

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ПОЛЯ

Рассмотрен общий способ оценки погрешности восстановления однородных изотропных случайных полей, описываемых различными корреляционными функциями, при разных способах пространственной дискретизации.

Задачи цифровой обработки двумерных полей с ростом вычислительной мощности компьютерной техники находят свое применение в самых различных областях научной и практической деятельности – это гидрометеорологические и гидрофизические исследования, обработка биологических и медицинских изображений, передача изображений по цифровым каналам связи, моделирование различных систем – экологических, геоинформационных и т.д. [1 – 3].

Пусть однородное изотропное поле $X(x, y)$ измеряется в точках $A_1 - A_3$, составляющих вершины равностороннего треугольника со стороной d (рисунок 1, а). Необходимо оценить погрешность восстановления этого поля в точке $P(x, y)$.

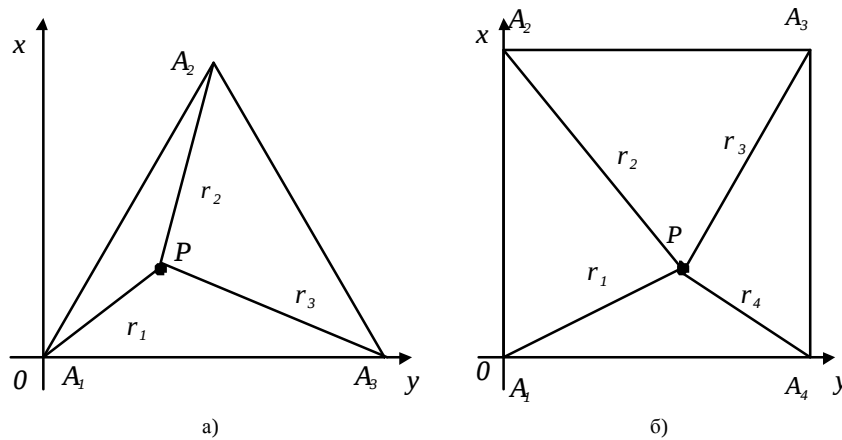


Рисунок 1 – Элементарная ячейка дискретизации измеряемого поля:

а) при треугольной, б) при квадратной дискретизации

В любой точке A_i при измерении к истинному значению поля всегда добавляется шум $n(A_i)$, который связан либо с внутренним шумом измерителя, либо является шумом квантования по уровню. Поэтому результат измерения будет случайной величиной

$$\eta(A_i) = X(A_i) + n(A_i). \quad (1)$$

Линейная оценка поля в точке $P(x, y)$ осуществляется по формуле

$$Y(P) = \sum_{i=1}^3 a_i \eta(A_i), \quad (2)$$

где a_i – подлежащие определению коэффициенты

Средний квадрат погрешности восстановления поля в точке P запишется как

$$\varepsilon^2 = M[X(P) - Y(P)]^2 = M[X^2(P)] - 2M[X(P)Y(P)] + M[Y^2(P)]. \quad (3)$$

Найдем слагаемые формулы (3), учитывая соотношения (2) и (1):

$$M[X(P)Y(P)] = \sum_{i=1}^3 a_i M[X(P)n(A_i)] = \sum_{i=1}^3 a_i \{M[X(P)X(A_i)] + M[X(P)n(A_i)]\},$$

здесь $M[X^2(P)] = \sigma_X^2$ – дисперсия поля, $M[n^2(A_i)] = \sigma_{III}^2$ – дисперсия шума.

Считая шум и поле внутренне некоррелированными, получаем $M[X(P)n(A_i)] = 0$.

Величины $M[X(P)X(A_i)] = B_X(P, A_i)$ – корреляционные функции, аргументы которых равны расстояниям от точки P до точек измерения. Эти расстояния согласно рисунку 1, а) равны

$$\rho_1 = PA_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho_2 = PA_2 = \sqrt{\left(\frac{d}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{d\sqrt{3}}{2} - y\right)^2}, \quad \rho_3 = PA_3 = \sqrt{(d - x)^2 + y^2},$$

где d – сторона треугольника

Следовательно $B_X(P, A_i) = B_X(\rho_i)$.

