

АЛГОРИТМ ЭКСПРЕСС-ОЦЕНКИ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Рассматривается процедура оценки автокорреляционной функции (АКФ), основанная на её аппроксимации конечным числом ряда Тейлора. Приводятся результаты теоретических расчётов и имитационного моделирования.

Оценка корреляционной функции является одной из важных задач, возникающих в ходе исследования случайных процессов [1]. Её решение производится с помощью процедур, реализация которых объективно требует наличия буфера для хранения отсчётов случайного процесса в дискретном или цифровом исполнении либо линии задержки в аналоговом [2 – 4]. Поэтому представляется актуальным построение процедуры определения АКФ, частично или полностью свободной от указанных недостатков.

Пусть случайная функция, представляющая случайный процесс, бесконечно дифференцируема. В этом случае, для любой её реализации в окрестностях точки t справедливо разложение в ряд Тейлора:

$$f(t + \tau) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!} \tau + \frac{f''(t)}{2!} \tau^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} \tau^n + \dots$$

Умножив обе части предыдущего выражения на $f(t)$, придём к записи

$$f(t + \tau) \cdot f(t) = f^2(t) + \frac{f'(t) \cdot f(t)}{1!} \tau + \frac{f''(t) \cdot f(t)}{2!} \tau^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t) \cdot f(t)}{n!} \tau^n + \dots \quad (1)$$

По определению автокорреляционная функция случайного стационарного эргодического процесса есть $B(\tau) = \langle f(t) \cdot f(t + \tau) \rangle$, где угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают осреднение реализаций по всем возможным значениям t . Таким образом, используя разложение (1) и основываясь на том, что АКФ чётна относительно случайного сдвига τ , можно записать

$$B(\tau) = \langle f^2(t) \rangle + \frac{\langle f''(t) \cdot f(t) \rangle}{2!} \tau^2 + \frac{\langle f^{IV}(t) \cdot f(t) \rangle}{4!} \tau^4 + \dots + \frac{\langle f^{(2n)}(t) \cdot f(t) \rangle}{2n!} \tau^{2n} + \dots \quad (2)$$

Подчёркнём, что равенство (2) справедливо при условии, что процесс является гладким, дифференцируемым бесконечное число раз. Это требование выполняется, если АКФ $B(\tau)$ является бесконечно дифференцируемой функцией [1]. Определяемый признаком Даламбера радиус сходимости ряда Тейлора равен бесконечности, что свидетельствует о сходимости ряда на всём диапазоне τ . Известно [1,2], что АКФ стационарного процесса имеет тенденцию к убыванию, и всегда найдётся $\tau = \tau_x$, называемое характерным временным масштабом процесса, начиная с которого значения процесса будут статистически не связаны. Отсюда возникает оптимизационная задача определения числа членов разложения (2), обеспечивающих необходимую точность приближения к $B(\tau)$.

Априори можно предположить, что для многих практических приложений достаточно ограничиться двумя членами ряда (2)

$$B(\tau) \approx \langle f^2(t) \rangle + \frac{\langle f''(t) \cdot f(t) \rangle}{2!} \tau^2, \quad (3)$$

которые будут обеспечивать тем большую точность, чем меньше величина τ . Для сохранения приемлемой точности при увеличении τ , возможно, будет необходимо наращивать длину ряда.

Из формулы (3) следует, что для получения оценки отсчёта АКФ при фиксированном значении τ необходимо выполнить операцию двойного дифференцирования, пять операций умножения (считая замены операций возведения в степень умножением, а операции деления на два – умножением на 0,5), одну операцию сложения и процедуру усреднения. Очевидно, что для вычисления k отсчётов АКФ, в k раз возрастёт число операций, напрямую связанных с расчётом 2-го слагаемого в (3).

Выполнение процедуры усреднения на аналоговых элементах может быть реализовано с помощью интегрирующей цепи, и действительно, в этом случае, можно обойтись без линии задержки. А реализация процедуры усреднения в виде вычислительного алгоритма, по-видимому, будет в немалой степени, определяться свойствами обрабатываемого процесса.

Проверим справедливость аппроксимации АКФ усечённым рядом (2) для различных моделей процессов.

