум формы (12), если $\mathbf{x}_{opt}$ определяется выражением (16).

Так как матрица $\mathbf{G}$ симметрична, то симметрична и обратная ей матрица $\mathbf{G}^{-1}$.

Из формулы (16) имеем

$$\mathbf{x}_{opt} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{g}, \quad (17)$$

и минимальное значение формы (12), достижимое оптимальным выбором $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{opt}$, определяется подстановкой в нее значений (16) и (17), т.е.

$$\delta_{1/2 \min}^2 = 1 - \mathbf{g}^T \mathbf{Q} \mathbf{g}, \quad (18)$$

где обозначена матрица

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}^{-1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{R}_f \mathbf{G}^{-1} \right)$$

и $\mathbf{I}$ - единичная матрица размерности матрицы $\mathbf{R}_f$.

Входящие в формулу (18) вектор $\mathbf{g}$ и матрица $\mathbf{Q}$ зависят от параметра $\mathbf{z}$, так как от него зависят корреляционные функции и величина μ , лежащие в основе вычисления $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{g}$. Функция $\delta_{1/2 \min}^2(\mathbf{z})$ сложным образом зависит от своего аргумента, что исключает возможность аналитического нахождения ее минимума. Решение задач безусловной минимизации таких функций осуществимо рядом быстро сходящихся высокоточных численных методов, применимых в рассматриваемой задаче [3]. Результатом ее решения является оптимальная величина $\mathbf{z} = \mathbf{z}_{opt}$, обеспечивающая минимум $\delta_{1/2 \min}^2(\mathbf{z})$, т.е.

$\delta_{1/2 \min \min}^2 = \delta_{1/2 \min}^2(z_{opt})$. Подстановка z_{opt} в формулу (17) дает значение соответствующего оптимального вектора $\mathbf{x}_{opt} = \mathbf{x}_{opt}(z_{opt})$, а в формулу (11) с учетом (4) – отношение дисперсий шума и процесса

$$\mu_{optuu} = (\sigma_X^2 / \sigma^2)_{opt} = (4^{j_1 z_{opt}} - 1)^{-1}.$$

Из последней формулы может быть найден оптимальный относительный интервал квантования процесса по уровню [1]

$$(q_{кс} / \sigma_X^2)_{opt} = 2\sqrt{3\mu_{opt}}.$$

В заключение заметим, что приведенные здесь критерий оптимальности, методы интерполяции и кодирования могут быть выбраны и иными способами, а не только указанными выше. Получаемые при этом квадратичные формы для своей минимизации требуют разработки специальных численно-аналитических методов. Решение сформулированных задач зависит от статистической структуры преобразуемых процессов.

Преодоление всех этих этапов позволяет найти объективные оптимальные методы определения параметров цифрового преобразования процессов и фильтров, их обеспечивающих, в наилучшей степени соответствующие поставленной задаче. Это составит предмет дальнейших исследований в данном направлении.

Библиографический список

1. Доценко С.В. Случайные процессы в гидрофизических измерениях / С.В. Доценко. — Л.: Гидрометеиздат, 1982. — 239 с.
2. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике / К. Шеннон. — М.: ИИЛ, — 829 с.
3. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. — М.: Мир, 1985. — 509 с.