Величина $M[n(A_i)n(A_k)] = B_{III}(A_i, A_k) = B_{III}(d)$ – корреляционная функция шума.

Последнее слагаемое формулы (3) приводится к виду:

$$M[Y^2(P)] = (\sigma_X^2 + \sigma_{III}^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2[B_X(d) + B_{III}(d)](a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3).$$

С учетом выполненных преобразований получим выражение для среднего квадрата погрешности восстановления поля в любой точке ячейки:

$$\varepsilon^2 = \sigma_X^2 - 2[a_1B_X(\rho_1) + a_2B_X(\rho_2) + a_3B_X(\rho_3)] + (\sigma_X^2 + \sigma_{III}^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2[B_X(d) + B_{III}(d)](a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3).$$

Отсюда найдем квадрат относительной погрешности восстановления поля

$$\delta^2 = \frac{\varepsilon^2}{\sigma_X^2} = 1 - 2[a_1R_X(\rho_1) + a_2R_X(\rho_2) + a_3R_X(\rho_3)] + (1 + \mu)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2[R_X(d) + R_{III}(d)](a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3), \quad (4)$$

где $R_X(\rho_i) = B_X(\rho_i)/\sigma_X^2$ и $R_{III}(\rho_i) = B_{III}(\rho_i)/\sigma_{III}^2$ – нормированные корреляционные функции поля и шума,

а $\mu = \frac{\sigma_{III}^2}{\sigma_X^2}$ – отношение дисперсий поля и шума.

Минимум квадрата относительной погрешности получается при следующих условиях:

$$\frac{\partial \delta^2}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Найдем величины входящих в формулу (2) коэффициентов a_i , обеспечивающих эти условия.

Обозначая

$$(1 + \mu) = A, \quad R_X(d) + \mu R_{III}(d) = B, \quad R_X(\rho_i) = C_i, \quad (6)$$

приведем формулу (4) к виду

$$\delta_{\min}^2 = 1 + A(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2B(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) - 2(C_1a_1 + C_2a_2 + C_3a_3),$$

и преобразуем условия (5) в систему уравнений

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ba_3 = C_1; \\ Ba_1 + Aa_2 + Ba_3 = C_2; \\ Ba_1 + Ba_2 + Aa_3 = C_3. \end{cases}$$

Решение этой системы дает следующие значения оптимальных коэффициентов интерполяции:

$$a_{1opt} = \frac{AC_1 + B(C_1 - C_2 - C_3)}{(A - B)(A + 2B)}, \quad a_{2opt} = \frac{AC_2 + B(C_2 - C_1 - C_3)}{(A - B)(A + 2B)}, \quad a_{3opt} = \frac{AC_3 + B(C_3 - C_2 - C_1)}{(A - B)(A + 2B)}.$$

С учетом вычисленных значений оптимальных коэффициентов получим выражение для минимальной относительной погрешности восстановления:

$$\delta_{\min}^2 = 1 - \frac{(A + 2B)(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2) - B(C_1 + C_2 + C_3)^2}{(A - B)(A + 2B)}.$$

Будем считать, что шум и поле внутренне некоррелированы. При этом второе выражение формулы (6) упрощается: $B = R_X(d)$.

Конкретизируем вид корреляционной функции поля. На рисунке 2 показаны корреляционные функции, отображающие в определенном смысле крайние случаи описания двумерных полей. Экспоненциальная корреляционная функция $R_1(r) = \exp(-r/r_X)$ (рисунок 2, а), описывает недифференцируемое

«шероховатое» поле. Корреляционная функция вида $R_2(r) = \exp\left(-\frac{\pi}{4}(r/r_X)^2\right)$ (рисунок 2, б) – описывает

поле, имеющее бесконечное количество производных, «гладкое», хорошо аппроксимируемое полиномами. Здесь и далее r_X – характерный масштаб поля, т.е. то расстояние, на котором поле сохраняет свойство статистической связности.