Равномерный белый гауссов шум в ограниченной полосе частот имеет спектральную плотность мощности

$$S(\omega) = \begin{cases} G_0, & |\omega| \leq \Omega_x, \\ 0, & |\omega| > \Omega_x, \end{cases}$$

где G_0 – значение плотности мощности; Ω_X – характерный частотный масштаб процесса. Преобразование Хинчина – Винера для данного случая даёт АКФ

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = G_0 \int_{-\Omega_X}^{\Omega_X} e^{j\omega\tau} d\omega = 2G_0\Omega_X \frac{\sin \Omega_X \tau}{\Omega_X \tau}. \quad (4)$$

Обозначив $\gamma = \Omega_X \tau$, запишем разложение в ряд Тейлора – Маклорена в окрестностях точки $B(0)$:

$$B(\gamma) = 2G_0\Omega_X \left[1 - \frac{\gamma^2}{3!} + \frac{\gamma^4}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n \gamma^{2n}}{(2n+1)!} + \dots \right]. \quad (5)$$

Множитель перед квадратными скобками – значение корреляционной функции в нуле, дисперсия случайного процесса σ^2 .

Для случайного гармонического процесса вида [2, с. 123 - 124]

$$X_k(t) = X \sin[2\pi f_0 t + \Theta(k)],$$

где $\Theta(k)$ – случайная величина, равномерно распределённая на интервале $[0; 2\pi]$; X – амплитуда колебаний; f_0 – частота колебаний; автокорреляционная функция

$$B(\tau) = \frac{X^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau = \frac{X^2}{2} \cos \gamma. \quad (6)$$

В (6) обозначено $\gamma = \Omega_0 \tau$, где $\Omega_0 = 2\pi f_0$. Разложение АКФ в ряд запишется в виде:

$$B(\gamma) = \frac{X^2}{2} \left[1 - \frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\gamma^4}{4!} - \frac{\gamma^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{\gamma^{2n}}{(2n)!} + \dots \right]. \quad (7)$$

Для процесса с колоколообразной корреляционной функцией АКФ описывается выражением [1]

$$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{\pi}{4} \left(\frac{\tau}{\tau_x} \right)^2} = \sigma^2 e^{-\frac{1}{\pi} (\Omega_X \tau)^2}, \quad (8)$$

где σ^2 – дисперсия процесса. Обе формы записи связаны соотношением неопределённости $\Omega_X \tau_x = \pi/2$. Воспользовавшись разложением

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!},$$

полагая $x = \gamma/\sqrt{\pi}$, и обозначив $\Omega_X \tau = \gamma$, получим

$$B(\gamma) = \sigma^2 \left[1 - \frac{\gamma^2}{\pi} + \frac{\gamma^4}{\pi^2 2!} - \frac{\gamma^6}{\pi^3 3!} + \dots + (-1)^n \frac{\gamma^{2n}}{\pi^n n!} + \dots \right]. \quad (9)$$

Для процесса с колоколообразной осциллирующей корреляционной функцией АКФ имеет вид

$$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{\pi}{4} \left(\frac{\tau}{\tau_x} \right)^2} \cdot \cos \Omega_0 \tau \quad \text{или} \quad B(\gamma) = \sigma^2 e^{-\frac{1}{\pi} \gamma^2} \cdot \cos \beta \gamma, \quad (10)$$

где $\Omega_X \tau = \gamma$, $\Omega_0/\Omega_X = \beta$.

Выполнив операции дифференцирования, получим следующее выражение для функционального ряда:

$$B(\gamma) \cong 1 + \frac{B_0''}{2!} \gamma^2 + \frac{B_0^{(IV)}}{4!} \gamma^4 + \frac{B_0^{(VI)}}{6!} \gamma^6 + \frac{B_0^{(VIII)}}{8!} \gamma^8. \quad (11)$$

В формуле (11) значения производных запишутся как

$$B_0'' = -\beta^2 - 2\alpha, \quad B_0^{(IV)} = 10\alpha^2 + 12\alpha\beta - \beta^4,$$

$$B_0^{(VI)} = -\beta^6 - 120\alpha^3 - 30\alpha\beta^4 - 180\alpha^2\beta^2,$$

$$B_0^{(VIII)} = -\beta^8 + 1680\alpha^4 + 840\alpha^2\beta^4 + 56\alpha\beta^6 + 3360\alpha^3\beta^2.$$

Выше обозначено $\alpha = -1/\pi$.

Для определения необходимого числа членов в разложении (2) воспользуемся критерием абсолютной ошибки, выражающим отклонение усечённого ряда (2) от рассчитанного по формуле точного значения АКФ, т.е.

$$e(\gamma) = \tilde{B}(\gamma) - B(\gamma), \quad (12)$$

где $B(\gamma)$ – точное значение АКФ, определяемое на основании (4), (6), (8) или (10), а $\tilde{B}(\gamma)$ – оценка этого значения, рассчитанная с использованием слагаемых рядов (5), (7), (9) или (11) соответственно

Результаты расчётов изображены на рисунке 1. Цифрами на кривых обозначено число членов функционального ряда при степенях γ , использованных при вычислении (2), т. е. индекс 1 адекватен расчётам, производимым по формуле (3). Точки, соответствующие значениям $\tau = \tau_x$, на фрагментах рисунка 1, а, б находятся при абсциссах $1,5 \approx \pi/2$, а для рисунков 1, в, г соответствуют точке $0,75 \approx \pi/4$. На рисунке 1, г параметр $\beta = 0,25$.

Из поведения зависимостей (12) следует, что вычислительный алгоритм, описываемый (3), безусловно подходит для оценки белого ограниченного по полосе шума и процесса с колоколообразной АКФ. Для гармонического сигнала использование не менее двух членов ряда при степенях τ даёт приемлемую точность при определении оценки $\tilde{B}(\gamma)$. Для процесса с осциллирующей корреляционной функцией на точность аппроксимации будет влиять параметр β .

Очевидно, что при малых значениях параметра β , как это показано на рисунке 2, а, точность аппроксимации АКФ будет примерно такая, как и в случае процесса, соответствующего колоколообразной корреляционной функции. С увеличением относительной частоты осцилляции β , всё большее число полупериодов гармонического сигнала укладывается в пределах характерного временного масштаба

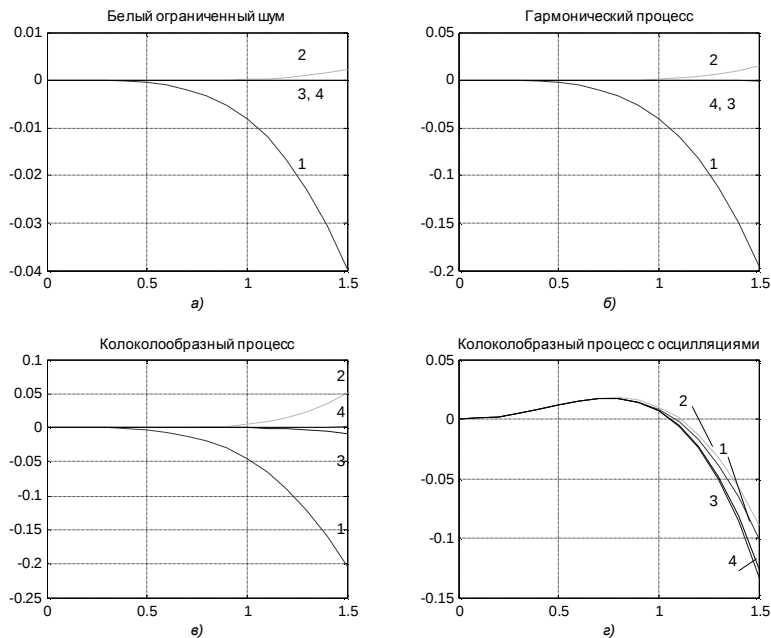


Рисунок 1 – Ошибки $e(\gamma)$ аппроксимации корреляционных функций

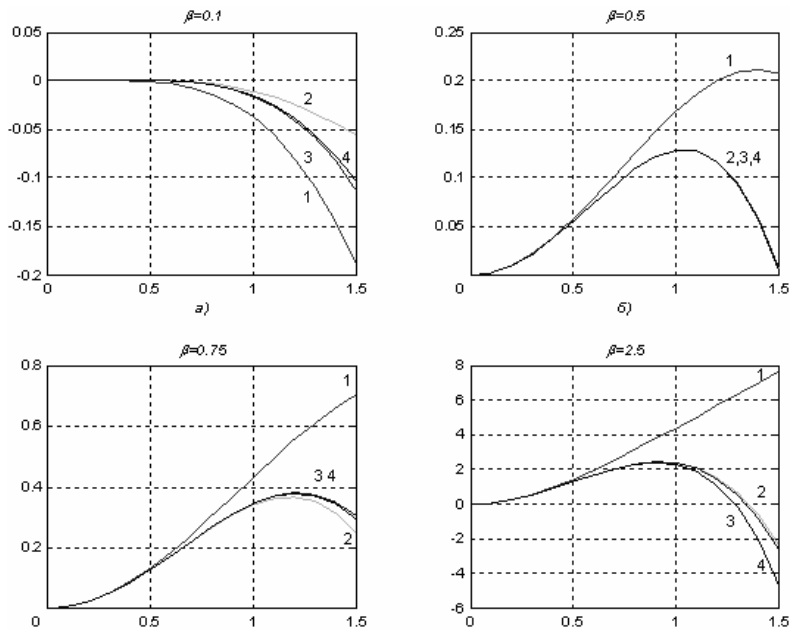


Рисунок 2 – Влияние частоты осцилляций на ошибку $e(\gamma)$

процесса τ_c , что отражается на ко-

личестве перемен знака АКФ. Такая знакопеременная функция неудовлетворительно аппроксимируется зависимостью (11), что в полной мере подтверждается результатами расчётов, приведённых на рисунках 2, б – 2, г.