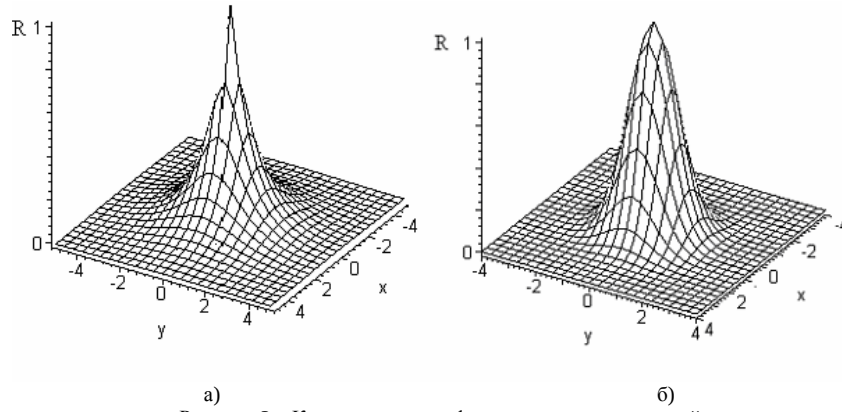


Рисунок 2 – Корреляционные функции двумерных полей

Пусть поле описывается экспоненциальной корреляционной функцией. На рисунке 3, а показан пример распределения погрешности восстановления поля по всей площади равностороннего треугольника при $d/r_x = 0,01$ и $\mu = 0,01$.

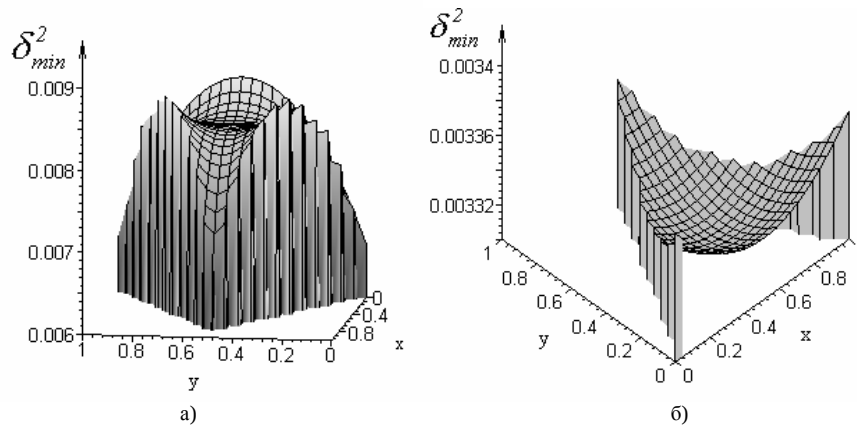


Рисунок 3 – Распределение погрешности восстановления поля:
а) с экспоненциальной корреляционной функцией; б) с колоколообразной

Здесь четко видны минимумы значения погрешности в точках, соответствующих точкам измерения $A_1 - A_3$ и локальный минимум в центре треугольника. Максимальное значение погрешности находится в точках, лежащих на середине стороны треугольника дискретизации.

Пример распределения погрешности восстановления поля с колоколообразной корреляционной функцией показан на рисунке 3, б при тех же значениях d/r_x и μ . В отличие от рисунка 3, а хорошо видны максимумы значения погрешности в точках измерения $A_1 - A_3$, минимум погрешности в центре треугольника и локальные минимумы в точках, лежащих на середине стороны треугольника измерения.

Аналогичные расчеты проведены и для квадратной дискретизации поля. При ней однородное изотропное центрированное поле $X(x, y)$ измеряется в точках $A_1 - A_4$, которые являются вершинами квадрата с длиной стороны d (рисунок 4, б).

Здесь выражение для квадрата относительной погрешности восстановления измеряемого поля имеет вид

$$\delta^2 = 1 - 2 \sum_{i=1}^4 a_i C_i + A(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) + 2B(a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_3 a_4) + 2D(a_1 a_3 + a_2 a_4),$$

где приняты следующие обозначения

$$A = 1 + \mu, \quad B = R_X(d) + \mu R_{III}(d), \quad C_i = R_X(\rho_i), \quad D = R_X(\sqrt{2}d) + \mu R_{III}(\sqrt{2}d).$$