Таким образом, если необходимо производить обработку процессов, описываемых осциллирующими АКФ, интервал точной аппроксимации тем больше, чем меньше отношение частоты осцилляции Ω_0 к характерному частотному масштабу процесса Ω_c .

Верификация алгоритма расчёта производилась на имитационной модели, реализованной в среде Matlab Simulink. Использован степенной ряд (2), ограниченный четвёртой степенью разложения. Схема моделирования изображена на рисунке 3. Моделирование проводилось при различных значениях параметра γ . Параметры G_0 – мощность шума и X – амплитуда гармонического колебания положены равными единице без потери общности расчётов. Для выполнения операции осреднения использован алгоритм скользящего среднего

$$s_n = \frac{s_{n-1} \cdot n + x_n}{n}, \quad s_0 = 0; n = 1, 2, \dots,$$

где s_n – текущее значение среднего x_n – усредняемая случайная величина; n – номер шага моделирования. Выполненные с помощью модели расчёты показали пригодность предложенного алгоритма для оценки АКФ при решении реальных задач.

В частности, для гармонического сигнала при параметрах $\gamma = 1$, и частоте колебаний $f_0 = 1$

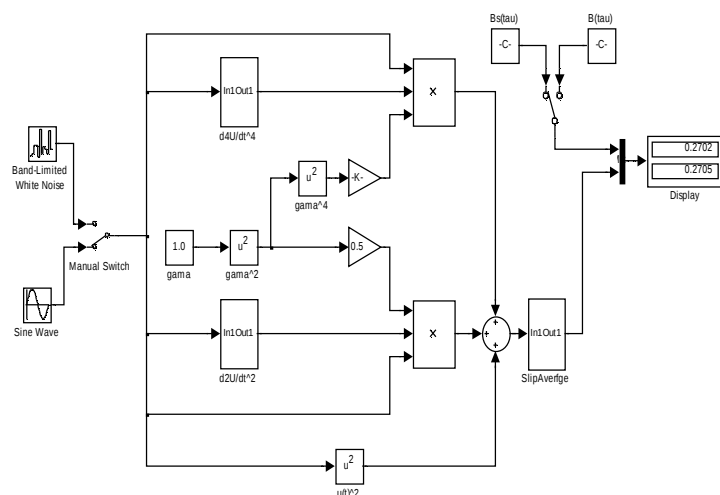


Рисунок 3 – Схема вычислительного эксперимента

рассчитанное по формуле (6) значение составило 0,2702, а полученное в ходе эксперимента – 0,2705. Для ограниченного по частоте белого шума при шаге дискретизации равного 0,5 получено теоретическое значение 10,57 и экспериментальное 10,413. Нормированное отклонение при этом составляет 0,0149.

В результате проведённых исследований можно сформулировать следующие выводы.

1. Для оценки АКФ гладких (дифференцируемых) процессов без осцилляций для значений τ в пределах $[0; \tau_x]$ приемлемая точность обеспечивается степенным рядом (2), усечённым до 4-й степени.

2. Для оценки АКФ гладких процессов без осцилляций для значений τ в пределах $[0; 0,75\tau_x]$ можно использовать алгоритм (3).

3. Наличие у корреляционной функции осцилляций приводит к тому, что чем больше частота осцилляции, тем меньше интервал изменения τ , в котором обеспечивается необходимая точность расчёта оценки АКФ.

4. Увеличение числа отсчётов τ , в которых производится оценка АКФ, безусловно, усложнит схемную реализацию алгоритма, но не явится критичным по отношению к организации вычислений, особенно при наличии возможности распараллеливания операций и мультипроцессорной системы.

В заключение отметим, что предложенный алгоритм оценки АКФ обладает простотой реализации и необходимыми точностными характеристиками. Перспектива дальнейшей работы видится в исследовании возможности распространения предложенной вычислительной процедуры на циклостационарные и нестационарные случайные процессы

Библиографический список

1. Доценко С.В. Случайные процессы в гидрофизических измерениях / С.В. Доценко — Л.: Гидрометеиздат 1983. — 240 с.
2. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. — М.: Мир, 1989. — 540 с.
3. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл-мл. — М.: Мир, 1990. — 584 с.
4. Грибанов Ю.И. Автоматические цифровые корреляторы / Ю.И. Грибанов, Г.П. Веселова, В.И. Андреев. — М.: Энергия, 1971. — 240 с.

Поступила в редакцию 17.02.2005 г.