Значения оптимальных коэффициентов получаются при решении системы четырех уравнений, аналогичной (5):

$$a_{\text{опт}} = \frac{C_1(A^2 + AD - 2B^2) + (C_2 + C_4)(BD - AB) - C_3(D^2 + AD - 2B^2)}{(A - D)(A + D - 2B)(A + D + 2B)},$$

$$a_{2onm} = \frac{C_2(A^2 + AD - 2B^2) + (C_1 + C_3)(BD - AB) - C_4(D^2 + AD - 2B^2)}{(A - D)(A + D - 2B)(A + D + 2B)},$$

$$a_{3onm} = \frac{C_3(A^2 + AD - 2B^2) + (C_2 + C_4)(BD - AB) - C_1(D^2 + AD - 2B^2)}{(A - D)(A + D - 2B)(A + D + 2B)},$$

$$a_{4onm} = \frac{C_4(A^2 + AD - 2B^2) + (C_1 + C_3)(BD - AB) - C_2(D^2 + AD - 2B^2)}{(A - D)(A + D - 2B)(A + D + 2B)}.$$

Применяя эти соотношения к полям с указанными выше корреляционными функциями, получаем, в частности, пример распределения погрешности восстановления поля с экспоненциальной корреляционной функцией по ячейке дискретизации при значениях $d/r_x = 0,01$ и $\mu = 0,01$. Он показан на рисунке 4, а.

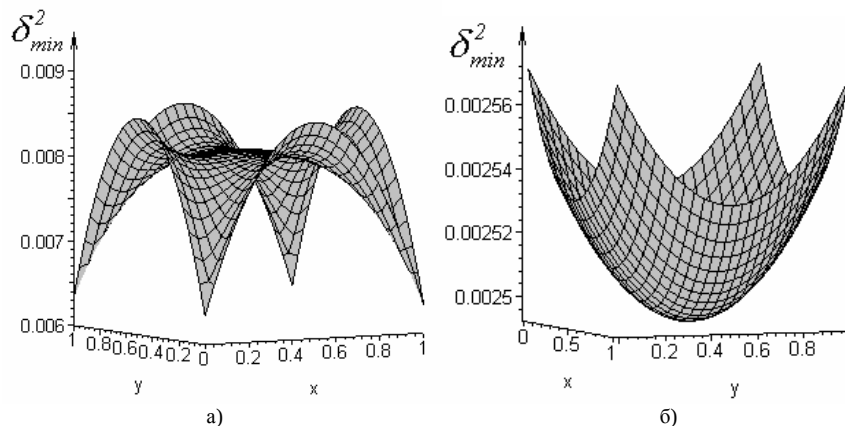


Рисунок 4 – Распределение погрешности восстановления по элементарной ячейке:
а) для экспоненциальной корреляционной функции; б) для колоколообразной

Для поля с колоколообразной корреляционной функцией распределение погрешности восстановления поля по ячейке дискретизации при тех же параметрах показано на рисунке 4, б.

Сравнивая полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

- характер распределения величины погрешности восстановления поля по ячейке существенно зависит от степени его гладкости, а, следовательно, от вида корреляционной функции поля;
- для поля одного вида характер зависимости величины погрешности его восстановления от расположения точки внутри ячейки практически одинаков для треугольной и квадратной дискретизации;
- величина погрешности восстановления поля зависит от его корреляционной функции. Для поля с одной и той же корреляционной функцией величина погрешности несколько различается в зависимости от способа пространственной дискретизации.

Алгоритмы, разрабатываемые для цифровой обработки двумерных полей, должны строиться с учетом различия величины погрешности восстановления в зависимости от свойств поля: вида его корреляционной функции, способа пространственной дискретизации и требуемой точности представления данных. Приведенные результаты позволяют находить и использовать для этой цели количественные оценки необходимых параметров.

Дальнейшая работа будет посвящена применению полученных результатов к определению оптимальных параметров дискретизации реальных двумерных полей.

Библиографический список

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений [в 2-х кн.] / У.Прэтт. — М.: Мир, 1982. — Кн.1. — 310 с., Кн.2. — 790 с.
2. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений/ Л.П.Ярославский. — М.: Сов. радио, 1979. — 312 с.
3. Беляев В.И. Обработка и теоретический анализ океанографических наблюдений/ В.И.Беляев. — К.: Наук. думка, 1973. — 296 с.

Поступила в редакцию 29.10.2005 г.